

초공동(超空洞) 유동 문제의 형상 설계민감도 해석

최주호[†] · 곽현구* · R. V. Grandhi**

(2004년 3월 29일 접수, 2004년 6월 27일 심사완료)

Shape Design Sensitivity Analysis of Supercavitating Flow Problem

Choi Joo-ho, Kwak Hyun-gu and Ramana V. Grandhi

Key Words : Shape Design Sensitivity Analysis(형상설계 민감도 해석), Shape Optimization(형상최적화), Potential Flow(포텐셜 유동), Supercavitating Flow(초공동 유동)

Abstract

An efficient boundary-based technique is developed for addressing shape design sensitivity analysis in supercavitating flow problem. An analytical sensitivity formula in the form of a boundary integral is derived based on the continuum formulation for a general functional defined in potential flow problems. The formula, which is expressed in terms of the boundary solutions and shape variation vectors, can be conveniently used for gradient computation in a variety of shape design in potential flow problems. While the sensitivity can be calculated independent of the analysis means, such as the finite element method (FEM) or the boundary element method (BEM), the FEM is used for the analysis in this study because of its popularity and easy-to-use features. The advantage of using a boundary-based method is that the shape variation vectors are needed only on the boundary, not over the whole domain. The boundary shape variation vectors are conveniently computed by using finite perturbations of the shape geometry instead of complex analytical differentiation of the geometry functions. The supercavitating flow problem is chosen to illustrate the efficiency of the proposed methodology. Implementation issues for the sensitivity analysis and optimization procedure are also addressed in this flow problem.

1. 서론

형상 최적화는 경계나 경계면(interface)과 같은 모델 형상을 대상으로 설계를 결정하는 문제이다. 기존의 치수 설계문제와 달리, 형상설계는 최적화 과정 중 형상이 계속 바뀌는 문제로 인해 더 난이도가 높은 문제로 알려져 있다. 형상 최적설계의 중요성과 우수성 때문에, 지난 30년간 많은 연구

자들에 의해 이론적, 기술적 개발이 진행되어 왔고 현재는 이러한 기술을 실제 문제에 응용하는데 초점을 맞추고 있다.^(1,2)

형상 최적화 문제에서는 구배(gradient)를 이용하여 최적 형상을 찾아 나가는 방법이 많이 사용되고 있다. 구배를 계산하는 가장 간단한 방법은 설계변수를 미소량 증분하여 수치적으로 미분하는 것인데, 이 방법은 정확도가 떨어질 뿐만 아니라 1회의 해석에 많은 계산시간이 필요한 경우 비능률적인 문제가 있다. 따라서 본 연구에서는 구배를 정확하고도 효율적으로 계산하기 위한 형상 설계 민감도 해석(design sensitivity analysis, DSA) 기법을 제시하고 이를 초공동(supercavitation) 유동 문제에 적용하였다.

민감도해석은 접근방법에 따라 두 가지로 구분하는데 하나는 이산화(discrete) 법이고 다른 하나는 연속체(continuum) 법이다. 이 중에서 이산화

[†] 책임저자, 회원, 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부
E-mail : jhchoi@hau.ac.kr
TEL : (02)300-0117 FAX : (02)3158-2191

* 한국항공대학교 대학원 항공우주 및 기계공학과

** Dept. Mech. Matl. Engrg., Wright State University, Dayton, Ohio, USA

법은 먼저 해석 문제를 유한요소로 이산화 시킨 후 이에 대해 미분을 수행하는 반면, 연속체 법은 해석 문제를 연속체 형태로 둔 채로 미분한 다음 그 결과를 이산화시킨다는 차이가 있다. 이산화 법은 이론적으로 이해가 더 쉬우나, 민감도해석을 위한 코드작성에 많은 노력이 요구될 뿐 아니라 요소 강성 행렬 정보가 필요하므로 상용 해석 소프트웨어 사용이 불가능하다. 반면, 연속체 법은 민감도해석 코드 작성이 쉽고, 해석 코드와 독립적으로 수행 가능하므로 최근의 추세인 다학제적 최적화 수행에 더 적합한 장점이 있다.

연속체 법에 대해서는 많은 연구가 있었는데, 예를 들어 이론적 측면에 대해 Choi 와 Haug⁽³⁾의 것이, 계산적 측면에서는 Choi 와 Seong,⁽⁴⁾ Hardee⁽⁵⁾ 등의 것이 있다. 이 연구들에서 실행함수는 해석 대상의 도메인(domain) 전체에 걸쳐 정의되었으며, 민감도는 도메인 적분 형태로 표현되었다. 이런 이유로 이 것을 도메인 접근법이라 부른다. 이 경우, 해석을 위한 방법은 유한요소법(FEM)을 선택하는 것이 자연스럽다. 그러나, 도메인 접근법은 설계 변수 변화로 인해 발생하는 형상변분(shape variation) 벡터가 전체 도메인에서 정의되어야 하는 결점을 갖고 있다. 도메인은 전체 도메인이 아닌 경계에 의해 그 형상이 정의된다는 것을 주목한다면, 형상변분은 경계에서만 유일하게 정의되는 반면 내부의 형상변분은 경계의 형상변분을 토대로 임의로 결정하는 수 밖에 없다. 도메인 접근법에서는 이를 위해 경계에서의 형상변분이 주어지면 이를 주어진 변위조건으로 하여 가상의 탄성 해석을 수행하였는데 이를 경계변위(boundary displacement)법이라 한다.⁽⁵⁾ 이 계산은 최적화 각 단계마다 필요하므로, 계산시간과 부담을 증가시키는 요인이다.

도메인 접근법의 대안으로서 경계 접근법이 제시되었는데 이는 주로 Dems,⁽⁶⁾ Choi,⁽⁷⁾ Meric⁽⁸⁾ 등에 의해 연구가 진행되었다. 이 방법에서는 민감도가 경계 형상변분 만을 요구하기 때문에 도메인 형상변분은 필요가 없고, 따라서 경계변위법과 같은 부가적인 해석도 필요 없으므로 경계 접근법의 가장 큰 이점이 된다. 이 방법에서는 경계요소법(BEM)을 해석에 적용하는 것이 자연스러운데, 경계요소법은 전체 도메인에 대한 메쉬 작업이 필요하지 않고, 정확한 경계해를 제공하기 때문이다. 그러나 경계요소법은 유한요소법에 비해 응용분야가 제한되어 있고 보편화되지 못하여 일반 해석에서는 그리 많이 사용되지 못하고 있다.

따라서 본 연구에서는 형상 설계 민감도의 계산을 위해 경계 접근법을 채택하면서 해석을 위해서

는 유한요소법을 이용함으로써 양측의 장점을 모두 살릴 수 있는 방안을 제시하였다. 민감도 공식의 유도과정에서 전미분(Material derivative) 개념과 보조변수(adjoint variable) 방법을 사용하였다. 유도 결과 민감도 공식은 기본(primal) 변수와 보조(adjoint) 변수, 그리고 경계 형상변분의 항으로 표현된다. 경계에서 기본변수와 보조변수는 포텐셜 유동 해석을 통해 얻을 수 있는데, 이를 위한 해석코드는 어떠한 것을 이용해도 무방하며, 본 연구에서는 상용 소프트웨어 ANSYS⁽⁹⁾를 사용하였다. 해석이 수행되고 나면 민감도 계산을 위해 MATLAB⁽¹⁰⁾을 이용하였다. 최적화 과정은 상용 소프트웨어 VisualDOC⁽¹¹⁾를 사용하였으며, 여기서 MATLAB 에 의해 계산된 민감도를 연계하여 최적화를 진행하였다. 대상으로 고려한 최적화 문제는 초공동 유동문제로서 초공동 경계에서 두 개의 경계조건을 동시에 만족하도록 초공동 경계형상을 반복계산을 통해 결정하는 자유경계치 문제(free boundary value problem)이다. 이 문제를 동등 최적화 문제로 변환하고, 민감도 해석을 실시하였고, 유한요소의 특성에 따른 민감도의 변화, 효율성 등을 분석하여 바람직한 민감도 해석을 위한 방안을 제시하였다.

2. 포텐셜 유동 최적화 문제

본 연구에서 제안한 방법의 응용성을 보이기 위해 초공동 유동 문제를 선택하였다. 초공동 유동은 어뢰와 같은 발사체가 물 속에서 빠른 속도로 이동할 때 발생한다. 이 경우 높은 속도로 인한 압력 저하로 인해 커다란 공동이 추진체의 노즈 앞부분에서 발생하여, 몸체를 뒤덮는다. 이는 마치 추진체가 공기 방울 속에 있는 것과 같으며, 추진체의 노즈 부분만 물에 젖게 된다. 이런 현상으로 인해 표면항력이 크게 줄어든다. 이와 관련하여 정의된 유동 해석문제를 Fig. 1 에 나타내었다. 여기에 나타난 변수들은 문제를 단순화하기 위해 무차원화 시켰다. 참고로 본 문제는 경계요소법을

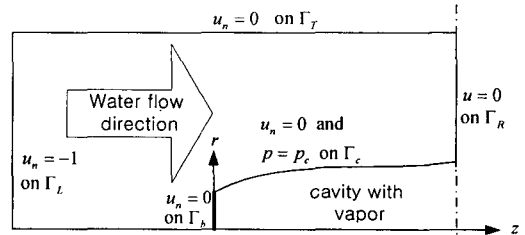


Fig. 1 Supercavitating flow problem model

해석방법으로 하여 Kirschner⁽¹²⁾에 의해 이미 연구된 바 있다. Fig. 1에서 u 는 속도 포텐셜을, u_s 와 u_n 은 각각 경계에서의 접선방향과 법선방향 속도를, 그리고 p 는 압력을 나타낸다. 유동은 비점성, 비압축성, 정상상태, 축대칭 유동으로 가정하며, 따라서 포텐셜은 유동 도메인에서 Laplace 방정식을 만족한다. Γ_b 로 나타난 발사체의 노즈는 캐비테이터라고도 하는데, 본 경우에는 반경이 1인 원판으로 가정하였고, 이것을 원점에 고정시키고 물이 좌에서 우로 흐르는 문제로 고려하였다. 무차원으로 인해 상류에서 물의 속도는 단위 속도로 주어진다. 공동 내에 위치한 추진체는 유동해석에서 불필요하기 때문에 여기서는 모델링하지 않았다. 공동은 Fig. 1에서 보는 것처럼 디스크의 오른쪽에서 형성된다. 문제를 단순화 시키기 위해 가장 단순한 모델인 Ryabushinskii 모델⁽¹³⁾을 적용하였는데, 이는 공동 형상이 최대 지름이 위치하는 지점을 중심으로 좌우 대칭형이라고 가정하는 것이며 따라서 공동의 좌측 반만을 고려하였다. 공동 경계 Γ_c 에서는 두 가지 조건이 동시에 적용된다. 하나는 유체 불침투 조건으로, 유체가 공동 경계를 통과하여 들어오지 못한다는 것이다. 다른 하나는 일정 압력 조건으로, 공동 경계를 따라 압력 p 가 증기압 p_c 와 같다는 것이다. 이것을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$p - p_c = 1 + \sigma - u_s^2 = 0 \tag{1}$$

여기서 σ 는 캐비테이션 수로 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma = \frac{p_0 - p_c}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} \tag{2}$$

여기서 p_0 , ρ , U_0 는 각각 상류 유동 압력, 물의 밀도, 상류 유동의 속도를 의미한다. 이 문제에서 공동 경계 Γ_c 는 구해야 할 미지형상이고 이를 잘 결정하여 두 개의 경계 조건을 동시에 만족시켜야 하는데 이를 자유 경계 문제라 한다. 초공동 유동에서 항력은 발사체의 노즈에 분포한 압력을 적분함으로써 구해진다. 이 힘은 초공동을 발생시키기 위한 추진력이기도 하므로 중요한 고려대상이다. 실제로는 항력 대신 단위면적당 힘을 의미하는 항력 계수를 다음과 같이 고려한다.

$$C_d = (1 + \sigma) - 2 \int_b u_s^2 n_z r ds \tag{3}$$

여기서 n_z 는 경계 Γ_b 에서 단위 법선벡터의 축방향 성분이다. 자유경계문제는 동일한 수학적 최적화 문제로 변환하여 푸는 것이 효율적이다. 이때 공동 형상은 설계변수로 기술되며, 목적함수는 두 개의 경계조건 중 하나를 택하여 경계조건의 위반 정도로 정의한다. 본 경우에는 목적함수를 압력조건의 위반으로 정하였으며, 이는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi = \int_c (1 + \sigma - u_s^2)^2 r ds \tag{4}$$

따라서 본 문제는 Ψ 를 최소화하는 경계형상 Γ_c 를 결정하는 문제가 되며, 이때 유동문제의 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_n &= 0 && \text{on } \Gamma_b \\ u_n &= 0 && \text{on } \Gamma_c \\ u &= 0 && \text{on } \Gamma_R \\ u_n &= 0 && \text{on } \Gamma_T \\ u_n &= -1 && \text{on } \Gamma_L \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 Γ_L, Γ_R 및 Γ_T 는 각각 상류, 하류 및 상부외곽 경계를 나타낸다. $\Gamma_b, \Gamma_c, \Gamma_L$ 및 Γ_T 에서는 Neumann 경계조건이, Γ_R 에서는 Dirichlet 경계조건이 주어졌다.

위의 최적화 문제는 다음과 같은 목적함수를 정의함으로써 더 일반적인 방법으로 표현될 수 있다.

$$\Psi = \int_c \psi(u, u_n, u_s) r ds \tag{6}$$

여기서 ψ 는 포텐셜 u 와 이의 미분 u_s 와 u_n 의 함수이다. 경계 형상 Γ 는 목적함수 (6)을 최소화하도록 결정되어야 한다. 포텐셜 u 는

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{7}$$

로 표시되는 Laplace 방정식을 만족해야 하며, 이때 경계조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} && \text{on } \Gamma_u \\ u_n &= \bar{u}_n && \text{on } \Gamma_n \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 문자 위의 바는 주어진 값을 의미하고, Γ_u 와 Γ_n 는 각각 Dirichlet와 Neumann 경계를 의미한다.

3. 설계민감도 해석

형상 설계민감도 해석은 형상변분 때문에 발생하는 목적함수 (6)의 구배를 계산하는 것이다. 형상변분을 기술하는 잘 알려진 방법으로 전미분(material derivative) 개념이 있다.⁽¹⁴⁾ 이에 의하면 어떤 점 \mathbf{x} 가 미소 형상 변화 후 새로운 점 \mathbf{x}^τ 로 이동되는 것을 초기위치에서 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 의 속도벡터로 작은 시간 τ 후의 점으로 이동하는 것으로 생각한다. 이 관계를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^\tau = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \mathbf{x} + \tau\mathbf{V}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

여기서 벡터 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 는 초기 형상을 새로운 형상으로 바꿔주는 형상변분 벡터이다. 형상 변화 후 포텐셜은

$$u^\tau = u + \delta u = u + \frac{Du}{Dt} \tau \quad (10)$$

이고 이때 δu 는 포텐셜의 변분이다. 이 식에서

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + V_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{or} \quad \dot{u} = u' + \mathbf{V} \cdot \nabla u \quad (11)$$

는 u 의 전미분이라 부르는데, 이 것은 초기 위치에서의 포텐셜의 변화 u' 에 새로운 점으로 이동하여 나타난 포텐셜의 변화 $\mathbf{V} \cdot \nabla u$ 를 합한 것이다. 식 (6)을 전미분하고 그 속에 나타나는 u 의 전미분을 보조변수를 도입하여 소거하게 되면 원하는 민감도 공식을 얻게 되며, 그 결과는 다음과 같이 주어진다.⁽⁷⁾

$$\Psi' = \int_{\Gamma} \psi'(u, w; \mathbf{V}) r ds \quad (12)$$

여기서

$$\Psi' = \int_{\Gamma} \left\{ -u_s w_j e_{jk} V_k + u_n w_j V_{js} + (u_n w + \psi) DV_s^* - \psi_{u_s} u_s DV_s^* \right\} r ds \quad (13)$$

이다. 그리고 DV_s 와 DV_s^+ 는 \mathbf{V} 의 함수로

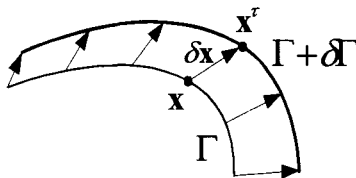


Fig. 2 Shape variation process model

$$DV_s = V_{k,s} s_k, \quad DV_s^+ = DV_s + \frac{V_r}{r} \quad (14)$$

로 주어진다. 또한 보조 변수 w 는 다음과 같은 보조 경계 조건을 갖는다.

$$\begin{aligned} w &= -\psi_{u_n} \quad \text{on } \Gamma_d \\ w_n &= \bar{w}_n \quad \text{on } \Gamma_n \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 \bar{w}_n 는 다음과 같이 정의된 가중 잔여식(weight residual equation)의 해이다.

$$\int_{\Gamma_n} \bar{w}_n w' r ds = \int_{\Gamma_n} (\psi_u w' + \psi_{u_s} w_s') r ds, \quad \text{for } \forall w' \quad (16)$$

식 (13)과 (16)에 나타난 기호 $\psi_u, \psi_{u_s}, \psi_{u_n}$ 는 u, u_s, u_n 에 관한 미분을 의미한다. 예를 들면 $\psi_u = \partial \psi / \partial u$ 이다. 기본변수 u 에 대한 해는 경계조건 (8)에 의해 결정된다. 보조변수 w 에 대한 해는 보조경계조건 (15)에 의해 결정되는데, 이는 기본변수와 동일한 해석문제에 대해 단지 경계 조건만 달리 적용하여 해를 추가로 구하는 것이기 때문에 이를 위한 계산 시간은 기본변수의 해석 시간보다 훨씬 적게 소요된다.

목적함수가 식 (4)로 정의된 초공동 문제의 경우 ψ 의 미분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_u &= 0, \quad \psi_{u_n} = 0 \\ \psi_{u_s} &= -4u_s (1 + \sigma - u_s^2) \end{aligned} \quad (17)$$

그리고 보조변수 경계조건은 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} w_n &= 0 \quad \text{on } \Gamma_b \cup \Gamma_T \cup \Gamma_L \\ w_n &= \bar{w}_n \quad \text{on } \Gamma_c \\ w &= 0 \quad \text{on } \Gamma_R \end{aligned} \quad (18)$$

한편, 항력 계수의 경우, 식 (3)에 있는 적분 표현 식으로부터

$$\psi = -2u_s^2 n_z \quad (19)$$

으로 정의되며, 따라서 그 미분은

$$\psi_u = 0, \quad \psi_{u_n} = 0, \quad \psi_{u_s} = -4u_s n_z \quad (20)$$

으로 주어지며, 이에 대한 보조변수 경계조건은 다음과 같다.

$$w_n = \bar{w}_n \quad \text{on } \Gamma_b \quad (21)$$

항력계수는 단위 법선벡터의 z 방향 성분 n_z 를 포함하고 있으므로 민감도 식에 다음과 같은 식이 추가되어야 한다.

$$2 \int u_s^2 DV_n s_z r ds \quad (22)$$

여기서 s_z 는 경계에서 단위 접선벡터의 z 방향 성분이다.

4. 설계 민감도 해석의 수행

4.1 전체 절차

유도된 민감도 공식을 바탕으로 형상 설계 민감도 해석을 수행할 수 있다. 이를 위해서는 속도벡터로 알려져 있는 형상변분의 계산이 필요하다. 일반적으로 형상은 기하학적 함수와 관련된 유한개의 파라미터들로 표현되며, 이 파라미터들이 설계변수가 된다. 설계 변수를 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 라 한다면, 경계 형상은 이들의 함수로서 다음과 같이 나타난다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (23)$$

이때 민감도 공식에 나타난 형상변분 벡터는 설계 변수들과 다음과 같은 관계로 나타난다.

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} \delta b_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i \delta b_i \quad (24)$$

이로부터 형상변분 벡터 \mathbf{V} 는 각 설계 파라미터의 변화에 따른 경계점 \mathbf{x} 의 위치변화를 의미하며, 따라서 형상변분은 설계변수의 개수만큼 존재함을 알 수 있다. 이를 민감도 공식 (12)에 적용하면, 최종적으로 다음과 같은 표현을 얻는다.

$$\Psi' = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} \psi'(u, w, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i}) r ds \cdot \delta b_i = \sum_{i=1}^n GRAD_i \cdot \delta b_i \quad (25)$$

여기서 $GRAD_i$ 가 설계변수 b_i 의 구배값으로서 최적화 과정에서 이용되는 바로 그 값이다.

포텐셜 유동해석을 위해서는 상용 해석 소프트웨어 ANSYS를 사용하였는데, ANSYS에서는 포텐

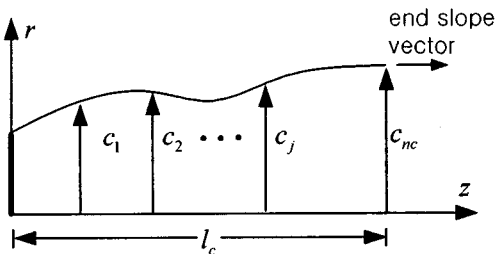


Fig. 3 Modeling of the Cavity Shape

셜 유동 문제를 직접 풀 수 없으므로 유사한 열전도 해석 요소 PLANE77 을 이용하였다. 이때 온도 구배는 유동 속도가 된다.

4.2 형상 변분 벡터의 계산

공동 경계는 B-스플라인 함수를 이용하여 표현하였다. 이때 설계변수는 Fig. 3 에서와 같이 축방향으로 일정 간격으로 있는 공동경계 점들의 높이 c_1, c_2, \dots, c_{nc} 와 함께 공동의 길이 l_c 로 정하였다. 형상이 B-스플라인 곡선으로 표현되었기 때문에 형상 변분 \mathbf{V} 는 이 식을 미분하면 해석적으로 표현식을 얻을 수 있으나 이것은 복잡한 작업이 요구된다. 더 쉬운 방법은 Hardee⁽⁶⁾가 소개한 유한차분 개념을 사용하는 것이다. 그 절차는 우선 각 설계 변수를 미소량 증분시켜 변화된 형상을 생성한 다음 최초 형상으로부터 편차를 계산하는 것이다. 그렇게 하면 형상 변분 벡터는

$$\mathbf{V}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b_i} \approx \frac{1}{\Delta b_i} \{ \mathbf{x}(\mathbf{b} + \Delta b_i \mathbf{e}_i) - \mathbf{x}(\mathbf{b}) \} \quad (26)$$

과 같고, \mathbf{e}_i 는 i 번째 설계변수 방향에 대한 단위 벡터를 의미한다. 이것은 이미 언급한 바와 같이 도메인 전체에 대해 실시할 필요 없이 경계에서만 행하며, 실제로 유한요소모델의 경계점에서 계산된다. 이 점을 감안하여 유한요소모델의 생성은 먼저 경계에서 절점을 생성한 후 이를 토대로 도메인 메쉬를 생성하도록 구성하였다. 이렇게 되면 경계형상 벡터를 계산하는 경우에는 도메인 메쉬까지 갈 필요 없이 경계 모델만 생성하면 된다. 한편, 도메인 메쉬는 자동으로 간편하게 메쉬가 생성되는 자유메쉬(free-mesh) 기능을 사용하였다.

4.3 보조변수 하중의 계산

보조변수 경계 조건을 적용하기 위해서는 식 (16)의 해로 정의되는 등가 \bar{w}_n 의 계산이 필요하다. 이를 위해 경계를 이산화하고, w_s^* 가 소거되지 않도록 적어도 C^0 continuity 를 갖는 w^* 에 대한 적당한 보간함수를 적용한 후 그 결과식을 풀면 등가 \bar{w}_n 이 각 점에서 결정된다. 이 과정은 MATLAB 을 통하여 ANSYS 외부에서 계산된다. 8-절점 사변형 요소가 ANSYS 에서 사용되었기 때문에, 경계에서의 해당요소는 2 차 선요소로 정의되며, 경계점 \mathbf{x} , \bar{w}_n , w^* 등은 모두 절점값과 해당 형상함수를 통하여 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 N^k \mathbf{x}^k = N^1 \mathbf{x}^1 + N^2 \mathbf{x}^2 + N^3 \mathbf{x}^3 \quad (27)$$

$$w^* = \sum_{k=1}^3 N^k w^{*k} = N^1 w^{*1} + N^2 w^{*2} + N^3 w^{*3}$$

이를 식 (16)에 대입하면

$$w^{*i} \int_{(e)} N^i N^k r ds \cdot \bar{w}_n^k = w^{*i} \int_{(e)} (\psi_u N^i + \psi_{u,s} N^i_{,s}) r ds \quad (28)$$

을 얻으며, 이를 해당 경계 전체에 대해 조합하고, 결과식이 독립된 절점값 w^{*i} 에 대해 항상 유효하도록 만들면 등가 절점값 \bar{w}_n^k 에 대한 대수식

$$A^{ik} \bar{w}_n^k = B^i \quad (29)$$

을 얻으며, 이 식을 풀으로써, 등가 \bar{w}_n 이 결정된다. 이것은 열전달 문제에서 열유속(heat flux)에 해당한다. 그러나, ANSYS는 열유속 대신 열유동율(heat flow rate)을 절점에 부과한다. 이는 구조해석의 경우 경계에서 트랙션 대신 힘을 부여하는 것과 같다. 절점에서의 열유동율을 F^i 라 한다면 이는

$$\sum (F^i r^i w^{*i}) = w^{*i} \int_{(e)} (\psi_u N^i + \psi_{u,s} N^i_{,s}) r ds \quad (30)$$

으로부터 구할 수 있는데, 이 식과 식(28)을 비교하면 F^i 가 B^i / r^i 임을 알 수 있다. 한편 ANSYS에서는 축대칭 문제의 경우 열유동율을 360도 전체에 대해 적분한 값으로 부여한다. 그렇게 되면 F^i 값은 다음과 같게 된다.

$$F^i = 2\pi B^i \quad (31)$$

4.4 초공동 유동문제에 대한 설계민감도해석

유도된 민감도 공식을 이용하여 두 개의 성능함수-압력차 적분과 항력 계수의 민감도를 계산하였다. 형상을 표현하기 위한 설계변수로서 공동의 중간과 끝점에 위치한 높이 c_1 과 c_2 , 공동의 길이 l_c , 그리고 형상변수는 아니지만 캐비테이션 수 σ 를 택했다. 민감도의 정확도를 계산하기 위하여, 유한차분법(finite difference method, FDM)에 의해 계산된 값과 비교하였다. 유한차분법에서는 각 설계변수를 미소량 변화시켜 성능함수를 계산

한 후 그 차를 계산하여 구하였다. 미소량은 1%, 0.5%, 0.1% 변화시킨 세가지 값을 사용하였다. 계산 결과 유한차분법과 설계민감도해석법에 의한 민감도값이 거의 100%에 가깝게 일치한다면 정확한 것으로 간주하였는데, 그 비교 내용이 Table 1에 나타나 있다. 그 결과 σ 를 제외하고는 민감도의 정확도가 매우 부정확하였다. 이는 유한차분법에 의한 민감도 자체가 부정확하였기 때문인데, Table 1에서 보이듯이 미소량의 크기 변화에 따라 민감도 값이 매우 심하게 다른 것을 알 수 있으며, 이로 인해 유한차분법에 의한 민감도는 전혀 신뢰할 수 없다. 이는 자유메쉬 때문에 발생하는 것으로 자유메쉬는 미소한 형상변화에도 상당히 다른 형태의 메쉬를 만들어 내며, 이로 인해 유한차분 계산이 부정확해지는 것이다. 이를 피하기 위해, 더 안정된 방법인 맵메쉬(mapped-mesh) 방법을 이용하였고, 그것과의 비교 결과가 Table 2에 있다. 맵메쉬 모델에서는 그 비가 매우 잘 일치하고 유한차분법에 의한 민감도 값 역시 여러 크기의 미소량 변화에서도 거의 같은 값을 보였다. 그러나, 설계변수 l_c 에 대한 정확도는 여전히 부정확하였다. 이것은 공동형상의 대칭면인 오른쪽 끝 경계 Γ_R 의 아래 모서리가 직각을 이루지 않을 경우 법선방향 속도 u_n 과 w_n 이 특이성질(singular behavior)을 나타냄으로 인해 유한요소해가 부정확

Table 1 Sensitivity comparison of the two functions with the free-mesh model

function	design parameter	design value	FDM (1%)	FDM (0.5%)	FDM (0.1%)	DSA	ratio (%)
pdiff. intgrl = 0.2804	c_1	1.50	-0.352	-0.176	0.324	-0.661	-210.0
	c_2	2.00	0.629	0.665	-3.353	0.534	-15.9
	l_c	5.00	-0.074	-0.080	-0.394	-0.010	2.6
	σ	0.16	-0.209	-0.211	-0.212	-0.212	100.1
drag coef. = 0.5976	c_1	1.50	-0.371	-1.398	-1.029	0.529	-51.4
	c_2	2.00	1.564	-0.963	-9.183	-0.126	1.4
	l_c	5.00	-0.251	-0.884	-3.555	-0.030	0.8
	σ	0.16	1.000	1.000	1.000	1.000	100.0

Table 2 Sensitivity comparison of the two functions with the mapped-mesh

function	design parameter	design value	FDM (1%)	FDM (0.5%)	FDM (0.1%)	DSA	ratio (%)
pdiff. intgrl = 0.2715	c_1	1.50	-0.642	-0.642	-0.642	-0.672	104.6
	c_2	2.00	0.536	0.533	0.532	0.544	102.2
	l_c	5.00	-0.063	-0.063	-0.064	-0.020	31.7
	σ	0.16	-0.209	-0.211	-0.212	-0.212	100.1
drag coef. = 0.5571	c_1	1.50	0.616	0.617	0.618	0.584	91.3
	c_2	2.00	-0.156	-0.156	-0.156	-0.137	87.9
	l_c	5.00	-0.034	-0.034	-0.035	-0.043	122.7
	σ	0.16	1.000	1.000	1.000	1.000	100.0

Table 3 Sensitivity comparison of the two functions with smoother cavity

function	design parameter	FDM (0.1%)	DSA	ratio (%)
pdiff. intgrl = 0.1228	c_1	-0.104	-0.119	114.6
	c_2	0.207	0.210	101.6
	l_c	-0.047	-0.055	117.4
	σ	-0.678	-0.679	100.1
drag coef. = 0.7373	c_1	0.495	0.475	96.0
	c_2	-0.132	-0.127	96.2
	l_c	-0.044	-0.055	125.3
	σ	1.000	1.000	100.0

해지기 때문이다. 이를 입증하기 위해 $c_1 = 1.8$ 로 정하여 코너를 직각에 좀더 가까운 형상으로 만들고 민감도를 계산하였다. 그 결과 Table 3 에 나타난 것처럼 민감도가 더 정확해졌다. 한편, Table 1 과 2 를 비교해 보면 자유메쉬와 맵메쉬에 대한 민감도 값들이 매우 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 맵메쉬가 메쉬 품질면에서 자유메쉬보다 우수하지만, 이를 만드는 것이 번거롭고 형상 변형 자유도가 제한되는 단점을 갖고 있음을 감안하면 실제 최적화 과정에서는 보다 간편하면서도 동일한 민감도를 얻을 수 있는 자유메쉬를 사용하는 것이 더 바람직하다.

5. 최적화 실행

민감도 해석 기법을 이용하여 최적화를 수행하였다. 최적화를 위해서는 상용 소프트웨어 VisualDOC 를 사용하였으며, BFGS 알고리즘을 채택하였다. 설계변수는 공동경계의 형상을 정의하는 일정간격의 높이 변수 5 개와 함께 캐비테이션 수 σ 로 정의하였다. 최적화에서는 자유메쉬 뿐 아니라 맵메쉬도 고려하였다. 또한 비교를 위해 유한차분법에 의한 민감도를 이용하여 최적화도 실시하였다. 공동의 길이는 5.0 으로 고정하였다. 최적화를 시킨 후 결과 형상은 Fig. 4 에 나타나 있으며, Fig. 5 에는 최적해까지 목적함수의 수렴이력을 표시했다. Fig. 4 에서는 맵메쉬에 의한 결과를 표시하지 않았는데, 이유는 그 결과가 자유메쉬에 의한 DSA 결과와 동일했기 때문이다. 이 결과들을 종합해 보면, FDM 은 맵메쉬의 경우 DSA 와 동일한 수렴능력을 보이지만, 자유메쉬를 사용하게 되면 수렴이 안되는 것을 알 수 있다. 따라서, FDM 을 이용한 최적화시 자유메쉬 모델은 피해야 할 것으로 생각된다.

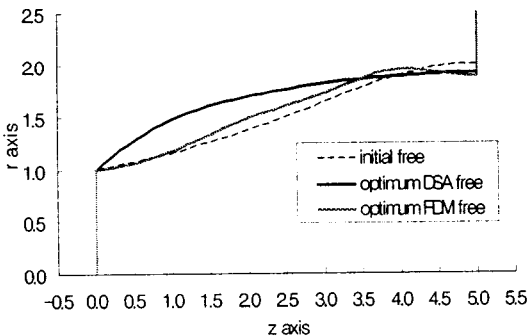


Fig. 4 Initial and optimum cavity shapes in supercavitating flow

다양한 공동 길이에 대한 많은 최적화를 실시하였고 그 결과로부터 캐비테이션 수 σ 와 항력계수 c_d 의 관계를 얻었다. 이것은 Logvinovitch⁽¹³⁾의 이론적 결과와 본 방법을 통해 얻은 결과를 비교하기 위한 것이다. Logvinovitch 에 의하면 이들 간의 관계는 다음과 같다.

$$c_d = 0.82(1 + \sigma) \tag{32}$$

이와 함께 본 방법으로부터 얻은 관계를 Fig. 6 에 나타내었다. 그 결과 본 방법을 통해 얻은 결과는 식 (32)와 동일한 경향을 보이긴 하지만 다소 차이가 났다. 그러나 공동형상을 나타내는 높이변수의 개수 n_c 를 2 에서 5 로 증가시켰더니, 결과가 이론식에 가까이 접근하였다. 이는 높이 변수의 개수를 늘리면 공동의 시작점 근처에서 급격히 변하는 공동 형상을 보다 정확히 표현할 수 있기 때문으로 보여진다. 따라서 설계변수의 갯수를 더욱 늘리면 이론해에 근접할 것을 예상할 수 있다. 그

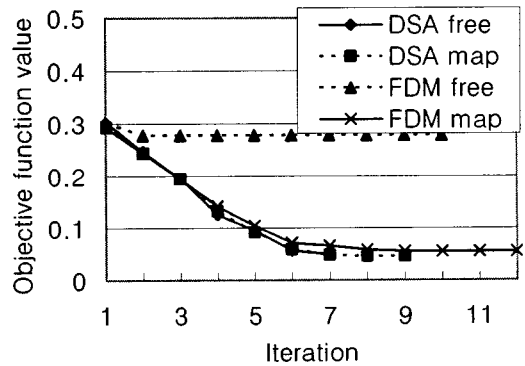


Fig. 5 Objective function history in supercavitating flow

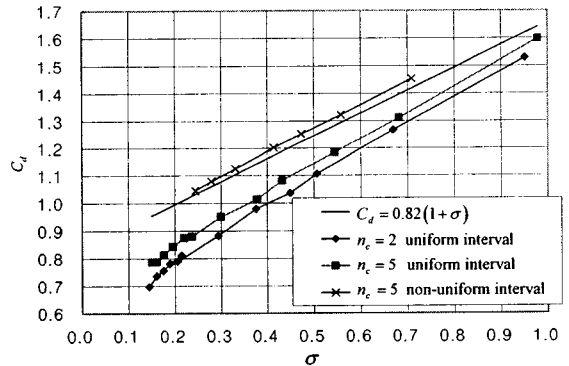


Fig. 6 Comparison between theoretical and numerical results of σ and C_d

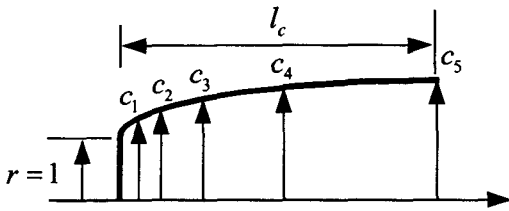


Fig. 7 Design parameters for the cavity shape with non-uniform interval

러나 이로 인해 설계변수가 지나치게 증가하므로, 이 대신 공동 시작점 근방에서만 증가시키기 위해 Fig. 7 과 같이 동일한 5 개 변수를 비균일 간격으로 바꾸어 정의하고 계산해 보았다. 그 결과 Fig. 6 에서와 같이 이론해에 매우 근접한 결과를 얻었다.

6. 결론

본 연구에서는 포텐셜 유동문제에서 다루는 형상최적화 문제를 효과적으로 해결하는 최적화 기법을 개발하였다. 이를 위해 유동의 해석은 유한요소법을 활용한 반면 민감도의 해석은 경계에서 정의되는 공식을 이용하였다. 이의 응용으로서 초공동 유동 문제를 고려하였으며, 이에 대해 민감도 해석을 실시하고 최적화도 수행하였다. 민감도 공식에서 나타나는 형상변분은 경계형상에 대한 유한차분을 행하여 계산함으로써 간편함과 함께 정확성도 유지하였다. 형상변분은 도메인 접근법과 달리 경계에서만 필요하므로 도메인 매쉬를 생성할 필요가 없어 효율적이다.

민감도 계산에서, 본 방법의 정확도는 유한차분법을 통해 검증하였다. 그 결과 유동의 해석을 위해서 자유메쉬 모델을 사용하면 유한차분법의 민감도가 매우 부정확한 반면 맵메쉬 모델은 신뢰할 수 있었고, 그 결과 본 방법의 결과와 잘 일치하였다. 한편 민감도해석법을 이용하면 자유메쉬나 맵메쉬에 관계없이 정확한 민감도를 계산하기 때문에 형상 최적화를 할 때에는 자유메쉬를 사용하는 것이 더 편리함을 알 수 있었다. 다양한 공동 길이에 대하여 많은 최적화를 실시하였고, 이로부터 캐비테이션 수와 항력 계수 사이의 관계를 구한 후 이론식과 비교하였다. 그 결과 높이 변수의 갯수가 적을 경우 초공동 시작부위의 형상을 정확히 표현하지 못함으로 인해 오차가 발생함을 알 수 있었고, 이는 높이 변수를 이곳에 더 많이 배치함으로써 해결할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., 1986, "Structural Shape Optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **57**, pp. 91~106.
- (2) Kwak, B. M., 1994, "A Review on Shape Optimal Design and Sensitivity Analysis," *Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering*, *JSCE*, **10**, pp. 1595~1745.
- (3) Choi, K. K. and Haug, E. J., 1983, "Shape Design Sensitivity Analysis of Elastic Structures," *Journal of Structural Mechanics*, **11**, pp. 231~269.
- (4) Choi, K. K. and Seong, H. G., 1986, "Domain Method for Shape Design Sensitivity Analysis of Built-up Structures," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **57**, pp. 1~15.
- (5) Hardee, E., Chang, K. H., Tu, J., Choi, K. K., Grindeanu, I., and Yu, X., 1999, "A CAD-Based Design Parameterization for Shape Optimization of Elastic Solids," *Advances in Engineering Software*, **30**, pp. 185~199.
- (6) Dems, K., 1987, "Sensitivity Analysis in Thermal Problems - II: Structure Shape Variation," *Journal of Thermal Stresses*, **10**, pp. 1~16.
- (7) Choi, J. H., 1987, *Shape Optimal Design Using Boundary Integral Equations*, Ph.D., Thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Seoul, Korea.
- (8) Ansys Inc, 2002, "ANSYS 6.1 User's Manual," PA, USA.
- (9) The MathWorks Inc, 2002, "MATLAB Release 6.5 User Guides," MA, USA.
- (10) VR&D Inc, 2003, "VisualDOC V3.1 How To Manual," CO, USA.
- (11) Méric, R. A., 1995, "Differential and Integral Sensitivity Formulations and Shape Optimization by BEM," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **15**, pp. 181~188.
- (12) Kirschner, I. N., Kring, D. C., Stokes, A. W., Fine, N. E., and Uhlman Jr, J. S., 1995, "Supercavitating Projectiles in Axisymmetric Subsonic Liquid Flows," *American Society of Mechanical Engineers, Fluids Engineering Division (Publication) FED*, **210**, pp. 75~93.
- (13) Logvinovich, G. V., 1972, *Hydrodynamics of Free-Boundary Flows*, Translated from Russian, Israel Program for Scientific Translations: Jerusalem.
- (14) Zolesio, J. P., 1981, "The Material Derivative (or Speed) Method for Shape Optimization," in Haug EJ and Cea J (eds.), *Optimization of Distributed Parameters Structures*, Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, pp. 1152~1194.