

## 사질토의 체적팽창을 고려한 비등방경화 구성모델 : I. 정식화

### An Anisotropic Hardening Constitutive Model for Dilatancy of Cohesionless Soils : I. Formulation

오 세 봉<sup>1</sup> Oh, Se-Boong

박 현 일<sup>2</sup> Park, Hyun-Il

권 오 균<sup>3</sup> Kwon, Oh-Kyun

#### Abstract

This study is focused on the constitutive model in order to represent brittleness and dilatancy of cohesionless soils. The constitutive model was proposed on the basis of an anisotropic hardening rule with generalized isotropic hardening rule. The shape of yield surface is a simple cylinder type in stress space and it makes the model practically useful. Flow rule was approximated by a concrete function on dilatancy. A peak stress ratio was defined to model brittle stress-strain relationships. The proposed model was formulated and implemented to calculate the stress-strain relationship from triaxial tests. In the companion paper the proposed model will be verified by comparison with the triaxial test results.

#### 요 지

본 논문에서는 사질토의 취성적 응력-변형률 관계와 전단시 체적팽창을 고려할 수 있는 구성모델에 대한 연구를 수행하였다. 제안된 모델은 일반등방경화규칙에 의거한 비등방 경화규칙을 적용하였으며, 항복면의 형태는 응력공간에서 원통형으로 나타나는 단순한 형태로 실용적으로 적용하기 편리하도록 하였다. 또한 유동규칙을 단순화하여 구체적인 팽창률 함수를 이용하여 정의하였다. 또한 가상적인 침투응력비를 정의하여 취성적 응력-변형률 관계를 모델링하는 것이 가능하였다. 이러한 구성모델은 수학적 정식화를 한 후 실험자료와 비교하도록 프로그램을 구현하였다. 동반논문에서는 삼축실험결과와 비교하여 검증할 것이다.

**Keywords :** Brittleness, Constitutive model, Dilatancy, Effective stress mode, Generalized isotropic hardening rule

#### 1. 서 론

사질토의 응력-변형률 관계는 점성토에 비하여 변형계수는 대체로 크지만 정형적으로 모델하기는 까다로운 편이다. 점성토의 경우에는 한계상태 토질역학에 근거하여 거동을 이해하는 일반적인 이론 토대를 제공

받고 있다(Roscoe and Burland 1968). 하지만 사질토의 경우에는 한계상태이론의 토대를 적용하기에는 어려움을 겪고 있다(Li and Dafalias 2000). 사질토는 압축과 정에서 간극비와 체적응력간에 유일한 관계를 나타내지 않을 뿐 아니라, 한계상태에서 하나의 응력상태에 머무르지 않고 한계상태선을 따라 이동하기 때문이다.

1 정희원, 영남대학교 토목공학과 부교수 (Member, Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Yeungnam Univ., sebungoh@yu.ac.kr)

2 정희원, 한국과학기술원 건설 및 환경공학과, 연수 연구원 (Member, Post-Doc. Fellow, Dept. of Civil and Environmental Engrg., KAIST)

3 정희원, 계명대학교 토목공학과 부교수 (Member, Associate Prof., Dept. of Civil Engrg., Keimyung Univ.)

사질토나 조립토의 경우 전체변형률 영역에서 밀도와 구속압(또는 체적응력)에 의존하는 거동을 나타내는 것으로 알려져 있다. 이러한 거동을 모사하기 위하여 Jeffries(1993)는 밀도 및 구속압 효과를 고려할 수 있도록 Been과 Jeffries(1985)의 상태매개변수(이하 상태변수, state parameter)를 이용하여 Cam-clay 모델을 변형한 구성모델을 제안하였다. Wood 등(1994)은 상태변수를 적용한 단순한 모델을 통하여 사질토의 거동을 적절하게 모델할 수 있었다. 그리고 Gajo와 Wood(1999)는 일반적인 응력공간으로 구성모델을 확장하였다. Manzari와 Dafalias(1997)는 상태변수를 적용하여 경계면 개념으로 구성모델을 제안하였다. 특히 Li와 Dafalias(2000)는 상태변수에 의존하는 가상적인 침투응력비(peak stress ratio) 및 팽창율(dilatancy)을 정교하게 모델하였으며, 등방적으로 압축된 사질토의 체적팽창과 연화(softening)을 합리적으로 모델할 수 있었다.

이러한 사질토의 구성모델들을 정리하면 다음과 같다; (1) 경계면 개념을 포함한 비등방 경화규칙을 적용하여 탄성영역이 거의 없는 비선형적인 응력-변형률 관계를 모델링하였고 (2) 상태변수에 의존하는 침투응력비를 적용하여 취성적인 거동을 모델링하였다. (3) 팽창율을 상태변수에 의존하는 함수로 정의하여 체적 압축 및 팽창을 모델할 수 있도록 유동규칙을 단순화하였다. 특히 대부분의 모델들은 항복면 및 경계면은 응력공간에서 큰 형상을 띠는 단순한 형태로 설정하였다. 이러한 모델들은 현단계에서 사질토의 취성 및 체적팽창거동을 모델할 수 있는 합리적이고 실용적인 구성모델로 여겨진다. 하지만 기존의 모델들은 등방압축후 삼축시험시 거동에 적용함으로써 모델을 검증하고자 하였다(Gajo와 Wood 1999, Manzari와 Dafalias 1997, Li와 Dafalias 2000). 반면 실제 지반은 주로  $K_0$  압축을 겪고 있으므로  $K_0$  조건시 전단거동에 대한 모델과 검증이 실용적인 측면에서 매우 필요하다고 할 수 있다.

경계면 모델의 경우에는 사상중심(mapping center)으로부터 현 응력을 경계면에 투영한 사상응력(mapping stress)을 정의한다. 이로부터 사상중심으로부터 현응력 및 사상응력간의 거리의 비를 이용하여 경화함수를 규정한다. 이 때 사상중심을 한 점으로 정의하거나 사상중심의 이동에 대한 경화규칙을 정의하는 것이 필요하다. 이러한 절차에서 경계면 모델은 개념의 모호함을 벗어나기가 어렵고 경화규칙이 단순하지만은 않게 된다. 이러한 모호함은 경계면 모델이 응력과 소성변형률과의

관계에서 나타나는 소성계수(plastic modulus)를 단순화한데서 비롯한다. 한편 이승래와 오세봉(1995)은 한계상태이론에 근거한 점성토의 구성모델을 제안하였다. 이 때 비등방경화규칙은 등방경화규칙을 일반화하여 단순화하였다. 이러한 일반 등방경화규칙은 경계면 모델에서 사용한 비등방 경화규칙을 표현할 뿐만 아니라 소성계수를 적용하지 않는 접근이 가능하다.

따라서 본 연구에서는  $K_0$  조건시 거동을 모델할 수 있는 일반 등방경화규칙에 근거한 사질토의 구성모델을 제안하였다. 그리고 동반논문(오세봉 등 2004)에서는 유전자 알고리즘을 적용하여 모델계수를 산정하는 기법을 제안한 후 구성모델을 검증할 것이다.

## 2. 사질토의 비등방경화 구성모델

흙의 응력-변형률 관계는 많은 인자의 영향을 받을 뿐만 아니라 그 거동이 복잡하므로 종합적이고 체계적으로 모델하는 데 많은 어려움을 겪고 있다. 따라서 전반적인 거동 중에서 어떠한 반응에 초점을 두는가를 설정하는 것이 필요하다. 또한 구성 모델은 사용 목적에 맞는 해당수준을 얻을 수 있는 가장 간편한 모델을 택하는 것이 바람직하다.

본 연구의 대상이 되는 거동은 사질토나 풍화토에서 나타나는 비선형적인 응력-변형률 관계로  $K_0$  압축후 전단거동을 포함한다. 이러한 거동의 특징으로는 (1) 구속압과 응력경로에 따른 강도의 변화가 나타나고 (2) 미소변형률 영역의 거동도 비선형적이며 (3) 동일한 재료의 경우에도 초기조건에 따라 취성과 연성이 잠재되어 있을 뿐 아니라 (4) 전단시 체적변화는 팽창과 압축이 모두 가능하다는 것이다.

흙의 거동과 관련된 최근의 탄소성론은 많은 부분 고전 이론을 포기하고 있다. 또한 정설이 부재할 정도로 견해가 분분하지만 사질토의 구성모델에서 다음과 같은 관점은 공유한다고 판단된다(Gajo와 Wood 1999, Manzari와 Dafalias 1997, Li와 Dafalias 2000)

- ① 항복면은 탄성과 소성 거동의 뚜렷한 경계 역할을 하지 않는다. 단지 수학적 전개과정에 필요한 하나의 포텐셜(potential) 함수이며, 극단적으로는 정의하지 않을 수 있다. 또는 명확하고 실제적인 정의가 중요하지 않을 수 있다. 다만 기하학적인 개념을 제공하는 데는 유의미하다.
- ② 경계면 개념은 적용하기가 편리하다. 이러한 비등방

경화규칙은 전반적인 흙의 거동을 모델하는 데 실용적이다.

- ③ 유동규칙은 또 하나의 포텐셜 함수를 포함한다. 따라서 포텐셜 함수 자체보다는 그 도함수가 필요하다. 통상적으로 포텐셜 함수를 직접 정의하지 않는다.
- ④ 파괴규칙은 침투강도 및 잔류강도를 나타내는 기준을 구분한다. 특히 침투강도와 관련된 경계면은 체적변화 또는 간극비 변화에 따라 의존하며, 연성거동과 취성거동이 혼재한 흙의 거동을 동시에 모델하는 역할을 한다.

본 연구에서 다루는 구성모델은 일반 등방경화규칙을 적용하여 비등방 경화규칙을 모사하였다. 이로 인하여 Li와 Dafalias(2000) 모델과 경화규칙이 상이하며  $K_0$  압축 후 전단거동을 모델하는데 적합하다.

이승래와 오세봉(1995)은 일반 등방경화규칙(*generalized isotropic hardening rule*)을 제안하여, 상동응력  $\xi$ 를 응력원점뿐만 아니라 임의의 응력상태에서 선정하여 재료의 비등방성을 표현할 수 있도록 하였다(그림 1). 상동응력은 경계면 모델에서 나타나는 사상중심(Dafalias 1986)과 같은 역할을 한다.

그림 1 (b)와 (c)에 나타나는 재하 및 역재하의 과정에서, 항복면은 각각의 재하과정에 상응하는 상동중심에 대하여 등방적으로 경화한다. 이 때의 응력-변형을 관계는 그림 1 (d)에 도시하였듯이 (b)와 (c)의 경로에 상응하는 관계를 유발한다. 특히 그림 1 (c) 과정에 나타난

관계는 새롭게  $\xi$ 를 생성시키고, 이  $\xi$ 에 대하여 항복면들이 등방경화함으로써 역재하과정에서 유발되는 소성유동을 표현할 수 있다. 이 때 상동응력이 새로이 생성되므로 비등방 경화규칙이 간편하게 구현될 수 있다.

비등방 경화규칙을 적용하는 핵심적인 이유는 실제 거동에서 나타나는 항복면 내의 항복을 표현하는 데 있다. 이는 고전적인 항복면이 항복의 경계역할을 하는 데 한계가 있음을 의미한다. 경계면은 가장 외곽에 위치한 항복면의 일종으로 그 내부에서의 항복을 허용하며, 내부 항복면이 존재할 수 있는 위치에 대한 기준 역할을 하게 된다. 이 때 상동응력 또는 상동중심  $\xi$ 는 등방적으로 경화하는 항복면들의 상대적 위치를 결정하는 기준이 되는 응력이다. 따라서 상동응력과 경계면을 기준으로 경계면 내부에 존재하는 항복면이 유일한 배열로 존재할 수 있다.

내부변수  $\xi$ 는 연속적인 재하과정에서는 변화하지 않지만 하중방향이 현저하게 변화하는 경우에만 변하는 변수로 가정한다. 따라서  $\xi$ 는 현저한 재하 방향의 변화에 따라 불연속적인 형태로 변화하며 재료의 항복과 관련된 기억을 저장하는 개별 기억 내부변수(*discrete memory internal variable*)로 사용할 수 있다(Dafalias와 Popov 1977). 본 연구에서는 재하방향의 현저한 변화조건은 응력제거(*unloading*)를 의미하며 항복면 내부로의 응력경로로 정의하였다. 또한 내부변수  $\xi$ 는 시간의존적인 거동에 대하여 반응하지만 본 연구의 대상에서는 제외하였다.

그리고 주어진 항복면에 대하여 상동응력이 결정되면, 상동응력에 대한 항복면의 상대적인 위치를 규정하는 기준이 필요하다. 따라서 그림 1에서 보여지듯이 경계면(*bounding surface*)을 정의해야 한다. 이 때 항복면과 경계면 간에는 다음과 같은 기하학적인 관계가 성립한다.

$$\frac{\alpha - \xi}{r} = \frac{a - \xi}{R} \quad (1)$$

여기서,

- $\alpha$  항복면 중심응력 텐서, 축차성분
- $a$  경계면 중심응력 텐서, 축차성분
- $r$  항복면 반경
- $R$  경계면 반경

항복면의 형태는 그림 2와 같이 콘 형상으로 축차응

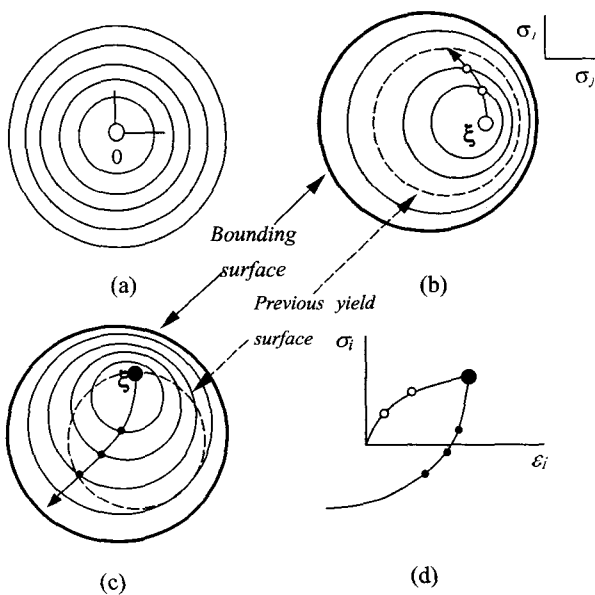


그림 1. 일반 등방경화에 의거한 비등방 경화규칙

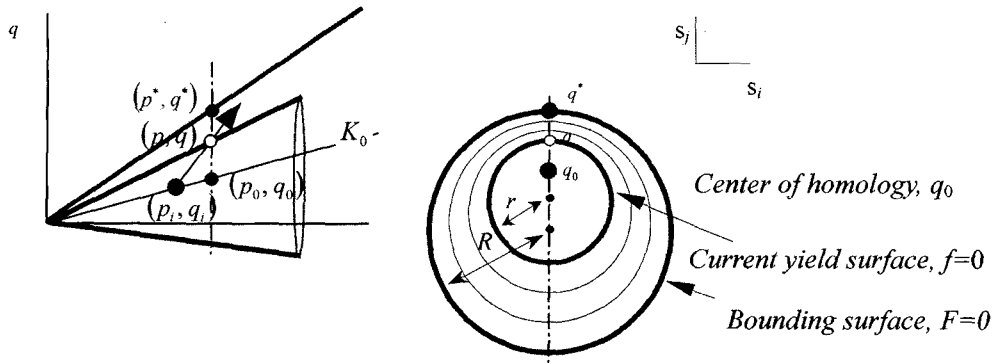


그림 2. 제안된 모델의 항복면과 경계면

력면에서는 원형을 나타낸다. 항복면은 원형으로 단순한 형태이지만, 항복면의 중심 위치가 자유로워서 소성 유동이 일어나기 편리하다. 따라서 항복면은 식 (2a)와 같이 나타난다. 식 (2b)에서는 응력축에 대한 방사경로 (radial path)에 한하여 응력 불변수를 이용하여 단순화하였다.

$$f = \|s - \alpha\|^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}r^2 = 0 \quad (2a)$$

$$f = (q - \alpha)^2 - r^2 = 0 \quad (2b)$$

여기서

- $\sigma = p\mathbf{1} + s$  Cauchy 응력텐서
- $p = \frac{1}{3}\text{tr}(\sigma)$  체적응력 불변수
- $s$  축차응력 텐서
- $\mathbf{1}$  Kronecker delta
- $q = \sqrt{\frac{3}{2}}\|s\|$  축차응력 불변수
- $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\alpha\|$  항복면 중심응력 불변수

**REMARK 1.** 항복면은 응력공간에서 콘 형상으로 나타나지만 콘 형상은 항복면의 가상적인 형태를 기하학적으로 설명하는데 필요할 뿐이다. 실제 소성유동은 축차응력공간이나 경계면의 크기로 규준화된 축차응력공간에서 일반 등방경화규칙에 의거하여 일어나므로 원형 또는 원통형으로 간주해야 한다. 따라서 항복면의 체적응력에 대한 도함수를 가지지는 않는다.

사질토의 구성모델의 경우에는 축차응력 공간에서 항복이 일어나도록 모델하는 것이 편리하다. 이에 상응하는 상동응력은 축차응력 성분으로 나타난다. 특히 가 일정한 압축경로에서 상동응력이 정의되도록 다음과 같이 가정한다.

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{3}}q_0\mathbf{n}_0, \quad q_0 = kp \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{n}_0 = \xi/\|\xi\|$ 인 단위텐서이며  $q_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\xi\|$ 이다. 그리고  $k = q_i/p_i$ 이며 초기 축차응력 및 체적응력의 비를 의미하고 일정한 값으로 가정한다.

**REMARK 2.**  $k = q_0/p$ 는 Dafalias(1986)의 사상중심을 약간 변형한 형태이다. 그리고  $k$ 는 이동경화규칙이 적용되는 내부변수로 활용될 수 있다. 즉 적절한 개념에 의거하여 구체적인 함수  $k = \hat{k}(\epsilon^p)$ 로 정의할 수 있다. 본 연구에서  $k$ 가 일정하고 초기응력에 의하여 결정된 것은 커다란 가정이다. 이는 등방압축과  $K_0$  압축 조건시  $q_0$ 를 구분하기 위한 의도이다. 이러한 시도는 모델을 단순화하여 실용적으로 적용하기 편리하도록 하는 장점이 있다. 즉 등방압축 직후  $k=0$ 이며 항복면은 한 점에서 비롯된다. 그리고  $K_0$  압축 직후에  $k=(q_i/p_i)_{K_0}$ 이며 항복면은 마찬가지로 한 점에서 비롯된다. 반면 압축과정과 전단과정을 일관적으로 모델하기에는 부적절하다. 따라서 수치적으로 적용할 경우에 압축과정 및 조건에 따라 나타나는 응력 및 내부변수의 초기값들은 직접 입력하여야 한다.

취성을 나타내는 흙의 거동을 표현하기 위하여 두 가지 파괴규준이 필요하다. 먼저 잔류강도를 의미하는 한계상태 강도는

$$q = Mp \quad (4)$$

로 정의하며  $M$ 은 한계상태 강도정수이다.

경계면은 침투강도를 표현하기 위하여 간극비에 따라 변화한다. 경계면은 다음 식으로 정의한다.

$$F = \|\mathbf{s}^*\|^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}R^2 = 0 \quad (5a)$$

$$F = q^{*2} - R^2 = 0, \quad R = M^* p \quad (5b)$$

여기서

- $\mathbf{s}^*$       동일 체적응력에 대하여 경계면으로의  
          사상된 축차응력 텐서
- $q^* = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathbf{s}^*\|$     사상된 축차응력 불변수
- $M^*$       가상 첨두응력비

식 (1)에서 경계면의 중심은 축차응력항이 0이며 식 (3)을 대입하면 다음과 같이 항복면의 중심을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\alpha = q_0(1-r/R) \quad (6)$$

가상 첨두응력비  $M^*$ 는 첨두강도를 나타내는 변수로 가상적인 첨두 축차응력과 체적응력의 비를 나타낸다. 이를 이용하여 취성이 나타나는 상태에서는 연화거동(softening)을 모델하고 연성 상태에서는 경화거동(hardening)을 나타내며 최종상태에서는 한계상태 잔류강도를 모델한다. 이를 위하여  $M^*$ 는 다음과 같이 정의된다(Li와 Dafalias, 2000).

$$M^* = M e^{-n\psi}, \quad \psi = e - e_{cr} \quad (7)$$

여기서,  $n$ 은 계수이며, 그리고  $e_{cr}$ 은 한계상태 간극비이며 체적응력  $p$ 에 의존한다.

$$e_{cr} = \lambda p^{-l} \quad (8)$$

여기서,  $\lambda$ 와  $l$ 은 한계상태 간극비를 조절하는 계수이다.

식 (7)에 나타난  $\psi$ 는 그림 3과 같이 현재 간극비와 한계상태 간극비와의 상대위치를 정의하는 상태변수이

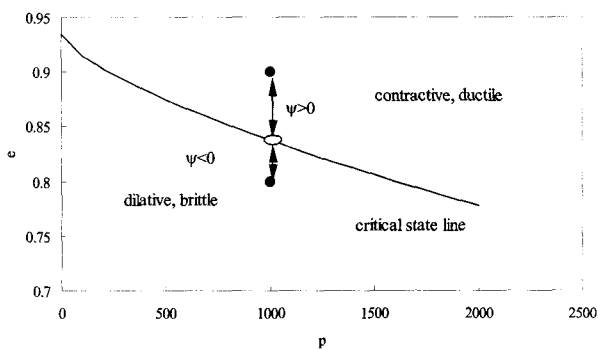


그림 3. 상태변수

다.  $\psi < 0$ 이면 취성적인 거동을 나타내며  $M^* > M$ 이고,  $\psi > 0$ 이면 연성적인 거동을 보이며  $M^* < M$ 은 보다 작다.  $\psi = 0$ 이면 한계상태에 도달하며  $M^* = M$ 이다.

그림 4에서는 제안된 모델에서 나타나는 체적응력에 따른 간극비의 변화를 나타낸다. 초기에  $\psi < 0$ 이면 간극비가 증가하며  $\psi > 0$ 인 경우에는 간극비가 감소하면 한계상태에 도달한다. 한계상태 간극비는 식 (8)에 의하여 정의된다.

그림 5와 같이  $\eta \equiv q/p$ 와  $\psi$  축에서 나타나는 모델경로는 상태변수  $\psi < 0$ 이면  $\eta$ 가 증가함에 따라  $\psi$ 는 증가하며 0에 접근하여 한계상태에 도달한다. 반면 초기에  $\psi > 0$ 이면  $\eta$ 가 증가함에 따라  $\psi$ 는 감소하며 한계상태에 도달한다. 각각에 대하여  $\eta$ 는 서서히  $M^*$ 에 접근하며 최종적으로 한계상태에 도달한다. 이 때 식 (7)에 나타나는  $M^*$ 는 한계상태에 접근하는 부분에서 여러 실험 경로들이 접근하는 대표 곡선으로 유일하게 결정한다.

유동규칙(flow rule)은 다음 식으로 정의한다.

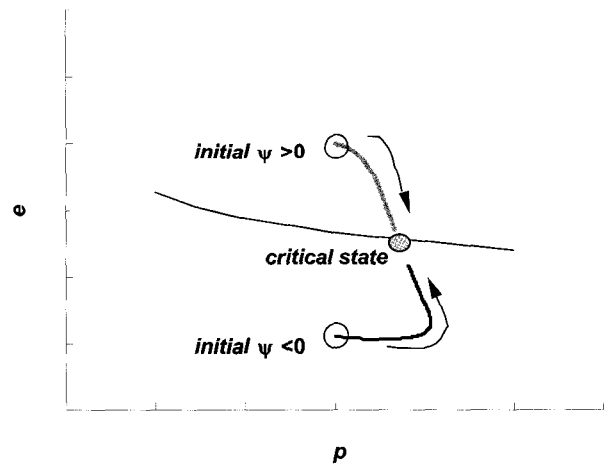


그림 4. p-e 경로

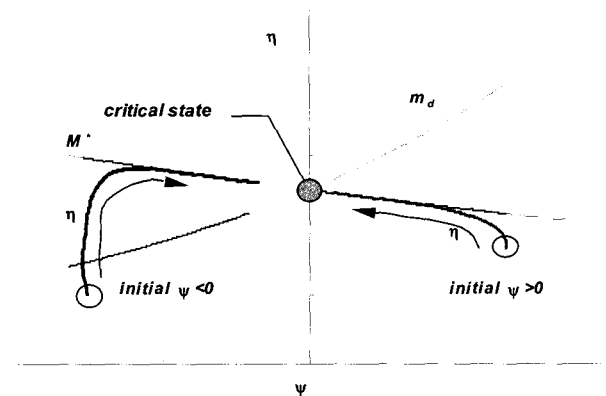


그림 5.  $\eta$ 에 따른  $M^*$ 와  $m_d$

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p \left( \frac{1}{3} D \mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{n} \right) \quad (9)$$

여기서

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &= \frac{1}{3} \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\bar{\epsilon}}^p \mathbf{n} && \text{소성변형률 증분텐서} \\ \dot{\epsilon}_v^p &= \text{tr}(\dot{\epsilon}^p) && \text{소성 체적변형률 불변수} \\ \dot{\bar{\epsilon}}^p &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \dot{\epsilon}^p - \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_v^p \mathbf{1} \right\| && \text{소성 축차변형률 불변수} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{s} - \alpha}{\|\mathbf{s} - \alpha\|} && \text{소성축차변형률의 방향 단위텐서} \\ D &\equiv \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\bar{\epsilon}}^p} && \text{팽창율(dilatancy)} \end{aligned}$$

이 때 팽창율(dilatancy)은 소성 체적변형률과 축차변형률의 증분 비율을 나타내는 것으로 다음과 같이 정의된다(Li and Dafalias 2000).

$$D = \frac{d_0}{M} (m_d - \eta), \quad m_d = M e^{m\psi} \quad (10)$$

여기서  $d_0$ 와  $m$ 은 팽창율을 조절하는 계수이다.

식 (10)에서 보여지듯이  $\eta < m_d$ 이면 소성 체적변형률 변화는 압축이 일어나고,  $\eta > m_d$ 이면 팽창이 일어난다. 그림 5와 같이  $\eta$ - $\psi$  축에서 나타나는 경로에서 상태변수  $\psi$ 가 초기에 0보다 작을 때,  $\eta$ 가 증가함에 따라  $\psi$ 가 초기에는 다소 감소하다가 다시 증가하는데 이러한 전환부를 지나도록  $m_d$ 를 결정한다.

경화규칙(hardening rule)은 다음과 같다(오세봉 등 2000).

$$\bar{\epsilon}^p = a \frac{(r/R)^b}{(1-r/R)^c} \quad (11)$$

여기서,  $\bar{\epsilon}^p$ 는 단순재하(monotonic loading)구간내에서  $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ 를 적분한 양이며  $a, b, c$ 는 소성 축차변형률과 관련된 계수이다.

그림 6에서는 소성 축차변형률에 따른 항복면의 반경  $r$ 과 경계면의 반경  $R$ 의 변화를 보여준다. 변형률이 증가함에 따라  $r$ 은 서서히  $R$ 에 접근하여 변형률 수준이 높은 경우에는 거의 일치하는 경향을 나타낸다. 이는 경화함수 (11)에 의하여 항복면이 경계면에 접근하는 과정을 의미한다. 초기에  $\psi < 0$ 이면 축차변형률이 증가함에 따라  $R$ 과  $r$ 은 첨두값을 나타내며 그 이후 서서히 감소한다. 초기에  $\psi > 0$ 이면  $R$ 과  $r$ 은 서서히 증가하는 양상을 나타낸다.  $K_0$ 압축 삼축시점시 경로에서도 초기 항복면

은 한 점이므로 그 크기는 0에서 시작한다.

그림 7에서는 축차변형률에 따른  $\eta$ 와  $M^*$ 의 변화를 보여준다. 이 예는  $K_0$ 압축 삼축시점에 대한 모델이므로 초기  $\eta$ 가 0이 아닌 값을 가진다. 축차변형률이 증가함에 따라  $\eta$ 는 서서히  $M^*$ 에 접근하여 변형률 수준이 높은 경우에는 거의 일치하는 경향을 나타낸다. 이는 경화함수 식 (11)에 의하여 항복면이 경계면에 접근하는 과정을 의미한다. 초기에  $\psi < 0$ 이면 축차변형률이 증가함에 따라  $M^*$ 는 감소하고  $\eta$ 는 첨두값을 나타내며 그 이후 서서히 감소한다. 초기에  $\psi > 0$ 이면  $M^*$ 는 증가하며  $\eta$ 도 서서히 증가하는 양상을 나타낸다.

탄성거동은 등방적이고 체적계수  $K$ 와 전단계수  $G$ 가 일정하다고 가정한다. 속도형식의 탄소성 구성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K \left( 1 - \frac{L_1}{H} g_{,p} \right) & -\frac{KL_2}{H} g_{,p} \\ -\frac{3GL_1}{H} g_{,q} & 3G \left( 1 - \frac{L_2}{H} g_{,q} \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\bar{\epsilon}} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

자세한 유도과정은 부록에 수록되어 있다.

전단계수  $G$ 는  $G_{max}$ 로부터 구하며 초기체적응력에 따

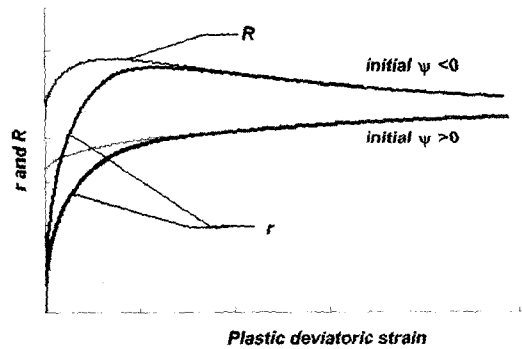


그림 6. 소성 축차변형률에 따른 항복면과 경계면의 반경

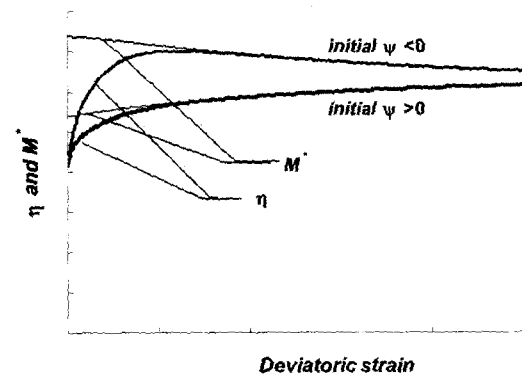


그림 7.  $\eta$ -축차변형률 관계

라 선형적으로 비례하는 것으로 가정하여 식 (13)과 같은 관계를 적용하였다.

$$G \equiv G_{\max} = g_0 + g_1 p_i \quad (13)$$

여기서,  $g_0$ 와  $g_1$ 은 상수이며  $p_i$ 는 압밀후 체적응력이다. 포아송비  $\nu$ 는 일반적으로 응력상태 및 간극비에 따라 변화하는 것으로 알려졌지만 지반재료의 경우 탄성 변형률이 소성변형률에 비하여 전체 거동에 큰 영향을 미치지 않으므로 일정하다고 가정하였다. 이를 이용하여 탄성 체적계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} G \quad (14)$$

따라서 배수 삼축시험경로의 구성관계는 식 (12)로부터  $\dot{q}/\dot{p}=3$ 이라는 조건을 적용함으로써 쉽게 구할 수 있다.

### 3. 모델 계수 추정과정

제안된 모델을 구현하기 위하여 삼축시험을 수행하였을 경우에 필요한 자료는 (1) 축차응력-축차변형률 관계 (2) 체적변형률-축차변형률 관계 (3) 간극비-체적응력 관계이며, 미소변형 조건에서의 거동을 포함하기 위해서는 미소변위 측정을 필요로 한다.

식 (7)에 나타난 가상 침투응력비  $M^*$ 는 침투강도를 나타내는 변수로 계수  $n$ 과 한계상태 강도정수  $M$ 이 필요하다. 이러한 계수들은  $\eta$ - $\psi$  축에서 나타나는 실험적인 경로의 상부를 수렴하는 곡선으로부터 결정한다. 그리고 한계상태 간극비  $e_{cr}$ 은 최종상태에서 정의한 후 한계상태 간극비와 체적응력 관계에서 계수  $\lambda$ 와  $l$ 을 구한다 (식 (8)). 팽창율(dilatancy)  $D$ 를 정의하기 위해서는 계수  $d_0$ 와  $m$ 이 필요하며 (식 (10)), 실험치에서 나타나는 소성체적변형률과 소성축차변형률의 비율로부터 구한다.

경화규칙(hardening rule)은 항복면 크기와 경계면 크기의 비율로 나타나며 소성 축차변형률과 관련된 계수  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 를 구해야 한다. 따라서 시험조건에 따라 항복면 크기의 비와 소성 축차변형률을 구한 후 회귀분석하여 구할 수 있다.  $K_0$  압축 삼축시험시 항복면 및 경계면의 크기는 다음과 같다.

$$r = q - q_0, \quad q_0 = kp, \quad k = \frac{3(1-K_0)}{1+3K_0} \quad (15)$$

여기서,  $k$ 는  $K_0$  압축 완료시 축차응력과 체적응력의 비  $\eta_i \equiv q_i/p_i$ 로부터 결정하며 일정하다고 가정한다. 등방 압축시에는 0이 된다. 그리고 축차변형률은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^e, \quad \bar{\epsilon} = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3), \quad \bar{\epsilon}^e = \frac{q - q_i}{3G} \quad (16)$$

동반논문(오세봉 등 2004)에서는 이러한 절차를 체계적이고 합리적으로 수행할 수 있도록 유전자 알고리즘(박현일과 이승래 2003)을 이용한 모델계수 추정과정을 소개할 것이다.

### 4. 결론

본 연구에서는 사질토의 취성적 응력-변형률 관계와 전단시 체적팽창을 고려할 수 있는 구성모델을 제안하였다. 제안된 모델은 일반 등방경화규칙에 의거한 비등방 경화규칙을 적용하였다. 항복면은 응력공간에서 원통형으로 나타나며 유동규칙은 팽창률을 이용하여 정의하였다. 또한 가상적인 침투응력비를 정의하여 취성적 응력-변형률 관계를 모델하는 것이 가능하였다. 그리고 제안된 구성모델은 수학적 정식화를 한 후 프로그램을 구현하였다. 동반논문(오세봉 등 2004)에서는 유전자 알고리즘을 통한 계수산정 과정을 제안하고 삼축시험결과와 비교하여 제안된 모델을 검증할 것이다.

### 감사의 글

본 연구는 과학재단 목적기초 연구과제 “전체 변형률 범위( $10^{-4} \sim 10\%$ )에서 풍화토 지반구조물 변형거동 평가를 위한 실험·해석 통합시스템 연구”의 일부로 재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

### 참고 문헌

1. 박현일, 이승래 (2003), “장비하중을 받는 매립지 사면 차수 시스템 설계를 위한 유전자 알고리즘의 적용”, 한국지반공학회지, 제19권, 제6호, pp.99-106.
2. 오세봉, 권기철, 김동수, 정순용 (2000), “미소변형률 및 대변형률 조건의 거동에 대한 비등방경화 탄소성 구성모델”, 한국지반공학회지, 제16권, 제1호, pp.65-73.

3. 오세봉, 박현일, 김욱, 권유근 (2004), "사질토의 체적팽창을 고려한 비등방경화 구성모델 : II. 검증", 한국지반공학회지, 제20권, 제6호, pp.85-94.
4. 이승래, 오세봉 (1995), "일반 등방경화규칙에 의거한 점토의 비등방 탄소성 구성모델", 한국지반공학회지, 제10권, 제3호, pp.17-32.
5. Been, K and Jefferies, M. B. (1985), "A State Parameter for Sand", *Geotechnique*, 35, pp.99-112.
6. Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. (1976), "Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity", *J. of Applied Mechanics Div.*, ASME, 43, pp.645-651.
7. Dafalias Y. F. (1986), "Bounding Surface Plasticity. I: Mathematical Formulation and Hypoplasticity", *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 112, pp.966-987.
8. Gajo, A. and Wood, D. M. (1999), "Severn-Sand: A Kinematic-Hardening Constitutive Model: the q-p formulation", *Geotechnique*, 49, pp.595-614.
9. Jefferies, M. B. (1993), "Nor-Sand: A Simple Critical State Model for Sand", *Geotechnique*, 43, pp.91-103.
10. Li, X. S. and Dafalias, Y. F. (2000), "Dilatancy for Cohesionless Soils", *Geotechnique*, 50, pp.449-460.
11. Manzari, M. T. and Dafalias, Y. F. (1997), "A Critical State Two-Surface Plasticity Model for Sands", *Geotechnique*, 47, pp.255-272.
12. Roscoe, K. H., and Burland, J. B. (1968), "On the Generalized Stress-Strain Behavior of 'Wet' Clay", in *Engineering plasticity*, J. Heyman and Leckie (Eds.) Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp.535-609.
13. Wood, D. M., Belkheir, K. and Liu, D. F. (1994), "Strain Softening and State Parameters for Sand Modelling", *Geotechnique*, 44, pp.335-339.

(접수일자 2004. 3. 12, 심사완료일 2004. 7. 20)

## 부록 수학적 정식화

### A.1 일관조건(consistency condition)

일관조건은 다음 식으로 나타난다.

$$\dot{f} = f_{,q} \dot{q} + f_{,r} \dot{r} + f_{,\alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (\text{A.1})$$

여기서 식 (2)로부터

$$f_{,q} = 2(q - \alpha), \quad f_{,r} = -2r, \quad f_{,\alpha} = -2(q - \alpha) \quad (\text{A.2})$$

이고  $y_{,x} = \partial y / \partial x$  로 정의할 수 있다.

내부변수  $r = \hat{r}(R, \bar{\varepsilon}^p)$  로 다음과 같이 미분된다.

$$\dot{r} = r_{,R} \dot{R} + r_{,\bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (\text{A.3})$$

식 (11)로부터

$$r_{,R} = \frac{Rr}{ab(r/R)^{b-1} + c(1-r/R)^{c-1} \bar{\varepsilon}^p},$$

$$r_{,\bar{\varepsilon}^p} = \frac{R(1-r/R)^c}{ab(r/R)^{b-1} + c(1-r/R)^{c-1} \bar{\varepsilon}^p} \quad (\text{A.4})$$

이다.

그리고 항복면의 중심  $\alpha = \hat{\alpha}(r/R, p)$  에 대한 도함수는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\dot{\alpha} = \alpha_{,p} \dot{p} + \alpha_{,\bar{\varepsilon}^p} \dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (\text{A.5})$$

식 (6)으로부터

$$\alpha_{,p} = q_{0,p} (1-r/R), \quad q_{0,p} = k, \quad \alpha_{,\bar{\varepsilon}^p} = -(q_0/R) r_{,\bar{\varepsilon}^p} \quad (\text{A.6})$$

식 (5b)와 (7)로부터 경계면의 반지름  $R = \hat{R}(p, \psi)$  과 상태변수  $\psi = \hat{\psi}(p, \varepsilon_v)$  는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$R = M e^{-n\psi} p, \quad \psi = e - e_{cr} = e_0 - (1+e_0)\varepsilon_v - \lambda p^{-1} \quad (\text{A.7})$$

따라서 그 도함수는 다음과 같이 나타난다.

$$\dot{R} = R_{,p} \dot{p} + R_{,\psi} \dot{\psi}, \quad \dot{\psi} = \psi_{,p} \dot{p} + \psi_{,\varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v \quad (\text{A.8})$$

여기서

$$R_{,p} = M e^{-n\psi}, \quad R_{,\psi} = -n M p e^{-n\psi},$$

$$\psi_{,p} = \lambda p^{-1-1}, \quad \psi_{,\varepsilon_v} = -(1+e_0) \quad (\text{A.9})$$

식 (A.1)는 식 (A.3), (A.5)와 (A.8)을 대입하면 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\dot{L} + (f_{,r} r_{,R} R_{,p} + f_{,r} r_{,R} R_{,\psi} \psi_{,p} + f_{,\alpha} \alpha_{,p}) \dot{p} + f_{,r} r_{,R} R_{,\psi} \psi_{,\varepsilon_v} \dot{\varepsilon}_v + (f_{,r} r_{,\bar{\varepsilon}^p} + f_{,\alpha} \alpha_{,\bar{\varepsilon}^p}) \dot{\bar{\varepsilon}}^p = 0 \quad (\text{A.10})$$

여기서

$$\dot{L} = f_{,q} \dot{q} \quad (\text{A.11})$$

이로부터

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{L}}{H} \quad (\text{A.12})$$



여기서

$$H = -(f_{,r} r_{,\varepsilon^p} + f_{,\alpha} \alpha_{,\varepsilon^p}) \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{\bar{L}} = \dot{L} + L_p \dot{p} + L_v \dot{\varepsilon}_v \quad (\text{A.14})$$

$$L_p = f_{,r} r_{,R} R_{,p} + f_{,r} r_{,R} R_{,\psi} \psi_{,p} + f_{,\alpha} \alpha_{,p} \quad (\text{A.15})$$

$$L_v = f_{,r} r_{,R} R_{,\psi} \psi_{,\varepsilon_v} \quad (\text{A.16})$$

이다.

### A.2 유동규칙(flow rule)

식 (9)의 유동규칙은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}^p \mathbf{M} \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{3} g_{,p} \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} g_{,q} \mathbf{n} \quad (\text{A.18})$$

$$g_{,p} = D, \quad g_{,q} = 1 \quad (\text{A.19})$$

식 (A.12)는 체적성분과 축차성분에 대하여 다음과 같이 구분될 수 있다.

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{\dot{\bar{L}}}{H} g_{,p}, \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{\dot{\bar{L}}}{H} g_{,q} \quad (\text{A.20})$$

### A.3 탄소성 응력-변형률 관계

체적 및 축차성분으로 구분된 속도형식 구성관계는 다음과 같다.

$$\dot{p} = K(\dot{\varepsilon}_v - \dot{\varepsilon}_v^p) \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{q} = 3G(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (\text{A.22})$$

식 (A.20)을 대입하면

$$\dot{p} = K \left( \dot{\varepsilon}_v - \frac{\dot{\bar{L}}}{H} g_{,p} \right) \quad (\text{A.23})$$

$$\dot{q} = 3G \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\bar{L}}}{H} g_{,q} \right) \quad (\text{A.24})$$

이다.

식 (A.24)에  $f_{,q}$ 를 양변에 곱하고 식 (A.14)를 대입하면 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{\bar{L}} - L_p \dot{p} - L_v \dot{\varepsilon}_v = 3G f_{,q} \dot{\varepsilon} - 3G \frac{\dot{\bar{L}}}{H} g_{,q} f_{,q} \quad (\text{A.25})$$

윗 식에 식 (A.24)를 대입한 후 양변을 정리하면

$$\dot{\bar{L}} \left( 1 + 3G f_{,q} g_{,q} / H + K L_p g_{,p} / H \right) = (K L_p + L_v) \dot{\varepsilon}_v + 3G f_{,q} \dot{\varepsilon} \quad (\text{A.26})$$

이다. 따라서

$$\dot{\bar{L}} = \frac{L_1 \dot{\varepsilon}_v + L_2 \dot{\varepsilon}}{\bar{H}} H \quad (\text{A.27})$$

이다. 여기서

$$\bar{H} = H + 3G f_{,q} g_{,q} + K L_p g_{,p} \quad (\text{A.28})$$

$$L_1 = K L_p + L_v, \quad L_2 = 3G f_{,q} \quad (\text{A.29})$$

이다.

이로부터 식 (A.27)을 식 (A.21)과 (A.22)에 대입하면 탄소성 응력-변형률 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\dot{p} = K \dot{\varepsilon}_v - K g_{,p} \frac{L_1 \dot{\varepsilon}_v + L_2 \dot{\varepsilon}}{\bar{H}}, \quad \dot{q} = 3G \dot{\varepsilon} - 3G g_{,q} \frac{L_1 \dot{\varepsilon}_v + L_2 \dot{\varepsilon}}{\bar{H}} \quad (\text{A.30})$$

이를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \left( 1 - \frac{L_1}{\bar{H}} g_{,p} \right) & -\frac{K L_2}{\bar{H}} g_{,p} \\ -\frac{3G L_1}{\bar{H}} g_{,q} & 3G \left( 1 - \frac{L_2}{\bar{H}} g_{,q} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_v \\ \dot{\varepsilon} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.31})$$