Commun. Korean Math. Soc. 19 (2004), No. 3, pp. 389–425

초청논문

그로모브-위튼 불변량과 그의 응용

조용승

요 약. 심프렉틱 다양체는 미분다양체와 케러다양체 사이에 있는 다양체로서 심프렉틱 구조를 갖는 다양체이다. 케러다양체의 성질들을 얼마나 확장할수 있는지, 미분다양체와 다른 성질은 무엇이 있는지 연구함은 흥미있는 일이다. 심프렉틱 구조로부터 준복소구조가 정의되어 2차원 부분다양체를 나타내는 슈도-호로모르픽 사상이 정의되고, 이들은 모듀라이 공간이 된다. 또한 심프렉틱 구조는 메트릭과 에너지를 정의하여 노비코프환을 정의한다. 여기서 모듀라이 공간의 위상구조가 그로모브-위튼 불변량을 정의한다. 이 불변량은 심프렉틱 다양체 연구에 핵심적인 역할을 한다. 이 논문은 그로모브-위튼 불변량의 여러 가지 성질과 그 응용에 대한 여러 학자들의 결과를 소개하는 해설 논문이다.

제 1 절 서론

[1.1] 심프렉틱 기하학은 심프렉틱 다양체의 대역적 성질을 연구하는 학문이다. Darboux의 정리에 의하면 심프렉틱 다양체의 국소구조는 모두 유크리트 공간의 표준심프렉틱구조와 동치이다. 따라서 심프렉틱 다양체의 국소적인 성질은 연구할 필요가 없다. 반면에 리만 기하학에서는 곡률이 국소적인 성질이다. 이 곡률은 동등한 자에는 불변이고 동등자의 군에 달여있으며 동등하지 않은 리만자는 무한차원의 다양체를 이룬다. 반면 심프렉틱 기하학에서는 심프렉틱 구조를 유지하는 미분위상동형은 무한차원의 군을 이루며 각 코호몰로지류 내에 대역적 비동치의 심프렉틱 구조는 불연속적이다.

심프렉틱 동치의 예는 헤밀톤 미분방정식에 의해 정해지며, 심프렉틱 구조는 고전역학에서부터 왔다. 심프렉틱 동치의 국소적 성질은 항

Received June 9, 2004.
2000 Mathematics Subject Classification: 57S17, 57R42, 58B15.
Key words and phrases: 그로모브-위튼 불변량, 모듀라이공간, 미니마리티, 퀀텀 코호몰로지, 허비츠수, 심프렉틱 합, 불변량의 합공식.
이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의해 연구되었음. (KRF-2002-070-C00010).

등사상 주위의 심프렉틱 동치의 행위이다. 예를 들면 심프렉틱 동치의 고정점의 존재성은 어떤 함수의 특이점 연구로부터 온다. 따라서 모세 이론에 기인한다. 심프렉틱 위상수학은 심프렉틱 다양체의 대역적 구조와 심프렉틱 동치의 행동을 연구하는 것이다. 이러한 연구는 표준 심프렉틱 구조를 갖는 유크리트 공간 뿐만 아니라 심프렉틱 다양체에서 중요한 연구이다.

전형적인 문제를 나열하면 다음과 같다.

1. 어떤 다양체가 심프렉틱 구조를 갖는지, 어떤 심프렉틱 불변량이 심프렉틱 다양체를 구별하는가?
2. 컴펙트 곡면상의 헤밀토니안 프로를 구별하는 특징이 있는지? 예를 들면, 주기괴적이 있는지?
3. 심프렉틱 동형사상이 고정점을 항시 갖는지?
4. 볼의 심프렉틱 상은 어떤 형태인지? 즉, 길죽한지 혹은 둥근지?
5. 심프렉틱 구조가 나타내는 2차원의 불변량은 기하학적 의미가 무엇인지?

1920년대에 동력계에서 포앙카레-버코프정리 : 에뉼러스에서 면적을 유지하면서 안과 밖의 경계를 바꾸는 사상은 적어도 2개의 고정점을 갖는다. 2차원에서는 심프렉틱 구조는 면적형식이다. 따라서 포아카레-버코프 정리는 심프렉틱 위상수학의 성질이다. 1965년에는 아놀드가 3번에 대한 정확한 가설을 세웠다. 1970년에 바인스타인이 볼록 초곡면에 주기궤적의 존재성을 밝혔다.

또한 1965년 모저는 컴팩트 다양체에 심프렉틱 구조의 안정성을 증명하였다. 즉, 컴펙트 다양체상에 심프렉틱 구조의 코호몰로거스 변형은 원래 구조와 미분위상동형이다. 이것은 심프렉틱 구조가 국소적으로 같다는 다브정리의 다른 형태라 할 수 있다. 따라서 심프렉틱 위상수학에서는 대역적 구조에 대하여 연구하여야 한다.

이후 바인스타인은 대역적 심프렉틱, 포아송 기하학에 관한 구조를 밝히는 논문을 발표하였다. 예를 들면, 라그랑지안 부분다양체는 근방을 갖는데 그 근방은 그 부부다양체의 코탄젠트 번들의 제로 섹션의 근방과 심프렉틱 동형이다.

1970년대 라비노비츠와 바인스타인에 의해 개발된 베러에이션 방법에 따라서 콘리와 전더는 1983년에 아놀드의 가설을 토러스 상에서 증명하였다. 1987년에는 비터보는 바인스타인의 콘탁트 구조를 갖는 곡면상에 주기 궤적에 관한 예측을 증명하였다. 호퍼는 에케란드와 젠더와 같이 연구하면서 커퍼시티에 관한 에케란드-호퍼 바리에이션 이론을 발전시켰으며, 호퍼 메트릭을 심프렉틱 동형사상들의 준상에서 정의하였다. 이는 유크리트 공간이나 코탄젠트번들 연구에 중요한 도구가 된다.

[1.2] 반면에 1960년대 말에 그로모브는 그간 베리에이션 방법과는 아주 다른 방법, 즉 호모토피 이론으로 심프렉틱 구조를 특징지울수 있음을 보였다. 그는 이를 유연성이라고 했으며 후에 엘리아세 버그는 이 유연성의 극한에 대하여 연구하였다. 또한 그로모브는 심프렉틱 다양체에 강(hard)과 유(soft)가 있음을 발견했다.

즉, 심프렉틱 동형사상의 군은 모든 미분위상동형사상의 군에서 c^∞-위상으로 닫혀 있으나, 부피를 유지하는 미분동형사상의 군에는 c^∞-조밀하다. 그로모브는 1985년에 심프렉틱 경직성을 나타내는 완전히 다른 방법을 발견했다. 그는 심프렉틱 구조에 관련된 의복소구조의 기하학적 성질을 이용한 타원적 방법을 개발하였다. 좀 더 자세히 설명해 보면, 심프렉틱 다양체 내에 복소곡면들의 모듀라이 공간을 연구하였다. 또한 심프렉틱 사상의 특성인 심프렉틱 볼의 상은 길거나 가늘수 없다는 비축약(non-squeezing) 정리를 증명하였다.

그는 유크리드 공간에 표준이 아닌 특이한 심프렉틱 구조를 구성하였다. 이 타원(elliptic) 방법은 양-밀즈 이론과도 밀접한 관계가 있다. 프로에(Floer)는 이 벙법으로 프로에 호몰로지를 개발하였다. 심프렉틱 측면에서 보면 프로에 호몰로지는 아놀드의 가설을 증명하는데 상요되었다. 또한 호포의 베리에이션 이론과 합하여 심프렉틱 호몰로지의 프로에-호퍼 이론을 탄생시켰다. 곰프(Gompf)는 파이버 합을 함으로서 새로운 심프렉틱 4차원 다양체를 만들었다. 도넬슨(Donaldson)은 여차원 2인 부분 심프렉틱 다양체의 존재성을 증명하였다. 크론하이머-므로우카는 합의 예측, 매장된 곡면의 최소 지수(genus)에 관한 증명을 하였다. 또한 타우베스는 심프렉틱 다양체에서 사이버그-위튼의 불변량과 다음에 설명할 그로모브-위튼 불변량이 같음을 증명하였다.

심프렉틱 다양체 연구의 새로운 장을 연 것은 심프렉틱 다양체의 슈도-복소 곡선에 관한 이론인데, 이는 심프렉틱 다양체의 대역적 구조를 연구하는데 주요 수단이 된다. 심프렉틱 다양체의 정수 계수의 2차원 호몰로지 류를 나타내는 슈도-복소커브는 모듀라이 공간을 이룬다. 이 공간으로부터 불변량을 구하기 위하여 컴팩트화한다. 이 때 마크 점이 등장하고 이에 따른 매김값 사상이 정의된다. 모듀라이 공간의 차원과 같은 차원의 코호몰로지류를 적분하면 우리는 그로모브-위튼의 불변량을 갖는다. 그로모브가 슈도-호로모르픽 커브를 모듀라이 공간에서 이용하여 불변량을 구성했으며 그 후 위튼이 마크점을 갖는 모듀라이 공간으로 일반화 하였다. 그 후 콘세비츠가 복소사영공간에서 주어진 호모로지류를 나타내는 복소곡선의 개수를 구하는 귀납적 방식을 구하였다. 로널(Lonel)과 파커는 심프렉틱 합을 이용하여 그로모브-위튼 불변량의 적공식을 구하였다.

이를 이용하여 리(Li)와 스팁시즈(Stipsicz)는 사차원 다양체에서 미니말 심프렉틱 다양체의 합도 다시 미니말임을 보였다. 또한 심프렉틱 절단을 이용하여 리(Li), 자오(Zhao)와 젱(Zheng)은 리만곡면의 리만곡

면에 의한 피복수, 즉 허비츠(Hurwitz) 수를 구하는 귀납공식을 구하였다. 우리는 다른 연구에서 이들의 연구를 확장할 것이다.

제2절에서는 스테이블 슈도-호로모르픽 사상, 모듀라이 공간과 그의 차원, 그리고 그로모브-위튼 불변량을 소개하였다. 제3절에서는 심프렉틱 합, 관계 그로모브-위튼 불변량, 관계 스테이블 슈도-호로모르픽 사상, 로넬-파커의 그로모브-위튼 불변량의 심프렉틱 합에 대한 공식을 소개하였다. 제4절에서는 모듀라이 공간의 코호몰로지, 킬의 정리, 로넬의 정리, 사차원 다양체의 미니말리티를 소개하였다. 제5절에서는 그로모브-위튼 불변량을 2차원 다양체의 응용으로 허비츠 수를 구하는 순환공식을 소개하였다. 제6절에서는 그로모브-위튼 불변량을 이용하여 통상의 컵 곱의 일반화인 퀀텀 곱을 정의하면, 이 퀀텀곱은 결합법칙(WDVV 등식)이 성립하고 프로베니우스 조건을 만족하고, 앞에서 언급한 노비코프 환에서 값을 갖은 작은 퀀텀코호몰로지가 정의되고 이는 프로베니우스 대수가 된다. 이에 대한 예로 복소사영공간, 깃발다양체와 그라스마니안 다양체의 퀀텀코호몰로지를 소개하였다. 또한 WDVV 등식의 응용으로 복소평면에서 2차 호몰로지를 나타내는 유리곡선의 숫자를 나타내는 순환공식을 소개하였다.

제 2 절 그로모브-위튼 불변량

[2.1] $2n$차원 매끄러운 다양체 M 의 심프렉틱 구조는 닫힌 비퇴화 2형식 ω이다. 여기서 비퇴화는 ω^n이 모든 곳에서 0이 아님을 의미한다. 이미 언급한 다브 정리에 의하면 모든 심프렉틱 형식은 국소적으로 유크리트 공간 $\mathbb{R}^{2n}$의 심플렉틱 형식 $\omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$과 미분위상동형사상에 의하여 같다. 따라서 심프렉틱 다양체의 광역적 구조에 대하여 연구하여야 한다. 유크리트 공간과 코탄젠트 번들에서는 베리에이션 방법을 사용하여 많은 결과를 얻었다. 그러나 심프렉틱 다양체에서 가장 광범위하게 사용된 방법은 슈도-복소곡선을 사용한 방법이다. 다양체 M 상의 복소구조 J는 M의 접벡터 다발 TM의 자기동형으로서 $J^2 = -I$을 만족한다.

심프렉틱 형식 ω가 의복소구조 J를 지배한다(tame)는 것은 $\omega(v, Jv) > 0$ 을 의미한다. 여기서 $v \in TM$ 은 0이 아닌 접벡터이다. 기하학적으로 ω가 복소선 $\{v, Jv\} \in TM$ 상에서 양임을 의미한다. 심프렉틱 구조 ω에 의하여 지배된 의복소구조의 집합 $J_\tau(M,\omega)$은 공집합이 아니며, 축약 집합이다. 따라서 $J_\tau(M,\omega)$은 선연결 공간이며, $J_\tau(M,\omega)$의 어떤 의복소구조도 동형인 복소벡터다발이며, 이 번들의 천류는 $J_\tau(M,\omega)$의 복소구조 선택에 의존하지 않는다.

2차원 호몰로지 $A \in H_2(M,\mathbb{Z})$를 나타내는 구 S에 대하여,

$$c_1(TM)(A) = c_1(TM|_S)$$

는 $c_1(TM)$을 S상에 제한한 것과 같으며, 2차원 구 상의 복소벡터다발은 복소선다발로 분해가 된다.

특히, M이 사차원 다양체일 때,

$$c_1(TM|_S) = c_1(TS) + c_1(N) = \chi(S) + S \cdot S = 2 + S \cdot S$$

는 S의 오일러지수와 S의 자기 교차수의 합이 된다.

의복소다양체상의 매끄러운 함수 $\phi : (M_1, J_1) \to (M_2, J_2)$가 (J_1, J_2)-호로모르픽은 각 점 $x \in M_1$에서 도함수

$$d\phi_x : T_x M_1 \to T_{\phi(x)} M_2$$

가 복소선형사상일 때를 의미한다. 즉,

$$d\phi_x \circ J_1 = J_2 \circ d\phi_x.$$

유크리드 복소공간에서는 이 등식은 코시-리만 방정식이다.

만일 의복소구조 J_1이 복소다양체 M으로부터 유도되었다면, 이 의복소구조 J_1을 적분가능이라 한다. 다시 말하면, M 의 각 좌표계 ϕ : $(M, J_1) \to (\mathbb{C}^n, i)$가 (J_1, i)-호로모르픽 일 때, J_1은 적분가능이다. 만일 좌표변환이 $\mathbb{C}^n$ 상에서 호로모르픽일 때, M은 n차원 복소다양체라 한다. 특히 M이 2차원일 때, M상의 모든 의복소구조는 적분가능이다. 이 성질은 고차원에서는 성립하지 않는다.

유크리드 공간 $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$의 표준 심프렉틱 구조 ω_0는 표준 의복소구조 J_0를 지배한다. 즉, 임의의 점 $x \in \mathbb{R}^{2n}$에 대하여

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n}),$$
$$\omega_0 = dx_1 \wedge dx_2 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n},$$
$$T_x\mathbb{R}^{2n} =< \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{2n-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{2n}} >,$$
$$J_0(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}) = \frac{\partial}{\partial x_{2j}}, \quad J_0(\frac{\partial}{\partial x_{2j}}) = -\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}$$

이고,

$$\omega_0(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}, J_0\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}) = \omega_0(\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}, \frac{\partial}{\partial x_{2j}}) = 1,$$
$$\omega_0(\frac{\partial}{\partial x_{2j}}, J_0\frac{\partial}{\partial x_{2j}}) = \omega_0(\frac{\partial}{\partial x_{2j}}, -\frac{\partial}{\partial x_{2j-1}}) = 1$$

$j = 1, 2, \cdots, n$ 이다.

[2.2] 지너스 g인 리만곡면 (Σ, j)에서 의복소다양체 (M, J)로 가는 (j, J)-호로모르픽 사상 $u : \Sigma \to M$을 J-호로모르픽 사상이라 한다. 만일 u가 매장이면, u의 상 C는 2차원 부분다양체이며 접다발 TC는 J-불변이다. 만일 M의 심프렉틱 형식 ω가 J를 지배하면, ω는 TC상에서 양이므로 C는 M의 심프렉틱 부분다양체이다. 역으로 M의 2차원 심프

렉틱 부분다양체에는 ω가 지배하는 의복소구조 J이 존재하여 접다발 TC가 J-불변하게 할 수 있다.

2차원 호몰로지 $A \in H_2(M,\mathbb{Z})$, 일반적인 의복소구조 $J_\tau(M,\omega)$에 대하여 A를 나타내는 모든 J-호로모르픽 커브의 집합을 $\mathcal{M}_g(M,A,J)$로 나태내고, 모듀라이 공간이라 부른다. 모듀라이 공간 $\mathcal{M}_g(M,A,J)$는 유한차원의 다양체이나 컴팩트는 아니다. 우선 모듀라이 공간 $\mathcal{M}_g(M,A,$ $J)$ 의 차원을 구해보자.

$\text{Map}(\Sigma,M,A)$를 호모로지 $A \in H_2(M,\mathbb{Z})$를 나타내는 모든 매끄러운 사상 $u:\Sigma \to M$의 집합이라 하자. 여기서 Σ는 고정된 지너스 g를 갖는 리만곡면이다. 이때, $\text{Map}(\Sigma,M,A)$는 무한차원 다양체이며 한 점 u에서 접공간 $T_u\text{Map}(\Sigma,M,A) = c^\infty(u^*TM)$은 u를 따라 움직이는 매끄러운 벡터장 $\xi(z) \in T_{u(z)}M$들의 공간이다.

u에서 파이버(fiber)가 u^*TM에서 값을 갖는 매끄러운 J-비복소-선형(J-anti-linear) 1형식들의 공간 $E_u = \Omega^{0,1}(u^*TM)$인 무한차원 벡터속 $E \to \text{Map}(\Sigma,M,A)$를 생각하자.

du의 비복소- 선형 부분은 이 벡터 속의 단면

$$\overline{\partial_J} : \text{Map}(\Sigma,M,A) \to E$$

라 정의 한다.

모듀라이 공간 $\mathcal{M}_g(M,A,J) = \overline{\partial_J}^{-1}(0)$은 주어진 호몰로지 류 $A \in H_2(M,\mathbb{Z})$를 나타내는 모든 단순(simple) J-복소해석적 곡선들의 공간이다. 만일 $\overline{\partial_J}$가 0-단면에 대해 횡단(transversal)이면 모듀라이 공간 $\mathcal{M}_g(M,A,J)$는 다양체이다.

선형화된 연산자

$$D_u \equiv D\overline{\partial_J}(u) : \Omega^0(u^*TM) \to \Omega^{0,1}(u^*TM)$$

는 모든 $u \in \mathcal{M}_g(M,A)$에 대해 전사(surjective)라 하자.

D_u는 타원적(elliptic) 1차 부분 미분연산자이고 프레드홀름(Fredholm)이다.

리만-로크(Riemann-Roch) 정리에 의해 모듀라이 공간 $\mathcal{M}(M,A)$의 차원은

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{M}_g(M,A) &= \text{Index}(D\overline{\partial_J}(u)) + (\Sigma\text{의 복소구조들의 차원}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}X(2-2g) + 2c_1(u^*TX) + (6g-6)\end{aligned}$$

이며, 또한 $\mathcal{M}_g(M,A)$는 표준방향을 갖는다.

만일 X가 사차원 심프렉틱 다양체이면, 일반적으로 의복소구조 J를 잡으면 모듀라이 공간 $\mathcal{M}_g(M,A)$는 차원이

$$d = -c_1(K)\cdot\Sigma + \Sigma\cdot\Sigma$$

인 매끄러운 다양체이다.

[2.3] 모듀라이 공간은 일반적으로 컴펙트가 아니다. 불변량을 정의하기 위해서는 컴펙트화 해야한다. 정의역을 매끄러운 리만 곡면에서 특이점으로 연결된 리만곡면 C으로 지너스 g를 갖고, n개의 마크점 $(x_1, \cdots, x_n)$이 매끄러운 면에 있다고 하자. 안정사상 $f : (C : x_1, \cdots, x_n) \to M$ 은 다음 조건을 만족함을 의미한다.

(a) $(C : x_1, \cdots, x_n)$은 연결된 특이점을 갖는 곡면이며, $n \geq 0$개의 서로 다른 매끄러운 점이며, 특이점은 이중특이점이다.

(b) 각 사상 $f : C \to M$ 은 자명한 (0) 무한소 자기동형사상을 갖는다. 다시 말하면 C의 지너스 0인 성분상에서 f가 상수사상이면 그 성분상에는 적어도 3개의 마크점 혹은 특이점을 갖고, C의 저너스 1인 성분에서 f가 상수사상이면 그 성분에는 적어도 1개 이상의 마크점이나 특이점을 가져야 한다.

2차원 호몰로지 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$에 대하여, 지너스 g를 갖고 n개의 마크점을 갖는 곡면에서 M으로 가는 A를 나타내는 안정사상들의 집합을 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A)$로 나타내고 이를 그로모브-위튼의 모듀라이 공간이라 부른다.

정리 2.1. *그로모브-위튼 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A)$는 컴펙트이며 $2c_1(TM)[A] + (2-2g)\mathrm{dim}_{\mathbb{C}}M + (6g-6) + 2n$ 차원을 갖는 V-다양체이다.*

이제 그로모브-위튼 불변량을 정의할 수 있는 준비가 됐다. 값매김 함수의 정의는

$$e_n : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A) \to M^n$$
$$e_n([f, C : x_1, \cdots, x_n]) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$$

로 주어진다.

이 때, 호몰로지와 코호몰로지에 유도된 함수는

$$e_{n*} : H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A)) \to H_*(M^n),$$
$$e_n^* : H^*(M^n) = \otimes^n H^*(M) \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A))$$

이고, 만일

$$\mathrm{dim}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A) + \mathrm{dim}(B) = n \cdot \mathrm{dim}M$$

혹은

$$\mathrm{dim}\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A) + = -\mathrm{dim}(B) + n \cdot \mathrm{dim}M = \mathrm{dim}PD(B),$$

여기서 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in H^*(M^n)$, $B = (B_1, \cdots, B_n) \in H_*(M^n)$ 이면 그로모브- 위튼 불변량은

$$\begin{aligned}\Phi_{A,n}(\beta) &= \textstyle\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M,A)} \beta = (\mathrm{Im} e_{n*}) \cdot B \\ &= \sharp\{u \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(M, A) \mid u(i) \in B_i, i = 1, \cdots, n\}\end{aligned}$$

로 정의된다.

제 3 절 심프렉틱 합

[3.1] 그로모브-위튼 불변량은 심프렉틱다양체의 2차원 호몰로지의 호로모르픽 곡선의 수를 세는 것이다. 그로모브-위튼 불변량을 구하기 위해서 로넬(Lonel)과 파커(Parker)는 심프렉틱 다양체를 둘로 나눈 심프렉틱 합의 각 성분에서 여차원 2인 심프렉틱 부분 다양체 관계 그로모브-위튼 불변량 (Relative Gromove-Witten invariant)를 구하여 합의 공식을 구하였다. 이 합공식은 불변량 계산을 용이하게 했을 뿐만아니라 여러가지 성질을 발견하게하였다.

2차원 호로모르픽 커브의 정의역이 분리될 때마다 모듀라이공간에서 여차원이 2만큼 증가하는 경계가 나타나고 이들은 모듀라이공간의 호몰로지와 그들의 관계를 나타낸다. 반면에 치역 심프렉틱 다양체를 분리, 즉 심프렉틱 합으로 나타낼 때를 생각해보자.

두 심프렉틱 다양체 X 와 Y 에 여차원 2인 심플렉틱 다양체 V 가 매장되어 있으며, 그의 법다발 $N_X(V)$ 의 $N_Y(V)$ 가 반대 부호의 천(오일러)류를 갖는다고 하자. 그러면 V 를 동일시하고, 비복소-선형(anti-linear) 사상에 의하여 심프렉틱 합 $X\#_V Y$ 이 정해진다.

(X,ω)는 심프렉틱 다양체이며 V를 여차원이 2인 심프렉틱 부분 다양체라 하자. V에 관계 그로모브-위튼 불변량 (relative Gromov-Written invariant) 를 구성하자. 이 불변량은 심프렉틱 합공식을 유도하는데 사용할 것이다. 여기서의 복소구조와 코시-리만 방정식을 변형 할 때 V 에서 잘 매치되도록 구성하여야 한다. V 가 심프렉틱 다양체이므로 V 상의 슈도-호로모르픽 사상 $f: C \to V$은 X 상에서도 슈도-호로모르픽 사상이다. 어떤 안정된 호로모르픽 사상이 한 성분이 V 상으로 들어간다면 이 사상은 V 를 횡단하지 못한다. 더욱 난처한 일은 이런 사상의 모듀라이 공간이 전체 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,A)$ 보다 큰 차원을 가질 수 있다. 따라서 우리는 슈도-호로모르픽 사상의 어떤 성분도 V 에 완전히 속하지 않은 안정사상으로 제한한다. 이런 사상을 V -정규 사상이라 한다. V -정규 사상은 V 와 유한번 횡단한다. V -정규 사상들의 공간을 벡터 $s = (s_1, \cdots, s_l)$ 로 구분할 수 있다. 여기서 l은 V-정규 사상과 V 가 만나는 점의 숫자이고, s_k 는 k 번 째 만나는 점의 중복도(차수)이다.

V-정규 안정 슈도-호로모르픽 사상들의 모듀라이공간을 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,V;A)$ 로 나타내면, 이 모듀라이공간은 차원이 g, n, A, 그리고 벡터 s 에 의하여 결정되는 오비폴드(orbifold) 이다. 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,V;,A)$ 은 호몰로지류를 나타내는 컴팩트 공간이다. 앞에서 그로모브-위튼 불변량을 정의 할 때와 같이 값매김 사상이 자연스럽게 정의 된다. 값매김 사상은

$$(\pi, e_n, e_l) : \overline{\mathcal{M}}_{g,n,l}(X,V;,A) \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n+l} \times X^n \times V^l$$

$$\begin{aligned}([f,C,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l]) &\to ([C,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_l],\\ &(f(x_1),\cdots,f(x_n)),(f(y_1),\cdots,f(y_l)))\end{aligned}$$

코호몰로지 준동형사상

$$e_n^*: H^*(M^n) \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n,s}(M,V;A)),$$
$$e_l^*: H^*(V^l) \to H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n,s}(M,V;A)),$$

를 유도하고 이는 관계 그로모브-위튼 불변량을

$$\Phi_{g,n}^{X,V,A}(\alpha,\beta) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n,s}(X,V;,A)} e_n^*(\alpha) \cup e_l^*(\beta)$$

여기서 $\alpha \in H^*(X^n), \beta \in H^*(X^n)$이며

$$\begin{aligned}\deg\alpha + \deg\beta &= \dim\overline{\mathcal{M}}_{g,n,s}(M,V;A)\\ &= 2c_1(A) + (2-2g)\dim_{\mathbb{C}}X\\ &\quad +(6g-6)+2(n+l)-2V\cdot A\end{aligned}$$

이외는 0으로 정의한다.

따라서 관계 그로모브-위튼 불변량은 정의역의 복소구조, 마크점, V와 교차 조건을 고려한 V-안정사상의 수를 세는 것이다. 보다 복잡한 일은 심프렉틱 합공식에 이용하기 위해서는 X 보다는 $X \setminus V$ 내의 곡면을 나타내는 호몰로지류여야 하며, V와 얽힐 때 호몰로지데이터를 잘 유지하여야한다.

[3.2] 대수기하에서 다루듯이 심프렉틱 합을 다루는데 단독으로 다루기 보다는 2차원 디스크의 점을 매개변수 $\lambda \in D$ 로 하는 심프렉틱 합의 족 $Z \to D$ 으로 생각하는 것이 더욱 유용하다. $\lambda \neq 0$ 일 때는 파이버 Z_λ 는 심프렉틱으로 합 $X\#_V Y$ 와 같고, 중심 파이버 Z_0 는 특이 다양체 $X \cup_V Y$ 이다.

V의 근방에서 Z 는 $N_xV \oplus N_yV$ 와 같고, 파이버 Z_λ 는 방정식 $xy=\lambda$ 로 정의 된다. 여기서 x 와 y 는 법다발 N_xV 와 $N_yV=(N_xV)^*$의 좌표이다. 그로모브 위튼 불변량의 합공식을 유도하기 위하여 λ 가 0 으로 감에 따라 Z_λ 내의 슈도-호로모르픽 곡선을 Z_0 의 슈도-호로모르픽 곡선으로 넣는 일이다. 이 때 안정 슈도-호로모르픽 사상은 중앙 V 에서 매치가 되고, 양편 X 와 Y상의 슈도-호로모르픽 곡선의 쌍이 생긴다. 만일 극한 사상 $f_0: C_0 \to Z_0$ 가 V 에서 성분을 갖지 않으면 f_0는 V 에서 X 와 Y 양편에서 교차점을 갖는다. 이와 같은 극한 사상 f_0 에 대하여 V와 교차점은 C_0 의 노드점이다.

이 노드점에 순서를 매기면 V 와의 중복으로 만나는 벡터 $s=(s_1,\cdots,s_l)$ 를 얻는다. 일반적으로 줄어드는 과정이 단사가 아니다. 만일 $\lambda \neq 0$ 을 고정하면, $|s| = s_1 \cdots s_l$ 개의 Z_λ 에서 안정사상들이 극한에서 f_0 가 된다. 더욱이 Z_λ 에서는 연결곡선이 극한 Z_0 에서 X와 Y에 제한하면 연결되지 않은 곡선이 생길 수 있다. 이런 의미에서 그로

모브- 위튼 불변량은 안정된 연결 곡선을 세는 것이므로 합의 공식에 적합하지 않고, 정의역이 연결될 필요가 없는 그로모브-타우베스 (GT: Gromov-Taubes) 불변량을 사용해야한다.

따라서 우리는 합에 대한 일반적인 형태

$$GT_{X\sharp_V Y} = GT_X^V * GT_Y^V$$

를 구하고 싶다. 여기서 $*$는 X 에서 곡선과 Y는 에서 곡선을 잘 매치하고, 이것은 Z_λ 에서 곡선으로 간주되어야 된다. 여기에 맞나는 점에서 중복도를 나타내는 S 와 호몰로지류를 잘 조합되야한다. 관계 불변량에서는 V 에 포함되는 성분이 없으므로 위의 왼편에서도 제외 되어야 한다. 그러나 극한사상에서 한 성분이상이 V내로 포함될 수 있다. 따라서 위 식의 오른편에 V에 대한 여분의 데이터를 고려해야 한다. 이 V 에 대한 데이터를 S_V - 행렬이라하고, 이는 안정사상이 극한사상으로 갈 때 지너스, 호몰로지류, V 와의 교차점의 변화를 추적하는 것이다. 이런 양들은 극한 (neck) 으로 갈때 급속히 변한다. 이런 과정에서 Z_λ 에서 GT- 불변량에 공헌하는 안정사상은 $\lambda \to 0$ 에 따라 V 내로 완전히 들어가는 정의역의 성분이 생긴다. 물론 이런 사상은 V-정규는 아니다. 따라서 X와 Y에 대한 V-관계 불변량에 들어가지는 못한다. 이와 같은 것을 고려하여 다음 정리를 얻는다.

정리 3.1 (Lonel. Parker). *Z를 (X,V) 와 (Y,V) 의 심플렉틱 합이라 하고, Z에서 호몰로지 α 가 X 에서는 α_X, Y 에서는 α_Y라 하자. 그러면 Z 에서 GT-불변량은 (X,V) 와 (Y,V) 의 관계 GT-불변량으로 나타낸다.*

즉,

$$GT_Z(\alpha) = GT_X^V(\alpha_X) * S_V * GT_Y^V(\alpha_Y)$$

여기서 $*$는 콘보류션 작용소이다.

주의: 이 심프렉틱 합에 대한 공식은 여러가지 응용이있다. Li 와 Ruan 도 합에 관한 공식을 얻었다. Eliashberg, Givental 과 Hofer 는 접촉(contact) 경계를 따라 붙인 심프렉틱 다양체의 불변량을 구성하였다.

제 4 절 그로모브-위튼 불변량의 응용

[4.1] 모듈라이 공간의 코호몰로지

지너스 g 이며, n 개의 마크점을 갖은 곡선 $(\Sigma; x_1, \cdots, x_l)$ 이 안정이란 것은 $2g-2+n>0$을 의미한다. 미분위상동형인 이와 같은 곡선의 집합 $\mathcal{M}_{g,n}$ 을 모듈라이 공간이라한다. 이 안정조건이 미분위상동형들의 군이 유한군으로 작용한다. 따라서 $\mathcal{M}_{g,n}$ 은 오비폴드 구조를 갖는다. Deligen-Mumford 컴팩트화 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 는 사영다양체구조를 갖고, 그의 원소를 안정곡선이라 한다. 이런 안정곡선은 매끄러운 안정성분들이 d

개의 노드점과 n개의 마크점을 갖는 연결합이다. 그의 오일러 지표는 $\chi = 2-2g+d$ 이며, 컴팩트 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 도 오비폴드이다. 따라서, 유리 계수 코호몰로지와 호몰로지에서 포앙카레 쌍대가 성립한다. 컴팩트 모듀라이 공간 사이에 자연스런 사상들이 있다.

즉, 투시사상 $\pi_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 은 i -번째 마크점 x_i 를 잊어버리는 사상이며, 경계를 부치는 사상 $\coprod_i \overline{\mathcal{M}}_{g_i,n_i} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, 분리사상 $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g_1+g_2,n_1+n_2}$은 $x^1_{n_1+1} = x^2_1$ 으로 마크점을 동일시 함으로 얻어진다.

다음은 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 의 코호몰로지 $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ 에 대하여 알아보자.

각 $i = 1, \cdots, n$ 에 대하여 $L_i \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 을 안정곡선 $(C, \cdot, x_1, \cdots, x_l)$ 의 i-번째 마크점 x_i의 코탄젠트라인을 파이버로 하는 복소라인 번들이라하자.

그의 첫번째 천류 $c_1(L_i)$ 를 descendant 류라 한다. 이 descendant 류 $c_1(L_1), \cdots, c_1(L_n)$ 와 곱에 의하여 정해지는 $k_0, k_1, \cdots, ; k_a = (\pi_{n+1})_*(c_1 (L_{n+1})^{a+1}), a \geq\ 0$ tautological 류라한다. 여기서 π_* 는 포앙카레쌍대에 의하여 정의 되는 밀음(push forward)사상이다. 경계층 (boundary stratum) 의 포앙카레쌍대를 경계류라 한다. 이 세 종류의 코호몰로지류는 모두 대수적이고, 짝수차원이다.

특히, $g = 0$인 경우, $S = S_1 \cup S_2$ 를 $1, \cdots, n$ 의 2개 이상을 갖는 분할이라하자. 이 분할 S에 의하여 생기는 경계류를 D_s라 하고, $i, j \in S_1$, $k, l \in S_2$ 일 때 기호 i, j, s, k, l 로 분할 S 를 나타내자.

정리 4.1 (Keel). *코호몰로지 $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ 은 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ 의 경계류 D_s 에 의하여 생성되며, 다음과 같은 관계가 있다.*

$$\sum_{i,j,s,k,l} D_s = \sum_{i,j,s,k,l} D_t,$$
$$D_s D_t = 0 \qquad \text{만일 } S_i \bigcap T_j \neq \varnothing \text{이고 서로소이면,}$$

가장 간단한 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} = S^2$ 에서 $c_1(L_1) = c_1(L_2) = c_1(L_3) = c_1(L_4) = D_S$ 는 점의 포앙카레 쌍대이다. 지너스 $g = 0$ 인 경우는 Keel 에 의하여 코호몰로지가 정해 졌지만, $g > 0$ 일 때는 아직 완전히 해결되지 않았다.

즉, 지너스가 0인 곡선들의 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ 의 코호몰로지는 Keel이 구했지만, 지너스가 $g > 0$ 일때, 모듀라이 공간 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 의 코호몰로지는 부분적으로 알려져 있다.

다음은 Lonel의 결과를 소개하고자 한다. 지너스 g 의 커브에서 S^2 로 가는 홀로모르픽 사상들의 모듀라이 공간

$$Y_d, g, n = \{u : (\Sigma g; , x_1, \cdots, x_n) \to (S^2, y_1, \cdots, y_r) : \deg(u) = d\}.$$

여기서 S^2 의 r 개의 마크점 $y_a, \cdots, y_r$ 은 여 2차 심프렉틱 부분 공간으로 생각하고, u는 고정된 분지 (ramification) 형을 갖는다. $y_a, \cdots, y_r$ -관계 안정 홀로모르픽 사상을 더 함으로써 컴팩트 모듀라이 공간 $\overline{Y}_{d,g,n}$ 을 갖고, 이 공간은 층공간 (orbispace) 의 구조를 갖는다. 또한 자연스러운 투사사상 $\pi_1 : \overline{Y}_{d,g,u} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 과 $\pi_2 : \overline{Y}_{d,g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{0,r}$ 즉, 정의역으로 투사사상과 치역으로 투사사상이 있다.

정리 4.2 (Lonel). *지너스 $g > 0$일 때 $H^*(\mathcal{M}_{g,n}; Q)$에서 descendant류 혹은 tautological류를 g개 이상 곱하면 0이 된다. 증명은 Keel의 정리에 의하여 $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}$ 에서 코호몰로지 사이 관계를 알고 있다. 이 관계를 π_2^* 에 의하여 $\overline{Y}_{d,g,n}$ 의 코호몰로지로 가져와서 다시 π_1^* 에 의하여 $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 의 코호몰로지로 밀어 내리면 바라는 관계를 얻는다.*

[4.2] 4차원 다양체의 미니말리티

다음은 사차원 레이셔날도 룰리드도 아닌 미니말 심프렉틱 다양체의 정규 연결합은 다시 미니말 심프렉틱 다양체가 됨을 그로모브-위튼 불변량의 심프렉틱 합 공식을 사용하여 보이고자 한다.

(M_1, ω_1) 와 (M_2, ω_2) 는 심프렉틱 4차원 다양체이고, $Z_1 \subset M_1$ 와 $Z_2 \subset M_2$ 를 2차원 심플렉틱 부분다양체이며, $Z_1 \cdot Z_1 = -Z_2 \cdot Z_2$, Z_1과 Z_2의 자기 교차수가 반대부호라 하자. $N(Z_i)$ 를 Z_i 의 튜브형의 근방이라 하고, φ 는 미분동형사상 $Z_1 \to Z_2$ 의 $N(Z_i)$ 로 부터 얻어지는 S^1 -번들 상에서 방향을 역으로 하는 미분위상동형사상이라하자.

$M = (M_1 \backslash N(Z_1)) \cup_\varphi (M_2 \backslash N(Z_2))$ 는 심프렉틱 사차원 다양체로서 심프렉틱 구조는 ω_1 과 ω_2 로부터 얻어진다. 이것은 Gompf 와 McCarthy-Wolfson 이 구성하였다.

매끄러운 4차원 다양체가 미니말(minimal)이란 자기교차수가 1인 매끄러운 2차원 구가 다양체에 매장되어 있지 않음을 의미한다. 다양체의 위상수학을 연구하는데 미니말인지 아닌지 아는 것은 중요하다. 심프렉틱 사차원 다양체가 레이셔날이거나 혹은 룰리드가 아니면 이 다양체에 매장된 구의 자기 교차수는 2보다 작거나 같다.

다음은 우리가 사용하기에 편리하도록 사차원 다양체에서 지너스가 0인 그로모브-위튼 불변량을 소개하자.

닿힌 4차원 다양체 M이 심프렉틱 구조 ω 를 갖고, Z는 양의 지너스를 갖는 M 의 심프렉틱 부분다양체라 하자. 이 복소구조 J 가 ω 와 조화되고(compatible) Z 가 J -호로모르픽 이라 하자. Z 가 양의 지너스를 갖음으로 J -호로모르픽 사상 $S^2 \to Z$ 는 상수함수뿐이다.

따라서 호몰로지류 $A \in H_2(M, Z)$ 에 대하여 지너스 0의 Z -관계 그로모브-위튼 불변량 $\psi_A{}^{(M,Z)}$ 는 정해진 유한점에서 Z와 접촉을 갖는 A를 나타내는 지너스 0의 안정된 J -호로모르픽 곡선의 개수를 세는 것이다. 정확한 $\psi_A{}^{(M,Z)}$ 의 정의를 하기 위해서 v 개의 양의 정수의 집합 $K = (k_1, \cdots, k_v)$ 를 고정하자. 마크점 $y_1, \cdots, y_v \in S^2$ 이라 하자.

모듈라이 공간

$$\mathcal{M}_A^{M,Z}(K) = \{f : (S^2; y_1, \cdots, y_v) \to (M, Z)\},$$

f 는 J-호로모르픽이고, $[f(S^2)] = A$, f 가 $y_1, \cdots, y_v$ 에서 Z 와 접하고, 그의 차수를 $k_1, \cdots, k_v$ 라하자.

$y = (y_1, \cdots, y_v)$라 하고, $\deg K = \sum_{i=1}^{v} k_j$ $(= A \cdot Z \geq 0)$ 라 하자.

모듀라이 공간 $\mathcal{M}_A^{M,Z}(K)$ 에 Z-관계 안정 J-호로모르픽 사상을 더하므로 컴팩트화 $\overline{\mathcal{M}}_A^{M,Z}(K)$ 를 갖고, 기본류 $[\overline{\mathcal{M}}_A^{M,Z}(K)]$ 가 된다.

컴팩트화 모듀라이공간은 v 개의 값매김 사상

$$e_i : \overline{\mathcal{M}}_A^{M,Z}(K) \to Z,\ i = 1, \cdots, v$$

$$e_i[(f, S^2, y, K)] = f(y_i)$$

를 유도한다.

리만-아티야-싱어 지표정리에 의하면 모듀라이공간의 차원은

$$\dim\mathcal{M}_A^{M,Z}(K) = 2c_1(TM) \cdot A + 2v - 2A \cdot Z - 2$$

으로 주어진다. z-관계 그로모브-위튼 불변량은 값매김 사상 e_i 에 의하여 Z 상의 코호몰로지를 모듀라이 공간으로 가져와 적분함으로써 얻어진다.

지너스 0 Z-관계 그로모브-위튼 불변량은 사상

$$\psi_A^{M,Z} : \oplus_{v=1}^{\infty} H_2(Z, \mathbb{Z})^v \otimes \mathbb{Z}^v \to \mathbb{Z}$$

$$(\beta, K) = (\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_v, (k_1, \cdots, k_v) \mapsto$$

$$\psi_A^{M,Z}(\beta, k) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_A^{M,Z}(K)} \cup_{i=1}^{v} e_i^* \beta_i$$

만일

$$\deg\beta = \dim\overline{\mathcal{M}}_A^{M,Z}(K)$$

이면, 그렇지 않으면 0으로 정의 된다.

심프렉틱 구조 ω 에 조화되는 의복소구조는 패스로 연결되어 코보디즘에 의하여 관계 그로모브-위튼 불변량은 의복소구조에 독립이며, 심프렉틱 다양체 (M, Z) 의 불변량이다. 보다 일반적인 Z-관계 그로모브-위튼 불변량은 M 상의 코호몰로지까지 확장하여 정의 된다. 써클 번들 $N \to Z$ 는 M 을 M_1 과 M_2 두 분야로 나눈다. 만일 파이버 써클을 한 점으로 수축하면 우리는 특이공간 $M_1 \cup_Z M_2$ 라 하면, 수축함수 준동형사상 $\pi : M \to M_1 \cup_Z M_2$의 호몰로지 $\pi_* : H_2(M) \to H_2(M_1 \cup_Z M_2)$ 의 $\ker(\Pi_*)$ 은 $\eta \times \lambda$ 형으로 생성된다. 여기서 η 는 λ 상의 곡선이고, λ는 써클 번들 $N \to Z$ 의 파이버이다. $\eta \times \lambda$ 형의 토러스는 $\omega(\eta \times \lambda) = 0$ 이므로 라그랑지안 (Lagangian) 이며, 자기 교차수 $(\eta \times \lambda)^2 = 0$ 이다.

호몰로지류 $A \in H_2(M,\mathbb{Z})$에 대하여 $< A >= \{A + e \mid e \in \ker(\pi_*)\}$,

$$\Psi^{M,Z}_{<A>} = \sum_{B \in <A>} \Psi^{M,Z}_{<B>}$$

라 하자.

정리 4.3. *심프렉틱 4차원 다양체 (X,ω)가 미니말, 레이션날 혹은 룰리드가 아니고, U를 X의 심프렉틱 부분다양체라 하자. 그러면 모든 U-관계 지너스 0 그로모브-위튼 불변량 $\Psi^{X,U}_{<c>}(\beta, K)$ 는 0이다.*

증명. 호몰로지 $C \in H_2(M,\mathbb{Z})$가 J-홀로모르픽 구를 나타낸다고 하자. $c_1(TX) \cdot C \leq 0$ 임을 증명하자. 그러면 모듀라이 공간의 차원

$$\dim \mathcal{M}^{X,U}_A(K) = 2c_1(TX) \cdot C + 2v - 2A \cdot Z - 2 \leq -2$$

은 음수이다. 일반적인 의복소구조 J에 대하여 모듀라이 공간은 공집합이고, U-관계 지너스 0 그로모브-위튼 불변량 $\Psi^{X,U}_{<C>}(\beta, K)$는 0이다. J를 변형하여 C를 나타내는 J-호로모르픽 구는 l개의 더블 점을 갖었다고 하자. 그러면 첨부(adjunction) 공식은

$$c_1(TX) \cdot C = 2 - 2l + C \cdot C \leq 2 + C \cdot C$$

가 된다. X가 레이션날도 룰리드도 아님으로 $C \cdot C < 0$ 이고, X가 미니말이므로 $C \cdot C \leq -2$이고, $c_1(TX) \cdot C \leq 0$이 된다.

따라서 모든 U-관계 지너스 0 그로모브-위튼 불변량 $\Psi^{X,U}_C(\beta, K)$는 0이다. □

만일 C 가 지너스 g 를 갖고 l 개의 더불점을 갖었다면 모듀라이 공간의 차원이 $\frac{1}{2}(1 + C \cdot C - 2g) < l$ 이면 음수가 되어서 U 관계 지너스 g 그로모브-위튼 불변량 $\Psi^{X,U}_C(\beta, K)$ 는 항상 0이 된다.

심프렉틱 합공식에 따르면 M의 지너스 0 그로모브-위튼 불변량 $\psi^M_{<A>}$는 (M_1, Z_1) 과 (M_2, Z_2) 의 지너스 0 Z-관계 그로모브-위튼 불변량에 의하여 정해진다. 만일 호몰로지 $A \in H_2(M)$ 이 $M_i - Z_i, (i = 1, 2)$ 의 슈도-호로모르픽 구로 나타낼수 없다면, 불변량

$$\Psi^M_A(\beta) = \sum_{A = A1 + A2, \beta = \beta_1 + \beta_2} \Psi^{M_1,Z_1}_{A_1}(\beta_1, k_1) \cdot \Psi^{M_2,Z_2}_{A_2}(\beta_2, k_2)$$

$$\deg k_1 = \deg k_2 = A_1 \cdot Z_1 = A_2 \cdot Z_2$$

은 관계 불변량의 곱의 합으로 나타낸다.

따라서 불변량 Ψ^M_A 가 0이 아니고, A 가 $M_i - Z_i, (i = 1, 2)$ 의 슈도-호로모르픽 구로 나타지 않으면, (M_1, Z_1) 과 (M_2, Z_2) 에 대한 0이 아닌 것과 지너스 0 Z- 관계 그로모브-위튼 불변량이 존재한다.

정리 4.4. *(M,ω) 가 $(M_i,\omega_i),(i=1,2)$ 의 정규 연결 합이라하자. 만일 $A \in H_2(M)$ 가 $A^2=-1$ 인 심플렉틱 구로 나타난다면, 각 $e(\neq 0) \in \ker(\pi_*)$ 에 대하여 $\Psi^M_{A+e}=0$ 이다.*

증명. 만일 $b_2^+(M)=1$ 이면, $\omega(e)=0$ 이므로, $e \in H_2(M)^-$ 는 네가티브 호몰로지에 속하고, $e^2=0$ 이므로, $e=0$. 만일 $b_2^+(M)>1$ 이면, 타우베스의 정리에 의하여 그로모브-위튼 불변량과 사이버그-위튼 불변량이 같다. 또한 $-c_1(TM)$ 은 사이버그-위튼 불변량에 대한 기본류 (basic class) 이다. 만일 $A \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 가 (-1)구로 표시 된다면, $-c_1(TM)+2A$ 도 기본류가 된다. 한편 각 $e \in \ker(\pi_*)$ 는 토러스이고, $e^2=0$ 이므로, 모든 기본류 K 에 대하여 $K\cdot e=0$ 이다.

따라서, $-c_1(TM)\cdot e=(-c_1(TM)+2A)\cdot e=0$ 이므로, $A\cdot e=0$ 이다. 만일 $\Psi^M_{A+e}\neq 0$ 라 가정하자. 사이버그-위튼 불변량과 그로모브-위튼 불변량이 같으므로 $\Psi^M_A\neq 0$ 이다. A 와 $A+e$ 가 J-호로모르픽 커브 C 와 D 로 나타내자. $A\cdot(A+e)=A^2=-1$ 이므로 두 커브 C 와 D 는 같은 성분을 공유하고, $C\subset D$ 에 포함된다. J-호로모르픽 커브 $D\backslash C$ 는 e 를 나타내고 $\omega(e)=0$ 이므로, $D\backslash C=\emptyset$ 이다. 즉, $e=0$ 이다. □

정리 4.5. *만일 M_1 과 M_2 가 심프렉틱 4차원 다양체를 레이셔날도 룰리드도 아니며, $Z_i\subset M_i(i=1,2)$가 심프렉틱 부분다양체라하자. 만일 M_1은 미니말이고, M_2-Z_2가 (-1)-구를 포함하지 않는다면, M_1 과 M_2 의 정규연결합 $M=M_1\cup_{Z_1=Z_2}M_2$ 는 다시 미니말이다.*

증명. 만일 M 이 미니말이 아니라면, M은 (-1)-구를 매장하고 있다. 사실 이 (-1)- 구는 심프렉틱이다. 이 구를 A 라 하자. 이 (-1)-구는 A를 나타내는 유일한 슈도-호로모르픽구이다. 따라서 $\Psi^M_A=1$ 이다. 위의 정리에 의하여 $\Psi^M_{<A>}=1$ 이다.

한편 M_1 과 M_2 의 가정에 의하여 A 는 $M_i-Z_i,(i=1,2)$ 의 슈도-호로모르픽 구로 나타낼수 없다. 앞의 정리에 의하여 (M_i,Z_i) 에 대한 지너스 0 Z_i-관계 그로모브-위튼 불변량은 모두 0이다. 심프렉틱 정규합에 대한 공식에 의하여 $\Psi^M_{<A>}=0$ 이다. 이는 모순이다.

따라서, M 은 미니말이다. □

따름정리 4.1. *만일 M_1 과 M_2 가 미니말 심프렉틱 사차원 다양체로써 레이셔날도 룰리드도 아니며 $Z_i\subset M_i,(i=1,2)$ 가 심프렉틱 부분다양체라면 , Z_i 를 따라 M_1 과 M_2 의 정규연결합 M 은 미니말이다.*

제 5 절 허비츠 수

본 절에서는 리만곡면에서 리만곡면으로 가는 분지카버의 수가 관계 그로모브-위튼 불변량과 같음을 유도하고, 합의 공식을 이용하여 간단한

분지점과 한점에서 분지형을 정하여 리만곡면에서 리만곡면으로 가는 정해진 분지형의 카버의 수에 대한 순환 공식(recursive formula)를 유도하고자 한다.

[5.1] 컴펙트 연결 지너스 g 리만곡면을 $\sum^g$ 라 하고 컴펙트 연결 지어스 h의 리만곡면 $\sum^g$ 에서 $\sum^h$로 k차 분지카버는 호로모르픽 사상 $f : \sum^g \to \sum^h (g \geq h \geq 0)$ 로서 유한개의 점만 제외하고 모든 점 $q \in \sum^h$의 역상의 개수 $|f^{-1}(q)| = k$이다. 이때 유한개의 점들을 분지점(branch Point)라 한다. 두 분지 카버 f_1과 f_2가 동치란 위상동형 $\pi : \sum^g \to \sum^g$가 존재하여 $f_1 = f_2 \circ \pi$임을 뜻한다.

분지카버 $f : \sum^g \to \sum^h$가 거의단순(almost simple)이란 분지점에서 한점 (∞)만 제외하고 모든 분지점 q에 대하여 $|f^{-1}(q)| = k-1$을 의미한다. 분지점 ∞의 역상 $f^{-1}(\infty)$는 m개의 점이며, 각 점에서 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 차수를 갖는다 하고, m개의 순서쌍 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$로 나타내고, $\ell(\alpha) = m$을 α의 길이라고 한다.

$\mu^{g,k}_{h,m}(\alpha)$를 k차의 거의단순 α형 분지 카버 사상 $f : \sum^g \to \sum^h$의 동치류의 수를 나타내자. $\mu^{g,k}_{h,m}(\alpha)$를 허비츠수라하고 이 수를 구하기 위하여 많은 수학자들이 노력하여 부분적인 해결을 하였다.

예를들면 Hurwitz는 $\mu^{o,k}_{o,m}(\alpha)$를 구하고, Denes는 $g = 0, \ell(\alpha) = 1$일때 Arnold는 $g = 0, \ell(\alpha) = 2$일때, Goulden과 Jackson는 $g = 0, 1, 2$일때 Vakil은 $g = 0, 1,$ 일때 대수기하의 기술을 사용하여 구하였다.

허비츠수 $\mu^{g,k}_{h,m}(\alpha)$는 관계 그로모브-위튼 불변량으로 Li와 Ruan이 밝힌 것을 소개하고 심프랙틱 합공식을 사용하여 Hurwitz수 $\mu^{g,k}_{h,m}(\alpha)(g \geq h)$의 순환공식을 유도하자.

분지형 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$에 대하여,

$$\widetilde{J}(\alpha) \equiv \{(\alpha_i, \alpha_j) | 1 \leq i < j \leq m)\} / \sim,$$

여기서

$$(\alpha_i, \alpha_j) \sim (\alpha_s, \alpha_t) \Leftrightarrow (\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_s, \alpha_t) \text{ 혹은 } (\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha_t, \alpha_s).$$

동치류 $[(\alpha_i, \alpha_j)] \in \widetilde{J}(\alpha)$에서 (α_i, α_j) 를 대표라하고 $(m-1)$쌍

$$\theta = (\alpha_1, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \widehat{\alpha_j}, \alpha_m, \alpha_i + \alpha_j)$$

여기서 $\wedge$은 생략을 의미한다.

$J(\alpha)$를 순서 $(m-1)$쌍 $\theta = (\alpha_1, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \widehat{\alpha_j}, \alpha_m, \alpha_i + \alpha_j)$들의 집합이라 하자.

$\theta \in J(\alpha)$에 대하여,

$$I_1(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \sharp\{\lambda \in \theta \mid \lambda = \alpha_i + \alpha_j\}, & \alpha_i = \alpha_j \text{ 이면}, \\ (\alpha_i + \alpha_j) \cdot \sharp\{\lambda \in \theta \mid \lambda = \alpha_i + \alpha_j\}, & \alpha_i \neq \alpha_j \text{ 이면}, \end{cases}$$

각 $\alpha_i \in \alpha$에 대하여,

$$C_{\alpha_i}(\alpha) = \{\omega = (\alpha_1, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_m, \rho\alpha_i - \rho) \mid 1 \leq \rho[\frac{\alpha_i}{2}]\}$$

을 $(m-1)$쌍들의 집합이라 하자.

만일 $\alpha_{\bar{1}} \cdots \alpha_{\bar{\ell}}$를 α의 서로 다른 요소일때, $C(\alpha) = C_{\alpha_{\bar{1}}}(\alpha) \cup \cdots \cup C_{\alpha_{\bar{\ell}}}(\alpha)$라 하자. 각 $\omega = (\alpha_1, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_m, \rho, \alpha_i - \rho) \in C(\alpha)$에 대하여,

$$I_2(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho(\alpha_i - \rho) \cdot \sharp\{\lambda \in \omega \mid \lambda = \rho\} \cdot (\sharp\{\mu \in \omega \mid \mu = \alpha_i - \rho\} - 1), \\ \qquad\qquad \rho = \alpha_i - \rho \text{ 이면}, \\ \rho(\alpha_i - \rho) \cdot \sharp\{\lambda \in \omega \mid \lambda = \rho\} \cdot \sharp\{\mu \in \omega \mid \mu = \alpha_i - \rho\}, \\ \qquad\qquad \rho \neq \alpha_i - \rho \text{ 이면}, \end{cases}$$

집합 $\{1, 2, \cdots, \widehat{i}, \cdots, m\}$을 두 집합 π_1 과 π_2 로 나누자. 이에따라

$$\omega = (\alpha_1, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_m, \rho, \alpha_i - \rho)$$

를 그 집합 $\omega_{\pi_1} = (\alpha_{\pi_1}, \rho), \omega_{\pi_2} = (\alpha_{\pi_2}, \alpha_i - \rho)$ 로 나누자.

예를들면 $\pi_1 = (1), \pi_2 = (2, \cdots, \widehat{i}, \cdots, m)$이면,

$$\begin{aligned} \omega_{\pi_1} &= (\alpha_1, \rho), \\ \omega_{\pi_2} &= (\alpha_2, \cdots, \widehat{\alpha_i}, \cdots, \alpha_m, \alpha_i - \rho) \end{aligned}$$

이다.

$P_\omega \equiv \{\pi = (\omega_{\pi_1}, \omega_{\pi_2})\}/\sim$, 여기서 $\pi = (\omega_{\pi_1}, \omega_{\pi_2}) = (\cdots, \rho_1, \cdots, \alpha_i - \rho) \sim \widetilde{\pi} = (\widetilde{\omega_{\pi_1}}, \widetilde{\omega_{\omega_{\pi_2}}}) = (\cdots, \widetilde{\rho}, \cdots, \alpha_i - \widetilde{\rho}) \in P_\omega \Leftrightarrow \rho = \widetilde{\rho}$이고 ω_{π_1}과 $\widetilde{\omega_{\pi_1}}$는 배열에 따라 같게 할수 있다.

각 동치류 $\pi = (\omega_{\pi_1}, \omega_{\pi_2}) \in P_\omega$에 대하여,

$$I_3(\pi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho(\alpha_i - \rho) \cdot \sharp\{\lambda \in \omega_{\pi_1} \mid \lambda = \rho\} \cdot \sharp\{\mu \in \omega_{\pi_2} \mid \mu = \alpha_i - \rho\}, \\ \qquad\qquad \rho = \alpha_i - \rho \text{ 이면} \\ \rho(\alpha_i - \rho) \cdot \sharp\{\lambda \in \omega_{\pi_1} \mid \lambda = \rho\} \cdot \sharp\{\mu \in \omega_{\pi_2} \mid \mu = \alpha_i - \rho\}, \\ \qquad\qquad \rho \neq \alpha_i - \rho \text{ 이면} \end{cases}$$

라 하자.

다음 정리를 앞으로 증명할 것이다.

정리 5.1. 모든 허비츠수 $\mu^{g,k}_{h,m}(\alpha)$는 다음 순환공식을 만족한다.

$$\begin{aligned} \mu^{g,k}_{h,m}(\alpha) &= \sum_{\theta \in J(\alpha)} \cdot \mu^{g,k}_{h,m-1}(\alpha) \cdot I_1(\theta) + \sum_{\omega \in C(\alpha)} \cdot \mu^{g-1,k}_{h,m+1}(\omega) \cdot I_2(\omega) \\ &+ \sum_{\theta \in C(\alpha)} \sum_{g = g_1 + g_2, g_1, g_2 \geq 0,} \sum_{k = k_1 + k_2, k_1, k_2 \geq 1,} \sum_{m+1 = m_1 + m_2, m_1, m_2 \geq 1} \end{aligned}$$

$$\sum_{\pi \in P_\omega} \binom{k + m - 2kh - 3 + 2g}{k_1 + m_1 - 2k_1 h - 2 + 2g_1} \cdot \mu^{g_1,k_1}_{h,m_1}(\omega_{\pi_1}) \mu^{g_2,k_2}_{h,m_2}(\omega_{\pi_2}) I_3(\pi)$$

여기서 $m_i = l(\omega\pi_i), i = 1, 2$.

위의 공식에서 초기값으로

$$\mu_{0,1}^{g,1}(1) = \begin{cases} 1 & \text{만일 } g = 0 \\ 0 & \text{만일 } g > 0 \end{cases}$$

을 갖는다.

[5.2] (M, ω)를 2n 차원 컴팩트 심프렉틱 다양체로 심프렉틱 형식 ω을 갖었다고 하자. $Z_0, \cdots, Z_p$를 M의 여차원 2심프렉틱 부분다양체라 하자. $\sum^g, (g \geq 0)$는 지너스 g의 컴팩트 연결 리만곡면이라 하자. 호몰로지류 $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$, 양의 정수 집합 $k^i = \{k_1^i, \cdots, k_{\lambda_i}^i, i = 0, \cdots, p\}, K = \{k^0, \cdots, k^p\}$라 하자.

모듈라이 공간

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \mathcal{M}_{A,K}^{M,Z}(g, K) = \ & \{f : \textstyle\sum^g \to M \mid x_1, \cdots, x_l; y_1^0, \cdots, y_{l_0}^0; \\ & y_1^p, \cdots, y_{l_0}^p \in \textstyle\sum^g, [f(\sum^g)] = A, f\text{는} Z_i\text{와} \\ & y_1^i, \cdots, y_{l_i}^i \text{에서}, k_1^i, \cdots, k_{l_i}^i \text{차로 접함}, \\ & i = 0, \cdots, p\} \end{aligned}$$

를 생각하자. 기호로 $Z = (Z_0, \cdots, Z_p), x = (x_1, \cdots, x_l), y^i = (y_1^i, \cdots, y_{l_i}^i)$, $y = (y^0, \cdots, y^p)$로 나타내자.

만일 호몰로지 A가 슈도-호로모르픽 사상 $f : \sum^g \to M$ 으로 나타나면 교차수 $A \cdot Z_i = \sum_{j=1}^{l_i} k_j^i \geq 0$이다. 앞 장에서와 같이 관계 안정 슈도-호로모르픽 사상들의 모듈라이 공간 $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_{A,l}^{M,Z}(g, K)$ 은 모듈라이 공간 $\mathcal{M}$의 컴펙트화이다.

2개 자연스러운 값매김 사상이 있다. :

$$\begin{aligned} & \pi_1 : \overline{\mathcal{M}} \to M^l, (f, \textstyle\sum^g, x, y, z) \mapsto (f(x_1), \cdots, f(x_n)), \\ & \pi_2 : \overline{\mathcal{M}} \to Z_0^{l_0} \times \cdots \times Z_p^{l_p}, \\ & \quad (f, \textstyle\sum^g, x, y, z) \mapsto (f(y_1^0), \cdots, f(y_{l_0}^0), \cdots, f(y_1^p), \cdots, f(y_{l_p}^p). \end{aligned}$$

$Z-$관계 그로모브-위튼 불변량은

$$\psi_{A,g,l}^{M,Z}(\delta \mid \beta : K) = \int_{\overline{\mathcal{M}}} \pi_1^*(\pi_i \delta_i) \wedge \pi_2^*(\pi_j \beta^j)$$

로 정의 된다. 여기서 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_l), \delta_i \in H^*(M, \mathbb{Z}), \beta = (\beta^0, \cdots, \beta^p)$, $\beta^j = (\beta_1^j, \cdots, \beta_{l_j}^j)$, $\beta_i^j \in H^*(Z_j), j = 0, \cdots, p, i = 1, \cdots, l_i$이다.

다음은 $\sum^g$가 연결되어 있지 않고 c개의 성분 $\sum^{g_c}, \cdots, \sum^{g_l}$로 이루어져 있다고 하자. 이때 지너스사이 관계는 $g = \sum_{i=1}^c g_i - c + 1$ 이다. 마크점 $x = (x_1, \cdots, x_l)$에 대하여 P_x를 x의 c개의 순서분할들의 집합이라 하자.

각 분할 $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_c) \in P_x$은 어느 마크점 $x = (x_1, \cdots, x_l)$이 성분 $\sum^{g_1}, \cdots, \sum^{g_c}$로 가는가를 말해준다. 비슷하게 $\sigma^i = (\sigma^i_1, \cdots, \sigma^i_l) \in P_{y^i}$가 정의된다. y의 분할에 따라서, K의 분할이 정해진다. 즉, $\sigma^i = (\sigma^i_1, \cdots, \sigma^i_l) \in P_{k^i}, \sigma_i = (\sigma^0_i, \cdots, \sigma^p_i), \sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_c)$로 쓰자. 따라서 π와 σ가 δ와 β의 분할을 만든다.

각 성분 $\sum^{g_1}$에 대하여 분할 중 $x_{\pi_i}, y_{\sigma_i}, \delta_{\pi_i}, \beta_{\sigma_i}$가 있다. 만일 $f_i : \sum^{g_i} \to M$이 $Z-$관계 안정 슈도-호로모르픽 사상으로 $[f_i(\sum^{g_i})] = A_i$, $\sum_{i=1}^{c} A_i = A$라 하면, 각 $(A_1, \cdots, A_c), \pi, \sigma$에 대하여 $Z-$관계 그로모브-위튼 불변량은 $\psi^{M,Z}_{A,g,l}(\delta \mid \beta : K)(\pi, \sigma) = \sum_{i=1}^{c} \psi^{M,Z_{\sigma_i}}_{A_i,g_i,l_i}(\delta_{\pi_i} \mid \beta_{\sigma_i} : K_{\sigma_i})$로 정의된다.

다음은 코시-리만 작용소 $\overline{\partial}$ 의 선형화인

$$D_f = D_{\overline{\partial_J}}(f) : C^{\infty}(\Sigma, f^*TM) \to \Omega^{0,1}(f^*TM)$$

을 생각하자. 여기서 완비공간을 만들기 위하여 적절한 Sobolev-norm을 각 공간에 선택하여야 한다.

정리 5.2. *작용소 $D_f : \Omega^0(f^*TM) \to \Omega^{0,1}(f^*TM)$은 프레드호름(Fredholm)이고, 그의 지표는*

$$\mathrm{Ind}(D_f) = 2c_1(TX)A + (2n-6)(1-g) + 2\sum_{i=0}^{p} l_i + 2l$$

이고, $Z-$관계 그로모브-위튼 불변량은 $\psi^{M,Z}_{g,\varphi}(\delta \mid \beta : K)$ 는

$$\sum_{i=1}^{l} \deg(g_i) + \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=1}^{l_i} \deg\beta^i_j = \mathrm{Ind}(D_f)$$

이 아니면 0으로 정의 한다.

다음은 $H : M \to \mathbb{R}$를 적절한 주기 헤밀턴 함수라 하자. 헤밀톤 벡터장 X^H는 써클 S^1 작용을 생성한다. 약간의 변형으로 0을 정규치라 할 수 있다. 이때 $H^{-1}(0)$는 S^1작용을 갖은 매끄러운 다양체이며, 그의 상 $B = H^{-1}(0)/S^1$는 심프렉틱 축소(reduction) 이다. 이때 B는 심프렉틱 구조를 가지며 M의 여차원 2을 갖은 심프렉틱 부분다양체로 간주 할 수 있다. 또한 M은 $H^{-1}(0)$를 경계로하는 2개의 성분 $M^{\pm}$로 나누어진다. 경계 $H^{-1}(0)$를 S^1작용으로 축소하면 2개의 닿힌 심플렉티기 다양체 $\overline{M}^{\pm}$가 된다. 이와 같은 과정을 심프렉틱 절단이라 한다. $\overline{M}^+$가 $Z^+ = (Z_0, \cdots, Z_q)$를 포함하고, $\overline{M}^-$가 $Z^- = (Z_{q+1}, \cdots, Z_p)$를 포함한다고 가정하자.

또한 수축사상 $\pi : M \to \overline{M}^+ \cup_B \overline{M}^-$ 은 코호몰로지에서 $\pi^* : H^*(\overline{M}^+ \cup_B \overline{M}^-, \mathbb{R}) \to H^*(M, \mathbb{R})$을 유도한다. M상의 심프렉틱 구조 ω를 $M^{\pm}$에

제한하면 심프렉틱 수축상에 유도된 심프렉틱 구조 $\omega^+|_B = \omega^-|_B$가 된다.

코호몰로지의 Mayer-Vietoris 열에서 코호몰로지류 $(\delta^+, \delta^-) \in H^*(\overline{M}^+, \mathbb{R}) \bigoplus H^*(\overline{M}^-, \mathbb{R})$가 $\delta^+|_B = \delta^-|_B$이면 $\delta^+ \cup_B \delta^- \in H^*(\overline{M}^+ \cup_B \overline{M}^-, \mathbb{R})$인 코호몰로지류를 정해진다.

모듀라이 공간 $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^{+\overline{M}^+, Z^+, B, C^+}_{A^+, l^+}(g^+, k^+, \alpha^+)$ 는 다음조건을 갖은 데이터 $(\sum^{g^+}, x^+, y^+, e^+, k^+, \alpha^+, f^+)$로 구성되어 있다. 여기서,

1. $\sum^{g^+}$는 c^+개 성분으로 되어있다.
2. $f^+ : \sum^{g^+} \to \overline{M}^+$는 슈도-호로모르픽 사상.
3. $[f^+(\sum^{g^+})] = A^+$.
4. f^+는 $Z^+ = (Z_0, \cdots, Z_q)$ 와 $y^+ = (y^0, \cdots, y^q)$로 접한다.
5. f^+는 B와 $e^+ = (e_1^+, \cdots, e_v^+)$에서 $\alpha^+ = (\alpha_1^+, \cdots, \alpha_v^+)$차수로 접한다.

위와같이 $\mathcal{M}^- = \mathcal{M}^{-\overline{M}^-, Z^-, B, C^-}_{A^-, l^-}(g^-, k^-, \alpha^-)$ 는 데이터 $(\sum^{g^-}, x^-, y^-, e^-, k^-, \alpha^-, f^-)$로 구성되어 있다.

사상 f^+와 f^-를 부쳐서 슈도-호로모르픽 사상 $f : \sum^g \to M$ 로 만들 수 있다.

위와 같이 $\overline{M}^+$와 $\overline{M}^-$를 부치고, 만일 f^+와 f^-가 끝에서 같은 차수로 접하면, f^+와 f^-를 $f^+ \sharp f^- : \sum^{g^+} \sharp \sum^{g^-} \to M = \overline{M}^+ \sharp \overline{M}^-$로 부칠수 있다. 사상 $f^+ \sharp f^-$를 변형하면 유일한 슈도-호로모르픽 사상 $f : \sum^g \to M$을 얻는다.

여기서 $\sum^{g^+} \sharp \sum^{g^-}$는 연결합(connected sum)으로 연결 곡면이다. 이때 발생하는 지표와 지너스사이관계는 다음과 같다.

정리 5.3. 1. $\mathrm{Ind}(D_f) = \mathrm{Ind}(D_{f^+}) + \mathrm{Ind}(D_{f^-}) - (2n-2)v$
2. $g = g^+ + g^- + v - 1$
여기서 v는 B와 접하는 점의 수, 즉 끝의수 이고, $g^\pm$는 $\sum^{g^\pm}$의 대수적 지너스, $g^\pm = \sum_i^{g^\pm} - c^\pm + 1$이다.

[20] 에서와 같이 관계 그로모브-위튼 분변량 $\psi^{M,Z}_{A,l}(\delta \mid \beta : K)$를 각 성분의 관계 그로모브-위튼 불변량으로 나타낼수 있다.
$C^{J,A}_{g,l,k}$를 다음 인덱스들의 집합이라 하자:

1. $(\Sigma^\pm, f^\pm)$에 대하여 : $\{A^\pm{}_i, g^\pm{}_i, l^\pm{}_i, k^\pm{}_i, (\alpha^\pm{}_1, \cdots, \alpha^\pm{}_v)\}$, $i = 1, \cdots, v, \sum_{i=1}^v \alpha^\pm{}_i = A \cdot B$.
2. 사상 $\rho : \{e_1^+, \cdots, e_v^+\} \to \{e_1^-, \cdots, e_v^-\}$, 여기서 $(e^\pm{}_1, \cdots, e^\pm{}_v)$는 $\Sigma^\pm$의 $f^\pm$에 의한 B와의 접점이다. 여기서,
(ㄱ) ρ는 단사이다.

(ㄴ) 만일 $\rho(e_i^+)$와 e_i^+을 동일시 하면 $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$는 연결 폐 지너스g 리만곡면이다.
(ㄷ) $f^+(e_i^+) = f^-(\rho(e_i^+))$이고 B와 같은 차수로 접한다.
(ㄹ)$((\Sigma^+, f^+), (\Sigma^-, f^-), \rho)$은 호몰로지 A를 나타낸다.

각 $c \in C_{g,l,k}^{J,A}$에 대하여, $\pi^\pm{}_c, \sigma^\pm{}_c$는 c에 의하여 유도된 $x^\pm, y^\pm, e^\pm, \delta^\pm, \beta^\pm, \alpha^\pm$의 분할이다.

정리 5.4. *$C_{g,l,k}^{J,A}$는 유한집합이다.*

$$\psi_{A,g,l}^{M,Z}(\delta \mid \beta : K) = \sum_{c \in C_{g,l,k}^{J,A}} \psi_c(\delta \mid \beta : K) \quad ,$$

여기서

$$\begin{aligned}\psi_c(\delta \mid \beta : K) \quad &= \| \alpha \| \sum \delta^{I,J} \psi_{A^+,g^{-1},l^+}^{\overline{M}^+,z^+,B,c^+}(\delta^+ \mid \beta^+; \rho_I, k^+, \alpha)(\pi_c^+, \sigma_c^+) \\ &\cdot \psi_{A^-,g^-,l^-}^{\overline{M}^-,z^-,B,c^+}(\delta^- \mid \beta^+; \rho_I, k^-, \alpha)(\pi_c^-, \sigma_c^-), \\ &\| \alpha \| = \alpha_1, \cdots, \alpha_v, \delta^{I,J} = \delta^{I_1,J_1} \ldots \delta^{I_v,J_v},\end{aligned}$$

$\{\rho_1, \cdots, \rho_s\}$는 $H^*(B, \mathbb{R})$의 단위직교기저이며

$$\rho_I = \{\rho_{I_1}, \cdots, \rho_{J_v}\} \subset \{\rho_1, \cdots, \rho_s\}, \rho_J = \{\rho_{J_1}, \cdots, \rho_{J_v}\} \subset \{\rho_1, \cdots, \rho_s\}.$$

주의. 정리 5.4의 이해를 돕기 위하여 좀 더 자세히 설명해보자.

1. 호몰로지 $A = A^+ \cup_B A^-$,
2. 만일 $\sum^{g^\pm}$가 $a_i \geq 0$개 i차의 끝점을 갖으면, $i \in \{1, 2, \cdots, A \cdot B\}, a = (a_1, a_2, \cdots), \sum_i i \cdot a_i = \sharp(A \cdot B), \quad g = g^+ + g^- + \sum_i a_i - 1.$
3. 만일 $z^\pm = (\pi^\pm, \sigma^\pm) \in P_{x^\pm} \times P_{y^\pm}, e^\pm$ 는 각 성분 $\sum^{g_1^\pm}, \cdots, \sum^{g_{c^\pm}^\pm}$에 속하고,
   (i) $g^\pm = \sum_{i=1}^{c^\pm} g_i{}^\pm - c^\pm + 1, \quad g_i{}^\pm \geq 0, \quad i = 1, \cdots, c^\pm.$
   (ii) $f_i{}^\pm : \sum^{g_i^\pm} \to \overline{M}^\pm$는 관계 안정 홀로모르픽 사상이고, $[f_i{}^\pm(\sum^{g_i^\pm})] = A_i^\pm, i = 1, \cdots, c^\pm$이고 $\sum_{i=1}^{c^\pm} A_i{}^\pm = A^\pm$ 이다.
   $\tau = (\tau^+, \tau^-)$라 하면 $\tau^\pm$는 분할 $\delta^\pm, \beta^\pm, a, Z^\pm$ 을 정한다.
4. a와 τ가 주어지면, $\sum^{g^+}$와 $\sum^{g^-}$를 위 방법에 따라 연결합 $\sum^{g^+} \sharp \sum^{g^-}$ 하면 지니스 g 인 연결 리만곡면이 된다. 그러나 여러가지 다른 방법으로 $\sum^{g^+}$와 $\sum^{g^-}$를 연결합 할 수 있다. 그 방법의 수를 $k(a, \tau)$라 하자.

정리 5.5.

$$\begin{aligned}\psi_{A,g,l}^{M,Z}(\delta \mid \beta : K) = \| a \| \sum \delta^{I,J} \sum\nolimits_\tau \psi_{A^+,g^{-1},l^+}^{\overline{M}^+,z^+,B,c^+}(\delta^+ \mid \beta^+; \rho_I, k^+, a) \\ \cdot(\pi_c^+, \sigma_c^+) \cdot \psi_{A^-,g^-,l^-}^{\overline{M}^-,z^-,B,c^+}(\delta^- \mid \beta^+; \rho_I, k^-, a)(\pi_c^-, \sigma_c^-),\end{aligned}$$

여기서

$$\| a \| = 1^{a_1}, 2^{a_2}, \cdots, A = A^+ \cup_B A^-, \quad g = g^+ + g^- + v - 1,$$
$$\sharp(A \cdot B) = \textstyle\sum_i i a_i, \rho_I, \quad \rho_J \subset \{\rho_1, \cdots, \rho_s\}.$$

[5.3] 리만곡면의 관계 그로모브-위튼 불변량

이 절에서는 심프렉틱 다양체가 리만곡면 $\sum^h$ 이고 Z는 유한개의 $\sum^h$상의 점이다. $H^2(\sum^h, \mathbb{Z}) = H_2(\sum^h, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \langle H \rangle$라 하면 오일러 류는$c_1(T\sum^h) = (2-2h)H$이다. 호몰로지 $A = kH$라 하자. 모듀라이 공간 $\mathcal{M}_{A,g,}^{\sum^h, Z}(g, K) = \{f : \sum^g \to \sum^h$: 홀로 모르픽 사상, $[f(\sum^g)] = kH$, 마크점$x, y \in \sum^g$, f는 Z에 y에서$\|$차로 접합$\}$. 이때 $\sum_{j=1}^{l_i} k_j^i = A \cdot Z_i = \deg(f) = k$이고, 각 $k^i, i = 0, \cdots, p$는 k의 분할이다. 모듀라이 공간의 차원은

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_{A,g,}^{\sum^h, Z}(g, K) &= 2c_1(\sum^h) \cdot A + 4(g-1) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{p} l_i - 2 \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{l_i} k_j^i \\ &= 4((1-h)k + (g-1)) + 2(\sum_{i=0}^{p} l_i - \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{l_i} k_j^i) \end{aligned}$$

이다. 그런데 Z는 유한개의 점이므로
$Z-$관계 그로모브-위튼 불변량은 $\psi_{A,g,o}^{\sum^H, Z}(| \beta : K) = 0$이다.
만일 $2((1-h)k + (g-1)) + \sum_{i=0}^{p} l_i \neq \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=1}^{l_i} k_j^i$이면 .

정리 5.6. 만일 $\sum^g$ *가 연결리만곡면이고,* $l = 0, k = (2, 1, \cdots, 1, \cdot, 2, 1, \cdots, 1, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ *이면, 허비츠수* $\mu_{n,m}^{g,Z}(\alpha)$*와* $Z-$*관계 그로모브-위튼 불변량* $\psi_{A,g,o}^{\sum^H, Z}(| \beta : K)$*는 같다.*

위의 차원을 고려하면 $P = k - 2hk + 2g - 2 + m$개의 이중점을 갖지 않으면 허비츠수 $\mu_{n,m}^{g,Z}(\alpha) = 0$이다.

다음으로 심프렉틱 절단과 심프렉틱 합 공식을 이용하여 정리 5.1을 증명하자. $\sum^H$의 분지점 ∞의 작은 근방이 한개의 이중점 G을 포함한다 하자. 이 근방에서 심프렉틱 절단을 행하면, $\overline{M}^+ = S^2, \overline{M}^- \simeq \sum^H$가 된다. 다시 $H_2(S^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \langle H' \rangle, H_2(\sum^h, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = \langle H \rangle$라 하자. 그러면 $A^+ = kH', A^- = kH$이다.

모듀라이 공간의 차원과 지너스을 고려하면

$$\begin{cases} 2k + 2(g^+ - 1) = (k - m) + (k - k + 1) + (k - v), \\ g = g^+ + g^- + v - 1. \end{cases}$$

사상 $f^+ : \sum^{g^+} \to \overline{M}^+ = S^2$ 는 3개의 분지점, ∞, 이중점 G, 심프렉틱 축소점 B, 을 갖는다. 만일 $\sum^{g^+} = \cup_{i=1}^{c^+} \sum_i^{g^+}$ 가 C^+성분을 갖고, 호로모르픽 사상 $f_i^+ : \sum^{g_i^+} \to \overline{M}^+$가 k_i^+차라 가정하자.

(i) 만일 $\sum^{g^+}$가 이중 분기점을 가지면, 위의 차원공식에서 $2k_i^+ + 2(g_i^+ - 1) = (k_i^+ - m_i^+) + (k_i^+ - k_i^+ + 1) + (k_i^+ - v_i^+)$이고 $v_i^+ \geq 1, m_i^+ \geq 1$ 는 심프렉틱 축소에 대한 분기점수와 무한대에 대한 분기점의 수이다. 위 식은 $2k_i^+ + m_i^+ + v_i^+ = 3$ 이므로 $(v_i^+, m_i^+, g_i^+) = (1,2,0)$ 혹은 $(2,1,0)$이다.

(ii) 만일 $\sum^{g_i^+}$ 가 이중분기점을 갖지 않으면, 차원공식은 $2g_i^+ + v_i^+ + m_i^+ = 2$ 이므로 $(v_i^+, m_i^+, g_i^+) = (1,1,0)$이다. 또한 $\mathrm{m} = \sum_{i=1}^{c^+} m_i^+, v = \sum_{i=1}^{c^+} v_i^+ = m-1$ 혹은 $m+1$이므로 $C^+ = m-1$ 혹은 m이다.

정리 5.7. *$\overline{M}^+ = S^2$에 대하여, 호로모르픽 사상 $f_i^+ : \sum^{g_i^+} \to \overline{M}^+$는 다음 중 한 분지형태이다. 무한대점, 이중분지점 G, 심프렉틱 축소점 B에서,*
(1) $(\alpha_i; 1, \cdots, 1; \alpha_i), \quad 1 \leq i \leq m,$
(2) $(\alpha_k, \alpha_l; 2, 1, \cdots, 1; \alpha_k + \alpha_l), \quad 1 \leq k < l \leq m,$
(3) $(\alpha_i; 2, 1, \cdots, 1; \rho, \alpha_i - \rho), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq \rho \leq [\frac{\alpha_i}{2}].$

(i) 만일 $v = m-1$이면 $\quad C^+ = m-1$ 이고 $g^+ = \sum_{i=1}^{c^+} g_i^+ - c^+ + 1 = 2 - m$이다. 따라서 $g = g^+ + g^- + v - 1 = g^- = \sum_{i=1}^{c^-} g_i^- - c^- + 1$이고, $0 \leq \sum g_i^- \leq g, \;\; g_i^- \geq 0, \;\; c^- \geq 1$ 이므로 $c^- = 1$ 이고 $g^- = g$이다.

(ii)만일 $v = m+1$이면 $\quad C^+ = m$ 이고 $g^+ = 1 - m$이다. 따라서 $g = g^+ + g^- + v - 1 = g^- + 1 = \sum_{i=1}^{c^+} g_i^- - c^- + 1 + 1 < g - c^- + z$이고, $c^- = 1$이면 $g = g^- + 1$이 고, $c^- = 2$이면 $g^- = g_1^- + g_2^- - 1$이고 $g = g_1^- + g_2^-$이다.

정리 5.8. *$\sum^-$가 지너스 g^- 와 c^-개의 성분을 가지면,*
(1) $c^- = 1, \;\; g^- = g$, *혹은*
(2) $c^- = 1, \;\; g^- = g - 1$, *혹은*
(3) $c^- = 2, \;\; g^- = g_1^- + g_2^- - 1 = g - 1, g_1^- \geq 0, g_2^- \geq 0$*이다.*

다시 $\overline{M}^-$에서 심프렉틱 축소점 B를 다시 무한점 이라고 하면 여러개의 거의 단순분기 피복 사상 $f_i^- : \sum^{g_i^-} \to \overline{M}^-$ 이 있다. 그러나 위에서 본 바와 같이 $f_i^- : \sum^{g_i^-} \to \overline{M}^-$ 는 주어진 사상 $f : \sum^g \to \sum^h$ 보다 무한점에서 작은 분지점을 갖거나, 작은 지너스를 갖거나, 작은 차수의 호로모르픽 사상이 된다. 따라서 만일 $\overline{M}^+$에서 관계 그로모브-위튼 불변량을 알면 허비츠수 $\mu_{n,m}^{g,Z}(\alpha)$의 순환공식을 얻을 수 있다.

정리 5.9. $\theta = (\alpha_1, \cdots, \hat{\alpha}_i, \cdots, \hat{\alpha}_j, \cdots, \alpha_m, \alpha_1 + \alpha_m) \in J(\alpha)$ 와 $\omega = (\alpha_1, \cdots, \hat{\alpha}_i, \cdots, \alpha_m, \rho, \alpha_i - \rho) \in C(\alpha)$에 대하여, 관계 그로모브-위튼 불변량은

$$\psi_J(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1} \cdots \widehat{\frac{1}{\alpha_i}} \cdots \widehat{\frac{1}{\alpha_j}} \cdots \frac{1}{\alpha_m} & \alpha_i \neq \alpha_j \text{ 이면,} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_1} \cdots \widehat{\frac{1}{\alpha_i}} \cdots \widehat{\frac{1}{\alpha_j}} \cdots \frac{1}{\alpha_m} & \alpha_i = \alpha_j \text{ 이면,} \end{cases}$$

이고

$$\psi_c(\alpha, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1} \cdots \widehat{\frac{1}{\alpha_i}} \cdots \frac{1}{\alpha_m} & \varphi \neq \alpha_i - \varphi \text{ 이면,} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_1} \cdots \widehat{\frac{1}{\alpha_i}} \cdots \frac{1}{\alpha_m} & \varphi = \alpha_i - \varphi \text{ 이면,} \end{cases}$$

이다.

증명. 관계 그로모브-위튼 불변량 정의에 따라서

$$\psi_{kH,0,0}^{S^2, P_1, P_2, P_3}(| P_1, P_2, P_3; k; 1, 1, \cdot, 1; k) = \frac{1}{k}$$

이고

$$\psi_{kH,0,0}^{S^2, P_1, P_2, P_3}(| P_1, P_2, P_3; k; 1, 1, \cdot, 1; k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \rho = k - \rho, \\ 1 & \rho \neq k - \rho, \end{cases}$$

임을 증명하자. 여기서 $P_i (i = 1, 2, 3)$는 점이다.

만일 $f : S^2 \to S^2$가 $\overline{\mathcal{M}}_{kH,0}^{S^2, P_1, P_2, P_3}(0; k; 1, \cdot, 1; k)$ 원소라하면 f를 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 메로모르픽 사상 $F_1(x) = \frac{a_0(x - y_1)^k}{(x - y_2)^k}, x \in \mathbb{C}, y_1 \neq y_2 \in \mathbb{C}$를 K차 분기점으로 하는 사상으로 생각 할 수 있다. 만일 $F_1(1) = 1$이라 하고 0와 ∞를 K차의 분기점이라 하면 $F_1(x) = x^k$이 된다. 콘포말 변형 $\pi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\pi_j(x) = e^{\frac{2\pi i}{k} j} x$, $j = 0, \cdots, k - 1$을 고려하면 $F_1(x) = F_1(\pi_j(x))$이다.

즉 $\mathbb{Z}_k$ 가 $\overline{\mathcal{M}}_{kH,0}^{S^2, P_1, P_2, P_3}(0; k; 1, \cdot, 1; k)$ 상에 작용한다. 따라서

$$\psi_{kH,0,0}^{S^2, P_1, P_2, P_3}(| P_1, P_2, P_3; k; 1, 1, \cdot, 1; k) = \frac{1}{k}$$

이다. 다음은 만일 $f \in \overline{\mathcal{M}}_{kH,0}^{S^2, P_1, P_2, P_3}(0; k; 2, 1, \cdot, 1; \rho, \rho - k)$ 라 하면 f를 $F_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F_2(x) = \frac{a_0(x - y_1^1)^\rho (x - y_2^1)^{k-\rho}}{(x - y^2)^k},$$

$a_0 \neq 0, x \in \mathbb{C}, y_1^1 \neq y_2^1, y^2 \in \mathbb{C}$는 $\rho, k - \rho, k$차 분기점으로 생각할 수 있다.

만일 1, 2 그리고 0를 $\rho, k-\rho, k$차 분기점이라고 가정하면

$$F_2(x) = \frac{a_0(x-y_1^1)^\rho (x-y_2^1)^{k-\rho}}{(x-y^2)^k}$$

가 된다. F_2가 이중분기점 x를 가지므로,

$$\begin{cases} x & \neq & 0,1,2\text{이고}, \\ F_2(x) & = & 1, \\ F_2'(x) & = & 0 \end{cases}$$

이라하자.

그러면 $F_2(x) = \frac{a_0(x-1)^\rho(x-2)^{k-\rho}}{(x-y^2)^k}, a_0 = \frac{(2k)^k}{\rho^\rho(2\rho-2k)^{k-\rho}}$로 유일하게 정해진다. 만일 $k-\rho$라 하면, 닮은 사상 $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \pi(x) = \frac{2x}{3x-2}$이 $F_2(x) = F_2(\pi(x))$이며 π^2 =identity가 된다. 즉 $\mathbb{Z}_2$가 $\overline{\mathcal{M}}_{kH,0}^{S^2,P_1,P_2,P_3}(0;k;2,1,\cdots,1;\rho,\rho-k)$에 작용한다. 따라서

$$\psi_{kH,0,0}^{S^2,P_1,P_2,P_3}(\mid P_1,P_2,P_3;k;1,1,\cdot,1;k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \rho = k-\rho, \\ 1 & \rho \neq k-\rho, \end{cases}$$

이다. □

정리 5.1의 증명. 양의 정수 b와 양의 정수 쌍 $\beta = (\lambda_1,\cdots,\lambda_t)$ 에 대하여, $\rho(\beta,b) = \sharp\{\lambda \in \beta \mid \lambda = b\}$라 하자. 그러면 허비츠수

$$\begin{aligned} \mu_{h,m}^{g,k}(\alpha) &= \sum_{\theta \in J(\alpha)} \cdot\mu_{h,m-1}^{g,k}(\theta)\cdot\psi_J(\alpha,\theta)\cdot \parallel \theta \parallel \cdot\rho(\theta,\alpha_i+\alpha_j) \\ &+ \sum_{\omega\in C(\alpha)} \sum_{g=g_1+g_2 g_1,g_2\geq 0} \sum_{k=k_1+k_2 k_1,k_2\geq 1} \sum_{m+1=m_1+m_2 m_1,m_2\geq 1} \\ &\sum_{\pi\in P_\omega} \binom{k+m-2kh-3+2g}{k_1+m_1-2k_1h-2+2g_1} \mu_{h,m_1}^{g_1,k_1}(\omega_{\pi_1})\rho(\omega_{\pi_1},\rho) \\ &\mu_{h,m_2}^{g_2,k_2}(\omega_{\pi_2})\rho(\omega_{\pi_1},\alpha_i-\rho)\psi_c(\alpha,\omega)\cdot \parallel \omega \parallel \end{aligned}$$

여기서 $\parallel \theta \parallel = \alpha_1,\cdots,\hat{\alpha_i},\cdots,\hat{\alpha_j},\cdots,\alpha_m,(\alpha_1+\alpha_m), \parallel \omega \parallel = \alpha_1,\cdots,\hat{\alpha_i}, \cdots,\alpha_m,\ \rho,(\alpha_i-\varphi),\delta^{\rho_1,\alpha_1-\rho}$ 는 크로비커 기호, $m_i = l(\omega_{\pi_i}),\ \ i=1,2,$ $\binom{k+m-2kh-3+2g}{k_1+m_1-2k_1h-2+2g_1}$ 는 $\sum^g$ 상에 $(k+m-2kh-3+2g)$개의 이중 분기점에서 $\sum^{g_1}$ 에 $(k_1+m_1-2k_1h-2+2g_1)$ 개의 이중 분지점을 뽑는 수를 의미한다.

정리 5.3.4를 위식에 대입하면, 정리 1을 얻는다. □

제 6 절 퀀텀 코호몰로지

퀀텀 코호몰로지 모든 그로모브-위튼 불변량을 사용하여 곱을 정의하는 큰 퀀텀코호몰로지(big quantum cohomology) 와 3개의 마크점을 갖는 슈도-호로모르픽 커브의 모듀라이 공간에 의하여 정의된 그로모브-위튼 불변량을 사용하여 곱을 정의한 작은 퀀텀코호몰로지(small quantum cohomology)가있다. 우리는 편의상 작은 모듀라이 공간을 이용하는 작은 퀀텀 코호몰로지를 다룬다.

[6.1] 드람(de Rham)코호몰로지의 정수부분 $H^*(M) = H^*_{dR}(M, \mathbb{Z})$ 를 생각하자. 그러면 $H^k(M)$을 $\mathrm{Hom}(H_k(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ 와 동일시할 수 있다. 비슷하게 $H_*(M,\mathbb{Z})$의 자유부분을 $H_*(M)$ 로 표시하자. $a \in H^k(M), \beta \in H_k(M)$일때 $a(\beta) = \int_\beta a$로 $\alpha \in H_{2n-k}(M)$, $\beta \in H_k(M)$의 교차수(intersection pairing)을 $\alpha\cdot\beta$로 표시하자. 따라서 $\alpha \in H_{2n-k}(M)$을 $a = PD(\alpha) \in H^k(M)$로 보내는 동형 사상 $H_{2n-k}(M) \to H^k(M)$을 생각할 수 있다. 이는 $\beta \in H_k(M)$에 대해

$$\int_\beta a = \alpha \cdot \beta$$

를 만족하게 만들어진 준동형 사상이다. 두 개의 코호몰로지류 $a \in H^k(M)$, $b \in H^l(M)$에 대해 포앙카레 쌍대를 $PD(a) = \alpha \in H_{2n-k}(M)$, $PD(b) = \beta \in H_{2n-l}(M)$로 표시하자. 그러면 합곱 $a \cup b \in H^{k+l}(M)$이고, $\gamma \in H_{k+l}(M)$에 대해

$$\int_\gamma a \cup b = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

를 삼중교차(triple intersection)이라고 하자. $a, b \in H^*(M)$이 서로 여차원을 갖고, $\alpha = PD(a)$, $\beta = PD(b)$라 할 때

$$< a, b >= a \cdot b = \int_M a \cup b = \alpha \cdot \beta = \int_\beta \alpha$$

로 표기하자.

[6.2] (M, ω)를 취한 천수 $N \geq 2$를 갖는 $2n$차원 단조 심프렉틱 다양체라 하자. 여기서 최소천수 N은 $< c_1, \pi_2(M) >= N\mathbb{Z}$로 정의된 수이다. ω를 적당히 잘 바꾸어 $\omega(\pi_2(M)) = \mathbb{Z}$가 되도록 하는 $[\omega] \in H^*(M, \mathbb{Z})$라 가정하자. 퀀텀코호몰로지를 로렌츠 다항식들의 환과의 텐서곱

$$QH^*(M) = H^*(M) \otimes \mathbb{Z}[q]$$

로 정의하자. 여기서 q는 차수 $2N$의 변수이고, 차수 k인 $QH^*(M)$안의 원소는 유한합

$$a = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i q^i, a_i \in H^{k-2Ni}(M)$$

으로 표시할 수 있다. $QH^k(M)$을 차수 k인 원소들의 집합이라 하자. 두 원소 $a = \sum_i a_i q^i \in QH^k(M), b = \sum_j b_j q^j \in QH^l(M)$ 에 대해 포앙카레 쌍대쌍를

$$<,>: QH^*(M) \otimes QH^*(M) \to \mathbb{Z}$$

$$(a,b) \mapsto < a,b > \equiv \sum_{2N(i+j)=k+l-2n} a_i \cdot b_i$$

로 정의하자. 이 쌍 $<,>$은 비퇴화이다. 즉 모든 b에 대해 $< a,b >= 0$이면 $a = 0$이다.

q를 곱합으로써 얻어진 자연스런 동형사상

$$QH^k(M) \simeq QH^{k+2N}(M)$$

이 존재한다. 더욱이, 동형사상

$$QH^k(M) \simeq \oplus_{j \equiv k (\mathrm{mod} 2N)} H^j(M)$$

도 존재한다. 그러므로 M의 퀀텀코호몰로지 $2N$등급을 가진 코호몰로지의 보편 피복으로 볼 수 있다.

[6.3] 퀀텀곱은 준동형사상

$$* : QH^l(M) \times QH^m(M) \to QH^{l+m}(M)$$

이다. 포앙카레 쌍대쌍은 정상적이기 때문에, 임의의 $a = \sum_i a_i q^i \in QH^l(M)$과 $b = \sum_j b_j q^j \in QH^m(M)$의 곱 $a * b$를 $c = \sum_k c_k q^k \in QH^{2n-l-m}(M)$과의 내적을 가지고 정의할 수 있다. $a_i \in H^{l-2Ni}(M), b_j \in H^{m-2Nj}(M), c_k \in H^{2n-l-m-2Nk}(M)$이고, 각각의 포앙카레 쌍대를 $\alpha_i = PD(a_i)$, $\beta_j = PD(b_j)$, $\gamma_k = PD(c_k)$로 표기하자. 그러면 $a * b \in QH^{l+m}$ (M)을

$$< a * b, c >= \sum_{i,j,k} \sum_A \Phi_A(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$$

가 되도록 정의한다. 여기서, 마지막 합은 을 만족하는 모든 에 대한 합이다. 이것은

$$\deg(a_i + \deg(b_j) = \deg(c_k) = 2n + 2c_1(A)$$

와 같은 조건이다. 이로 인해 $-n \leq c_1(A) \leq 2n$이 되고, 따라서 단지 유한개의 $c_1(A)$값만이 이 합에서 나타난다. M이 단조라 하면, 어떤 $\lambda > 0$에 대해 $\omega(A) = \lambda c_1(A)$이다. 그러므로 합에 기여하는 A는 균등한 유계 에너지를 갖는다. 따라서 이런 A는 단지 유한개만 나타나고, 합의 우변은 유한합이 된다.

두 코호몰로지 원소 $a \in H^l(M)$와 $b \in H^m(M)$이 주어지면 퀀텀곱(quantum product) $a * b$를

$$a * b = \sum_A (a * b)_A q^{c_1(A)/N} \in QH^{l+m}(M)$$

으로 정의한다. 여기서 $(a*b)_A \in H^{l+m-2c_1(A)}(M)$이므로 $\gamma \in H_{l+m-2c_1(A)}(M)$에 대해 $\alpha = PD(a) \in H_{2n-l}(M), \beta = PD(b) \in H_{2n-m}(M), \deg\alpha + \deg\beta + \deg\gamma = 4n - 2c_1(A)$라 하면

$$\int_\gamma (a * b)_A = \Phi_A(\alpha, \beta, \gamma)$$

을 만족하는 것이다.

만일 $A = 0$이면 J-복소해석적 곡선은 상수이고 $\Phi_0(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$는 삼중교차이다. 그러므로 $a * b$의 상수항은 합곱 $a \cup b$가된다.

[6.4] 다음은 퀀텀코호몰로지 환에서 퀀텀곱의 기본성질을 일아보자.

정리 6.1. 1. *퀀텀곱$*$는 더하기에서 분배법칙을 만족하고, 반교환이다. 즉, $a, b \in QH^*(M)$에 대해 $a * b = (-1)^{dega \cdot degb} b * a$ 이다. 또한 $*$는 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$의 작용을 가지고 교환이다.*
2. *$a \in H^0(M)$ 또는 $a \in H^1(M)$이면 모든 $b \in H^*(M)$에 대해 $a * b = a \cup b$ 이다.*
3. *생성원 $1 \in H^0(M)$은 $QH^*(M)$의 단위 원소이다.*
4. *$a, b, c \in QH^*(M)$에 대해 $< a * b, c >=< a, b * c >$ 이다.*

증명.
(1) 명백하다.
(2) $c_1(A) \neq =$에 대해 $\Phi_A(\alpha, \beta, \gamma) = 0$임을 증명하자.이는 일반적 위치에 있을때, β와 γ를 동시에 지나는 A-곡선이 존재하지 않음을 증명하면 된다. 모듀라이공간의 차원은

$$\dim\mathcal{M}(A, J, 2) = 2n + 2c_1(A) - 2$$

이다. $\deg(a) = 0$ 또는 1이므로,

$$2n - 2c_1(A) = \deg(a) + \deg(b) + \deg(c) \leq 1 + \deg(b) + \deg(c)$$

이다. 따라서

$$\dim\mathcal{M}(A, J, 2) \leq \deg(b) + \deg(c) - 1$$

이 된다. 그러므로

$$\dim\mathcal{M}(A, J, 2) + \dim(\beta) + \dim(\gamma) \leq \dim M^2 - 1$$

이다. 일반적 위치에 있을때, $\mathrm{img}e_2 : \mathcal{M}(A, J, 2) \to M^2$와 $\beta \times \gamma$는 만나지 않는다. $*$에 기여하는 유일한 것은 $c_1(A) = 0$인 경우이고, 이경우 $(a * b)_0 = a \cup b$임을 앞에서 보였다. 따라서

$$\int_\gamma (a * b)_0 = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = \int_\gamma (a \cup b)$$

이고 $a * b = a \cup b$이다.

(3) (2)에 의해 성립한다.

(4) $\Phi_A(a, b, c)$는 3개 성분이 치환하에서 반대칭이다. 즉,

$$\Phi_A(a, b, c) = (-1)^{\deg a(\deg b + \deg c)} \Phi_A(b, c, a).$$

이다. $N(i + j + k) + c_1(A) = 0$을 만족하는 네 쌍 (i, j, k, A)에 대해 합을 취해보면

$$\begin{aligned} < a * b, c > &= (-1)^{\deg a(\deg b + \deg c)} < b * c, a > \\ &= < a, b * c > \end{aligned}$$

을 만족한다. □

(주의) 퀀텀곱 $*$는 결합법칙을 만족한다.퀀텀 코호몰로지환 $QH^*(M)$은 프로베니우스 (Frobenius) 대수이다.

[6.5] 표준 복소 구조와 케일러 형식 ω와 대응되는 푸비니-스터디 계량을 가는 n차원 복소사영 공간 $\mathbb{CP}^n$을 생각하자. $L \equiv [\mathbb{CP}^1] \in H_2(\mathbb{CP}^n)$을 표준 생성원이라 하면 $c_1(L) = n+1$이 된다. 차원관계에 의해 $m = 0, 1$일 때만 $\Phi_{mL}(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$ 이다. $m = 0$이면 $\Phi_0(\alpha, \beta, \gamma) = \int_\gamma (a \cup b)$이다. 최소천수 $N = n + 1$이고 퀀텀코호몰로지 $QH^k(M)$은 k가 짝수일 때 $\mathbb{Z}$, k가 홀수일 때 0이다.

$a \in H^l(M), b \in H^m(M)$이라 하자. $l + m \leq 2n$이면 $a * b = a \cup b$이다.그리고 $l + m = 2n = 2$인 경우, $a = p \in H^2(\mathbb{M})$이 표준생성원이면 $p(L) = 1$이 되고 $b = p^n \in H^{2n}(\mathbb{CP}^n)$이다.

$p * p^n = q$가 $QH^{2n+2}(\mathbb{CP}^n)$의 생성원이 됨을 보이고자 한다. $(p * p^n)_0 = p \cup p^n = 0$이므로, $(p * p^n)_L = 1 \in H^0(\mathbb{CP}^n)$임을 증명하면 된다.이는 $[\mathbb{CP}^{n-1}] = PD(p)$ 이고 점$= PD(p^n)$이라 할 때

$$\int_{\text{점}} (p * p^n)_L = \Phi_L([\mathbb{CP}^{n-1}], \text{점}, \text{점}) = 1$$

이므로 $(p * p^n)_L = 1 \in H^o(\mathbb{CP}^n)$이 된다.

따라서, $p * p^n = q \in QH^{2n+n}(\mathbb{CP}^n)$이다. 다른 0이 아닌 항 $\Phi_L(\alpha, \beta, \gamma)$는 $k+l \geq n+1$에 대해 $p^k * p^l = p^{k+l-n-1} \cdot q$의 관계로 주어진다. k가 짝수

인 $a_k \in QH^k(M)$을 생성원이라 하자. 그러면 퀀텀곱은 $a_k * a_l = a_{k+l}$로 주어진다. 따라서,

$$QH^*(\mathbb{CP}^n) = \frac{\mathbb{Z}[p, q, q^{-1}]}{< p^{n+1} = q, qq^{-1} = 1 >}$$

이다.

퀀텀코호몰로지에서 퀀텀곱이 결합법칙을 성립함은 가장 중요한 사실이며 모듀라이 공간의 기하학적인 성질, 대수기하학적 성질, 해석학적 성질등 다양한 응용을 제공해 준다.

정리 6.2. (M,ω)를 *최소 천수* $N \geq 2$*이면서 단조인 컴팩트 심플렉틱 다양체라 하자. 그러면 퀀텀코호몰로지군* $QH^*(M)$*상의 퀀텀곱* $*$*은 결합법칙을 만족시킨다.*

E_j의 복소차원 $\dim_{\mathbb{C}} E_j = j$인 $\mathbb{C}^{n+1}$의 부분공간 $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n$의 수열들이 공간을 F_{n+1}이라 하자. F_{n+1}를 깃발다양체(flag manifold)라 한다. 그러면 F_{n+1}는 단순연결이며 복소구조를 수반하고 있고, $N = 2$이다.

각 $j = 0, \cdots, n$에 대해 $L_j \to F_{n+1}$을 파이버 E_{j+1}/E_j를 갖는 표준직선다발이라하고 $u_j = c_1(L_j)$라 놓자. $L_0 \oplus \cdots \oplus L_n$이 자명하므로, $u_0 + \cdots + u_n = 0$이다. $\sigma_j(u)$를 기본대칭함수라 하면 F_{n+1}의 코호몰로지환은

$$H^*(F_{n+1}) = \frac{\mathbb{Z}[u_0, \cdots, u_n]}{< \sigma_1(u), \cdots, \sigma_{n+1}(u) >}$$

가 된다.

각 $j = 0, \cdots, n$에 대해 $p_j = u_j + \cdots + p_n)$로 놓으면

$$c_1 = 2(p_1 + \cdots + p_n)$$

이다. 기저 $p_1, \cdots, p_n \in H^2(F_{n+1})$의 쌍대기저를 나타내면서 각 차수가 4인 n개의 보조 변수 $q_1, \cdots, q_n$을 취하자. 그러면 F_{n+1}의 퀀텀코호몰로지는

$$QH^*(F_{n+1}) = H^*(F_{n+1}) \otimes \mathbb{Z}[q_1, \cdots, q_n] = \frac{\mathbb{Z}[u_1, \cdots, u_n, q_1, \cdots, q_n]}{I}$$

가 된다. 여기서 I는 아래의 행렬 A_n의 특성다항식의 계수에 의해 생성된 아이디얼이다 :

$$A_n = \begin{pmatrix} u_0 & q_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & u_1 & q_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & u_2 & q_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & u_{n-1} & q_n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & u_n \end{pmatrix}$$

$G(k, N)$을 $\mathbb{C}^N$상의 k-평면들의 그라스마니안(Grassmannian)이라 하자. $E \oplus F = G(k, N) \times \mathbb{C}^N$이 되는 랭크(rank) k인 표준 복소벡터다발 $E \to G(k, N)$과 랭크(rank) $N - k$인 복소벡터다발 $F \to G(k, N)$을 생각해보자. $x_j = c_j(E^*), y_j = c_j(F^*)$라 하면 $j = 1, \cdots, N$에 대해

$$\sum_{i=0}^{j} x_i y_{j-i} = 0$$

이 된다.

정리 6.3. (*Witten*) *그라스마니안의 퀀텀코호몰로지는*

$$QH^*(G(k, N)) \simeq \frac{\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_k, q]}{< y_{N-k+1}, \cdots, y_{N-1}, y_N + (-1)^{N-k} q >}$$

이다. 여기서 x_j는 차수 $2j$의 생성원이고, q는 차수 $2N$의 생성원이다. 또 $y_N + (-1)^{N-k} q = 0$은 $-x_k y_{N-k} + (-1)^{N-k} q = 0$으로 다시 쓸 수 있다.

[6.6] $\mathcal{H} = \oplus_i H^{2i}(M, \mathbb{C})$라하자. $a, b \in \mathcal{H}$에 대해 포앙카레쌍을 $< a, b > = \int_M \overline{a} \wedge b$로 $\alpha = PD(a), \beta = PD(b), \gamma = PD(c)$일 때

$$< a * b, c >= \sum_A \Phi_A(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \gamma)$$

로 정의하자. 그리고 $a \in \mathcal{H}$와 벡터장 $X, Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$에 대해

$$\nabla_Y X(a) = dX(a)Y(a) + iX(a) * Y(a)$$

하자. 더 일반적으로 보면, $a \in \mathcal{H}, X, Y : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$에 대해

$$A_a(x)(y) = ix *_a y$$

로 접속

$$\nabla = d + A : C^\infty(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \to \Omega^1(\mathcal{H}, \mathcal{H})$$

는

$$\nabla_Y X(a) = dX(a)Y(a) + iX(a) *_a Y(a)$$

로 주어진다.

정리 6.4. 1. *접속 ∇이 꼬임이 없음*(torsion free)*와 필요충분조건은 $a, x, y \in H$에 대해 $x *_a Y = y *_a x$이다.*

2. *∇을 꼬임없는 접속이라 하자. ∇가 에르미트*(hermitian) *구조와 양립하는 것과의 필요충분조건은 $a, x, y, z \in \mathcal{H}$ 에 대해 $< \overline{x} *_a \overline{y}, z >=< \overline{x}, y *_a z >$이다.*

3. ∇을 꼬임없는 에르미트 접속이라 하자. 1형식 A가 닫힌 형식이라는 것과 동치는

$$< \overline{x} *_a \overline{y}, z >= \partial^3 S_a(x,y,z)$$

를 만족하는 복소해석적 함수 $S : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$가 존재한다.

4. ∇을 꼬임없는 에르미트 접속이라고 하자. 그러면 닫힌 1형식 A가 $A \wedge A = 0$을 만족하는 것은 결합법칙을 만족하는 것과 동치이다.

정리 6.4의 3의 복소해석적 함수 $S : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$에 대해서 다음 조건들은 서로 동치이다.

1. $*_a$가 결합법칙을 만족한다.
2. 접속 ∇의 곡율은 0이다.
3. 함수 S는 아래의 WDVV (Witten, Dijkaraaf, E.Verlinde, H.Verlin de)등식을 만족한다.

$$\sum_i \partial^3 S_a(\omega, x, e_i)\partial^3 S_a(f_i, y, z) = \sum_i \partial^3 S_a(x, y, e_i)\partial^3 S_a(f_i, \omega, z).$$

여기서 e_i는 $\mathcal{H}$의 기저이고 f_i의 $< \overline{f_i}, e_j >= \delta_{ij}$를 만족하는 쌍대기저이다.

WDVV등식을 이용하여, $\mathbb{CP}^2$상에서 유리곡선의 개수를 계산하자.

$$N(d) \equiv \Phi_{dL,3d-1}(\text{점}, \cdots, \text{점})$$

을 $p = 3d - 1$개의 일반적 점들과 만나는 $\mathbb{CP}^2$안의 차수 d의 유리곡선을 개수라 하자.

그러면 $N(1) = 1$이고 $d \geq 2$에 대해,

$$N(d) = \sum_{k+l=d} N(k)N(l)k^2 l(l \begin{pmatrix} 3d-4 \\ 3k-2 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 3d-4 \\ 3k-1 \end{pmatrix}), d \geq 2$$

의 관계식을 유도할 수 있다. $N(d)$의 처음 몇 개를 구해보면 다음과 같다.

$$N(1) = 1, N(2) = 1, N(3) = 12N(4) = 620, N(5) = 87304,$$
$$N(6) = 26312976, N(7) = 14616808129.$$

끝으로, 평탄접속과 결합법칙사이 관계는 다음과 같다.
1형식 $A : TH \to \mathrm{End}(H)$이 $A_q(x)y = ix *_q y$로 주어지고 접속 $\nabla = d + A : c^\infty(H.H) \to \Omega^1(H.H)$로 정의하면 접속 A의 곡률은 $F_A = dA +$

$A \wedge A$이다.
따라서

$$\begin{aligned}(A \wedge A)(X,Y)Z &= A(X)A(Y)Z - A(Y)A(X)Z = 0\\ &\Leftrightarrow X*(Y*Z) = Y*(X*Z)\\ &= Y*(Z*X) = Z*(X*Y) = (X*Y)*Z.\end{aligned}$$

참고 문헌

[1] N. Aronszajn, *A unique continuation principle for elliptic differential epuations or inequalities of the second order*, J. Math. Pures Appl. **36** (1957), 235–239.
[2] D. Auckly, *homotopy K3 surfaces and gluing results in Seiberg-Witten Theory*, Three lectures for the GARC, 1996.
[3] M. Audin. and J. Lafontaine, *Holomorphic in Symplectic Geometry*, Progr. Math., Birkhauser, Basel **117**, 1994.
[4] M. F. Atiyah, N. Hitchin and I. Singer, *Self duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **362** (1978), 425–461.
[5] M. F. Atiyah and G. B. Segal, *The index of elliptic operations. II.*, Ann. of Math. **87** (1968), no. 2, 531–545.
[6] M. F. Atiyah and I. Singer, *The index of elliptic operations. III*, Ann. of Math. **87** (1968), no. 2, 546–604.
[7] K. Behrend, *Gromov-Witten invariants in algebraic geometry*, preprint.
[8] N. Brand, *Necessary conditions for the existence of Branched curverings*, Invent. Math. **54** (1979), 1–10.
[9] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972.
[10] Y. S. Cho, *The cohomology ring of S^2 -fibration contemperary*, Mathematics of AMS **314** (2002), 63–70.
[11] ———, *Cyclic group actions on gauge Theory*, Differential Geom. Appl. **6** (1996), 87–99.
[12] ———, *Equivariant metric for smooth moduli spaces*, Topology Appl. **62** (1995), 77–85.
[13] ———, *Finite group actions on 4-manifolds*, J. Aust. Math. Soc. (series A) **66**, Part 3, (1999), 287–296.
[14] ———, *Finite group actions on the moduli space of self-dual connections I*, Trans. Amer. Math. Soc. **323** (1991), 233–261.
[15] ———, *Finite group actions on the moduli space of self-dual connections II*, Michigan Math. J. **37** (1990), 125–132.
[16] ———, *Finite group actions on SpinC bundles*, Acta Math. Hungar. **84** (1999), no. 1-2, 97–114.
[17] ———, *Seiberg-Witten invariants on non-symplectic 4-manifolds*, Osaka J. Math. **34** (1997), 169–173.
[18] Y. S. Cho and M. S. Cho, *Genus Minimizing in symplectic 4-manifolds*, Chinese Ann. Math. **21B** (2000), no. 1, 115–120.
[19] ———, *The Geography of Simply connected symplectic 4-Manifolds*, Czechoslovak Math. J. **53** (128) (2003), 265–276.

[20] ______, *Symplectic Surfaces in Symplectic Four-Manifolds*, Taiwanese J. Math. **17** (2003), no. 1, 77–87.

[21] Y. S. Cho and Y. H. Hong, *The Cyclic Group Actions on Four-Manifolds*, Acta Math. Hungar. **94** (2002), no. 4, 333–350.

[22] ______, *Seiberg-Witten invariants and Anti-Symplectic Involution*, Glasg. Math. J. **45** (2003), 401–413.

[23] Y. S. Cho and D. S. Joe, *Anti-Symplectic Involution with langrangian Fixed Loci and their Quotient*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2797–2801.

[24] Y. S. Cho and M. I. Lim, *Discreteness of Flux Group*, to appear in Acta Math. Sin. (Engl. Ser.).

[25] C. Conley and E. Zehnder, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I.*, Arnold. Inventiones Mathematicae. **73** (1983), 279–315.

[26] P. Deligne and D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given gemnus*, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 75–110.

[27] S. Donaldson, *An appilcayion of gauge theory to four-manifold theory*, J. Differential Geom. **18** (1983), 279–315.

[28] ______, *The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology*, Bull. Amer. Math. Soc. **33** (1995), 45–70.

[29] S. K. Donaldson, *Polynomial invariants for four manifolds*, Topology **29** (1990), 257–315.

[30] S. K. Donaldson and P. Kronheimer, *Geometry for four Manifolds*, Oxford University Press, 1990.

[31] F. Fang, *Smooth group actions on 4-manifolds and Seiberg-Witten invariants*, Internat. J. Math. **9** (1998), no. 8, 957–973.

[32] R. Fintushel and R. Stern, *Pseudofree orbifolds*, Ann. of Math. **122** (1985).

[33] ______, *SO(3)-connections of topology of 4-manifolds*, J. Differential Geom. **20** (1984), 523–539.

[34] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections, J. Differential Geom.* **28** (1998), 513–547.

[35] ______, *The unregularized gradient flow of the symplectic action*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1998), 576–611.

[36] ______, *Witten's complex and infinite dimensional Morse theory*, J. Differential Geom. **30** (1989), 207–221.

[37] M. Fredman, *The topology of four dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1983), 357–454.

[38] R. Fredman and J. Morgan, *On the diffeomorphism type of certain algebraic surface I*, J. Differential Geom. **27** (1988), 297–369.

[39] D. S. Freed and K. K. Uhlenbeck. *Instantons and Four-Manifolds*, M.S.R.I. Pub. 1(1984).

[40] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*, Topology **38** (1999), no. 5, 933–1048.

[41] M. Furuta, *Monopole equation and the 11/8 conjecture*, preprint.

[42] R. Gompf, *A new construction of symplectic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.

[43] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *A proof of conjecture for the number of ramified covering of the sphere by the torus*, preprint.

[44] ______, *The number of ramified covering of the sphere by the double torus, and a general form for higher genera*, preprint.
[45] ______, *Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mapping on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 1, 51–60.
[46] I. P. Goulden and D. M. Jackson, and A. Vainshtain, *The number of ramified covering of the sphere by the torus, and surface of higher genera*, AG/9902125.
[47] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
[48] F. Hirzebruch, *The signature of ramified coverings*, in:Global Analysis(Papers in Honors of K. Kodaira), Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 253–266.
[49] A. Hurwitz, *Uber Riemann'sche Flachen mit gegebenen Verzweigungspunkten.* Math. Ann. **39** (1891), 1–60.
[50] ______, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.
[51] E. N. Ionel, *Symplectic sums and Gromov-Witten Invariants*, ICM **2** (2002), 427–436.
[52] E. Ionel and T. H. Parker, *Relative Gromov-Witten Invariants*, to appear in Ann. of Math.
[53] ______, *The symplectic Sum Formula for Gromov-Witten Invariants*, preprint, math. SG/0010217.
[54] S. Keel, *Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero*, Trans. Amer. Math. Soc. **330** (1992), 545–574.
[55] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Berkeley, 1995.
[56] M. Kontsevich, *Enumeration of Rational Curves Via Torus Actions*, hepth/9405035 V2 27 Jun 1995.
[57] M. Kontsevich and Y. Manin, *Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry*, hepth/9402147(1994).
[58] ______, *Gromov-Witten classes, Quantum cohomology and Enumerative Geometry*, Comm. Math. Phys. **164** (1994) 525–562.
[59] D. Kotschick, *On irreducible four-manifolds*, preprint.
[60] D. Kotschick, S. Morgan and C. Taubes, *four-manifolds without symplectic structures but with nontrivial Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 119–124.
[61] P. Kronheimer and T. Mrowka, *The geneus of embedded surfaces in the projective plane*,Math. Res. Lett. I (1994), no. 2, 794–808.
[62] N. H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology, **3** (1965), 19–30.
[63] Mo Kuranishi, *New proof for the existence of local free complete families of complex structures*, Conference on Complex Analysis. Springer, Minneapolis, 1964.
[64] ______, *The quotient space of* $\mathbb{CP}^2$ *by the complex conjugation is the 4-sphere*, Math. Ann. **208** (1974), 175–177.
[65] A. M. Li and Y. Ruan, *Symplectic surgery and Gromov-Witten Invariants of Calabi-Yau 3-folds*, preprint, Math. alg-geom/ 9803036.
[66] T. J. Li and A. I. Stipsicz, *Minimality of certain connected sums*, Turkish J. Math. **26** (2002), 75–80.

[67] A. M. Li, G. Zhao and Q. Zheng, *The Number of Ramified covering of a Riemann Surface by Riemann Surface*, Comm. Math. Phys. **213** (2000), 685–696.
[68] D. McDuff, *Elliptic methods in symplectic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **23** (1990), 311–358.
[69] ______, *Example of symplectic structures*, Invent. Math. **89** (1987), 13–36.
[70] ______, *The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 679–712.
[71] D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and Quantum cohomology*, Univ. Lecture Ser. **6** (1994), A.M.S.
[72] ______, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, A.M.S., Providence, RI., 1994.
[73] S. Novikov, *Multivalued functions and functionals-an of the Morse theory*, Soviet Mathematics Doklady, **24** (1981), 222–225.
[74] T. Parker, *Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 1–40.
[75] T. Parker and J. Wolfson, *Pseudo holomorphic maps and bubble trees*, J. Geom. Anal. **3** (1993), 63–98.
[76] T. Petrie, *Pseudo equivalence of G-manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. **32** (1978), 169–210.
[77] Y. Ruan, *Topological sigma model and Donaldson type invariant in Gromov theory*, Duke Math. J. **83** (1998), 461–500.
[78] Y. Ruan and G. Tian, *A mathematical theory of quantum cohomogy*, J. Differential Geom. **42** (1995), 259–367.
[79] I. Satake, *The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds*, J. Math. Soc. Japan **9** (1957), 464–492.
[80] P. Shanahan, *The Atiyah-Singer Index Theorem*, Lecture Notes in Math. **638**(1967).
[81] I. Singer and J. Thorpe, *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces*, Global Analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1969), 335–365.
[82] S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math. **87**(1968), 861–866.
[83] C. Taubes, *Counting pseudo holomorphic submanifolds in dimension 4*, preprint.
[84] ______, *More constraints on symplectic forms from Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 9–13.
[85] ______, *Self-dual connections on manifolds with indefinite intersection matrix*, J. Differential Geom. **19** (1984), 517–560.
[86] ______, *Self-dual connections on non-self-dual 4-manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 139–170.
[87] ______, *The Geometry of the Seiberg-Witten invariants*, preprint.
[88] ______, *The Seiberg-Witten and te h Gromov invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 221–238.
[89] ______, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. **I** (1994), 809–822.
[90] ______, *Seigerg-Witten and Gromov invariants*, Geometry and Physics (Aarhus, 1995) (Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 184) Dekker, New York (1997), 591–601.

[91] S. Wang, *Gauge theory and involutions*, 1990, Oxford Univ. thesis.
[92] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.
[93] ———, *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geom. **117** (1982), 353–386.
[94] ———, *Topological sigma model*, Communications in Mathematical
[95] ———, *The index of elliptic operations*, IV.V. Ann. of Math. **93** (1971), no. 2, 119–149.
[96] ———, *Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds*, J. Differential Geom. **24** (1986), 275–341.
[97] 조용승, *다양체의 미분위상수학*, 대우총서 **432**, 아르케, 1999.
[98] ———, *수학에서 게이지 이론*, 이론물리의 수학적 접근, 민음사, 1996, 75–90.
[99] ———, *심프렉틱 다양체의 불변량*, Commun. Korean Math. Soc. **15** (2000), no. 3, 391–434.

서울시 서대문구 대현동 11-1
이화여자대학교 자연과학대학 수학과
120-750
E-mail: yescho@ewha.ac.kr