퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2004, Vol. 14, No. 5, pp. 557-562

불확실한 퍼지시스템의 견실한 혼합 H_2/H_∞ 필터 설계

Robust Mixed H_2/H_∞ Filter Design for Uncertain Fuzzy Systems

류석환* · 최병재*

Seog-Hwan Yoo and Byung-Jae Choi

* 대구대학교 전자정보공학부

요 약

이 연구는 T-S 퍼지시스템으로 모델 되는 비선형 시스템의 견실한 혼합 H_2/H_∞ 필터 설계문제를 취급한다. 플랜트에 포함된 다양한 종류의 불확실성을 취급하기 위하여 적분 2차 제약조건을 사용하였다. 필터 설계문제의 해가 존재할 충분조건을 볼록 최적화 기법을 사용하여 효과적으로 풀 수 있는 선형 행렬 부등식의 형태로 제시한다. 제시된 방법을 예시하기 위해서 수치 예를 보여준다.

Abstract

This paper deals with a robust mixed H_2/H_∞ filter design problem for a nonlinear dynamic system modeled as a T-S fuzzy system. Integral quadratic constraints are used to describe various kinds of uncertainties of the plant. A sufficient condition for solvability is given in terms of linear matrix inequality problem which can be efficiently solved using a convex optimization technique. In order to demonstrate the proposed method, a numerical design example is provided.

Key words : T-S fuzzy system, mixed H_2/H_∞ filter, linear matrix inequality, integral quadratic constraint

1. 서 론

필터는 제어시스템, 고장검출 시스템, 신호처리 등에서 중요한 도구로 사용되어 왔으며 따라서 지난 몇 십 년 동안 필터 설계에 관한 많은 연구가 수행되어 왔다.[1-6] 통상 필터 설계는 설계자가 설정한 성능지표를 최적화하거나 준 최적화하는 방법으로 많이 설계된다. 특히 외부 잡음의 주파수 특성이 기지인 경우에는 H_2 노옴으로 표현된 성능지수의 크기를 최소화하는 H_2 필터가 적절한 반면 잡음의 주파수 특성이 미지일 경우에는 잡음이 에너지가 유한하다는 단순한 가정 하에서 H_∞ 필터를 설계하는 것이 보편적이다. 1980년대 이후로 제어시스템의 견실성을 보장하기 위하여 도입된 H_∞ 제어이론이 급속히 발전하였고 이와 더불어 제어문제의 쌍대성 문제(dual problem)인 H_∞ 필터 설계이론도 급속히 발전하였다. 특히 선형행렬부등식(linear matrix inequality)의 해를 이용한 설계기법이 발전됨에 따라 여러 개의 목적함수를 충족시킬 수 있는 다목적 제어문제 혹은 필터설계 문제가 용이하게 해결되었다.[4,8]

플랜트의 동적 시스템에 불확실성이 포함되어 있을 때에는 불확실성으로 기인한 최악의 경우에도 성능지수의 크기를 적절한 값 이하로 유지시키는 견실한 필터의 설계가 바람직하며 많은 연구자들이 불확실성을 고려한 견실한 필터 설계에 관한 연구를 수행하여 왔다. 그러나 대부분의 경우 미지의 크기가 유한한 시변 파라메터 불확실성을 갖는 시스템의 견실한 필터 설계를 다룬 연구가 주류를 이루고 있어 [3,4,11,12] 시변 파라메터 불확실성 이외에 시간지연, 비선형 요소, 모델 되지 않은 동적 시스템 등의 불확실성을 포괄적으로 다룰 수 있는 견실한 필터 설계에 관한 연구가 필요하다.

비선형 동적 시스템의 H_∞ 필터 설계를 위해서는 아주 특별한 경우를 제외하고는 해를 구하기가 극히 어려운 비선형 Hamilton-Jacobi-Bellman 편미분 방정식을 풀어야 한다. 최근에는 이러한 비선형 시스템에 대한 어려운 점을 효과적으로 극복하기 위한 방편으로 비선형 시스템을 T-S(Takagi-Sugeno) 퍼지 시스템으로 모델하여 접근하는 방법이 많이 제시되고 있다. 통상의 모델과는 달리 T-S 퍼지 모델은 여러 가지 규칙을 정의하고 각각의 규칙에서는 선형시스템으로 모델하여 비선형 시스템의 전역적인 특성을 여러 개의 선형시스템의 조합으로 표현한다. 이러한 T-S 퍼지 모델에 기반하여 견실제어기법에 많이 사용하는 LMI를 이용한 여러 가지 설계법이 활발하게 수행되고 있다.[5,6,9]

본 연구에서는 불확실한 비선형 시스템의 혼합 H_2/H_∞ 필터를 설계하고자 하며 불확실성은 시변 파라메터 뿐만 아니라 시간지연, 비선형 요소, 모델 되지 않은 동적 시스템에 대한 불확실성을 포괄적으로 표현 가능한 적분 2차 제약조건(integral quadratic constraint, IQC)으로 표현한다. IQC로 표현 가능한 불확실성의 종류는 참고문헌 [7]에 상세히 기술되어 있다.

이 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서 견실한 필

접수일자 : 2004년 2월 10일
완료일자 : 2004년 5월 27일

터 설계문제를 정의하고 3절에서는 혼합 H_2/H_∞ 설계기법을 제시한다. 4절에서 수치 예를 통하여 3절에서 제시한 설계기법의 효용성을 보이고 5절에서 결론을 맺는다.

R^n은 차원의 실 벡터 공간을 나타내고 $R^{n\times m}$ 은 차원의 실수 행렬의 집합이다. 0_{nm} 과 I_n은 각각 차원의 영 행렬과 차원의 단위행렬을 의미하고 문맥상 차원을 쉽게 알 수 있는 경우에 간편을 위해 아래 첨자를 생략한다. 실수행렬 의 전치행렬을 z으로 나타내고 $M>0(M<0)$은 M이 양한정(음한정) 행렬을 의미한다. 블록행렬에서 (i,j)블록에서의 $*$는 (j,i)블록에 있는 행렬의 전치 행렬을 의미한다.

2. 견실한 혼합 H_2/H_∞필터 설계문제

다음 (1)과 같이 r 개의 규칙을 갖는 T-S 퍼지 모델로 표현되는 시스템을 생각한다.

플랜트 규칙 $i:(i=1,\cdots,r)$
IF $\rho_1(t)$ is M_{1i} and $\cdots$ and $\rho_g(t)$ is M_{gi}
THEN

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_ix(t)+B_iw(t)+\sum_{k=1}^{m}F_{ik}p_k(t)\\ z(t) &= Lx(t)\\ y(t) &= C_ix(t)+D_iw(t)+\sum_{k=1}^{m}G_{ik}p_k(t)\\ q_k(t) &= E_{ik}x(t)+J_{ik}w(t)+H_{ik}p(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $\rho_j(t)$와 M_{ji} $(j=1,\cdots,g)$는 각각 전제변수와 퍼지집합이고, $x(t)\in R^{n_x}$는 상태변수, $w(t)\in R^{n_w}$는 외부잡음, $z(t)\in R^{n_z}$는 추정할 대상 신호이고 $y(t)\in R^{n_y}$는 측정변수이다. 모든 행렬 $A_i,B_i,\cdots,H_{ik}$는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. $p(t)^T=[p_1(t)^T\ \cdots\ p_m(t)^T]$, $p_k(t)\in R^{p_k}$ 와 $q(t)^T=[q_1(t)^T\ \cdots\ q_m(t)^T]$, $q_k(t)\in R^{p_k}$, $k=1,\cdots,m$는 불확실성을 나타내기 위한 변수이며 다음의 (2)로 표현되는 IQC를 만족한다.

$$\int_0^\infty p_k(t)^Tp_k(t)dt\le\int_0^\infty q_k(t)^Tq_k(t)dt,\ \ k=1,\cdots,m \tag{2}$$

정규화된 소속함수 $\mu_i(\rho(t))$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_i(\rho(t))=\frac{h_i(\rho(t))}{\sum_{i=1}^{r}h_i(\rho(t))},\ \ h_i(\rho(t))=\prod_{j=1}^{g}M_{ji}(\rho_j(t)) \tag{3}$$

모든 $t\ge0$에서 $h_i(\rho(t))\ge0$이고 $\sum_{i=1}^{r}h_i(\rho(t))>0$이라 가정하면

$$\mu_i(\rho(t))\ge0,\quad \sum_{i=1}^{r}\mu_i(\rho(t))=1 \tag{4}$$

를 얻는다.

퍼지 시스템 (1)에서 $z(t)$의 추정치 $z_f(t)$를 구하기 위해 플랜트와 규칙의 수 뿐 만 아니라 모든 규칙에서의 전건부가 동일한 다음의 T-S 퍼지시스템으로 표현되는 필터를 설계한다.

필터 규칙 $i:(i=1,\cdots,r)$
IF $\rho_1(t)$ is M_{1i} and $\cdots$ and $\rho_g(t)$ is M_{gi}
THEN

$$\begin{aligned}\dot{x}_f(t) &= A_{fi}x_f(t)+B_{fi}y(t)\\ z_f(t) &= C_{fi}x_f(t)+D_{fi}y(t)\end{aligned} \tag{5}$$

여기에서 $x_f(t)\in R^{n_x}$는 필터 상태변수이고 $z_f(t)\in R^{n_z}$는 $z(t)$의 추정치이다.

간편성을 위하여 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}&\mu_i=\mu_i(\rho(t)),\ \ \mu^T=[\mu_1\ \cdots\ \mu_r],\\ &F_i=[F_{i1}\ \cdots\ F_{im}],\ \ G_i=[G_{i1}\cdots G_{im}],\\ &E_i^T=[E_{i1}^T\ \cdots\ E_{im}^T],\ \ J_i^T=[J_{i1}^T\ \cdots\ J_{im}^T],\\ &H_i^T=[H_{i1}^T\ \cdots\ H_{im}^T]\end{aligned}$$

시스템 (1)과 필터 (5)로 부터 오차시스템의 동적방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c(\mu)x_c(t)+B_c(\mu)w(t)+F_c(\mu)p(t)\\ e(t) &= z(t)-z_f(t)\\ &= C_c(\mu)x_c(t)+D_c(\mu)w(t)+G_c(\mu)p(t)\\ q(t) &= E_c(\mu)x_c(t)+J_c(\mu)w(t)+H_c(\mu)p(t)\\ &\int_0^\infty p_k(t)^Tp_k(t)dt\le\int_0^\infty q_k(t)^Tq_k(t)dt,\\ &k=1,\cdots,m\end{aligned} \tag{6}$$

여기에서 $e(t)$는 추정오차이고

$$\begin{aligned}x_c(t) &= [x(t)^T\ x_f(t)^T]^T,\\ A_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jA_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j\begin{bmatrix}A_i & 0\\ B_{fj}C_i & A_{fj}\end{bmatrix},\\ B_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jB_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j\begin{bmatrix}B_i\\ B_{fj}D_i\end{bmatrix},\\ F_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jF_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j\begin{bmatrix}F_i\\ B_{fj}G_i\end{bmatrix},\\ C_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jC_{cij}\\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j[L-D_{fj}C_i\ \ -C_{fj}],\\ D_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jD_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j(-D_{fj}D_i),\\ G_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jG_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j(-D_{fj}G_i),\\ E_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jE_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_j[E_i\ 0],\\ J_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jJ_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jJ_i,\\ H_c(\mu) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jH_{cij}=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i\mu_jH_i\end{aligned}$$

이라 정의한다.

이 연구에서는 $\gamma>0$이 주어 졌을 때 오차시스템 (6)이 IQC를 만족하는 모든 허용 가능한 불확실성에 대해서

(i) $x_c(0)=0$인 조건에서

$$\int_0^\infty e(t)^Te(t)dt\le\gamma^2\int_0^\infty w(t)^Tw(t)dt$$

를 만족하고

(ii) $w(t)\equiv0$인 조건에서 $\int_0^\infty e(t)^Te(t)dt$를 최소화하는 필터를 설계하고자 한다.

3. 필터 설계

이 절에서는 설계사양을 만족하는 필터가 존재할 충분조건을 제시하고 이 충분조건을 만족하는 필터를 볼록 최적화 기법을 이용하여 구하는 방법을 제시하고자 한다. 먼저 설계사양 (i)을 충족시키기 위한 충분조건을 보조정리1에 기술한다.

보조정리 1 : (4)를 만족하는 모든 μ에 대해 $L(\mu)<0$의 해 $P=P^T>0$와 $S=diag(\tau_1 I_{p_1},\cdots,\tau_m I_{p_m})>0$가 존재하면 시스템 (6)에서 $x_c(0)=0$ 일때

$\int_0^\infty e(t)^T e(t)dt \le \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t)dt$ 를 만족한다.

여기에서

$$L(\mu)=\begin{bmatrix} L_{11}(\mu) & * & * \\ L_{21}(\mu) & L_{22}(\mu) & * \\ L_{31}(\mu) & L_{32}(\mu) & L_{33}(\mu) \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} L_{11}(\mu) &= A_c(\mu)^T P + PA_c(\mu) + E_c(\mu)^T SE_c(\mu) \\ &\quad + C_c(\mu)^T C_c(\mu), \\ L_{21}(\mu) &= B_c(\mu)^T P + J_c(\mu)^T SE_c(\mu) + D_c(\mu)^T C_c(\mu), \\ L_{22}(\mu) &= -\gamma^2 I + J_c(\mu)^T SE_c(\mu) + D_c(\mu)^T D_c(\mu), \\ L_{31}(\mu) &= F_c(\mu)^T P + H_c(\mu)^T SE_c(\mu) + G_c(\mu)^T C_c(\mu), \\ L_{32}(\mu) &= H_c(\mu)^T SJ_c(\mu) + J_c(\mu)^T D_c(\mu), \\ L_{33}(\mu) &= -S + H_c(\mu)^T SH_c(\mu) + G_c(\mu)^T G_c(\mu) \end{aligned}$$

이다.

(증명) 오차 시스템 (6)에서 리아푸노프 후보 함수 $V(x_c(t))=x_c(t)^T Px_c(t)$를 정의한다. 행렬부등식 (7)과 리아푸노프 후보함수의 미분으로부터 다음의 적분식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \Big(e(t)^T e(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \frac{dV(x_c(t))}{dt} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \tau_i (q_i(t)^T q_i(t) - p_i(t)^T p_i(t) \Big) dt \\ &= \int_0^\infty \Big(e(t)^T e(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \frac{dV(x_c(t))}{dt} \\ &\quad + q(t)^T Sq(t) - p(t)^T Sp(t) \Big) dt \\ &= \int_0^\infty \zeta(t)^T L(\mu) \zeta(t) dt < 0 \end{aligned} \tag{8}$$

여기에서 $\zeta(t)=[x_c(t)^T \ w(t)^T \ p(t)^T]^T$이다.

S-과정[10]을 적분 부등식 (8)에 적용하면

$$\int_0^\infty \Big(e(t)^T e(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \frac{dV(x_c(t))}{dt} \Big) dt < 0 \tag{9}$$

를 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty (e(t)^T e(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)) dt \\ &\le \int_0^\infty \Big(e(t)^T e(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \frac{dV(x_c(t))}{dt} \Big) dt \\ &\quad - \lim_{t\to\infty} V(x_c(t)) + V(x_c(0)) \\ &< V(x_c(0)) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

의 관계를 얻는다. ■

다음의 보조정리 2는 $w(t)\equiv 0$인 조건에서 IQC를 만족하는 모든 불확실성에 대해 최악의 경우에 성취할 수 있는 $\int_0^\infty e(t)^T e(t)dt$의 상한치를 제시한다.

보조정리 2 : (4)를 만족하는 모든 μ에 대해서 $\overline{L}(\mu)<0$을 만족하는 $\overline{P}=\overline{P}^T>0$와 $\overline{S}=diag(\overline{\tau}_1 I_{p_1},\cdots,\overline{\tau}_m I_{p_m})>0$이 존재한다면 IQC를 만족하는 모든 불확실성에 대해 오차시스템 (6)은 $\int_0^\infty e(t)^T e(t)dt < x_c(0)^T \overline{P} x_c(0)$을 만족한다.

여기에서

$$\overline{L}(\mu)=\begin{bmatrix} \overline{L}_{11}(\mu) & * \\ \overline{L}_{21}(\mu) & \overline{L}_{22}(\mu) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \overline{L}_{11}(\mu) &= A_c(\mu)^T \overline{P} + \overline{P} A_c(\mu) + E_c(\mu)^T \overline{S} E_c(\mu) \\ &\quad + C_c(\mu)^T C_c(\mu), \\ \overline{L}_{21}(\mu) &= F_c(\mu)^T \overline{P} + H_c(\mu)^T \overline{S} E_c(\mu) \\ &\quad + G_c(\mu)^T C_c(\mu), \\ \overline{L}_{22}(\mu) &= -\overline{S} + H_c(\mu)^T \overline{S} H_c(\mu) + G_c(\mu)^T G_c(\mu) \end{aligned}$$

이다.

(증명) 리아푸노프 후보함수 $V(x_c(t))=x_c(t)^T \overline{P} x_c(t)$를 정의하여 정리1의 증명과 유사한 방법으로 증명 가능하며 생략한다. ■

보조정리 1과 2로부터 혼합 H_2/H_∞필터 문제의 해를 구하기 위해서는 행렬부등식 $L(\mu)<0$와 $\overline{L}(\mu)<0$의 제약조건 하에서 $x_c(0)^T \overline{P} x_c(0)$를 최소화하는 필터를 구하여야 한다. 그러나 이 경우 최적화 문제는 볼록 최적화 문제가 아니기 때문에 전역적인 최적해를 구하기가 아주 어렵다. 그러나 행렬부등식 $L(\mu)<0$의 해인 P와 S는 행렬부등식 $\overline{L}(\mu)<0$도 역시 만족하기 때문에 이러한 혼합 H_2/H_∞ 최적화 문제를 $L(\mu)<0$의 제약조건 하에서 $x_c(0)^T Px_c(0)$를 최소화하는 준최적해를 구한다.

행렬부등식 $L(\mu)<0$은 구하고자하는 결정변수(decision variable)인 A_{fj}, B_{fj}, C_{fj}, $D_{fj}(j=1,\cdots,r)$와 P, S가 선형으로 결합되어 있지가 않다. 따라서 [8]에서 제시한 바와 같이 적절한 변환을 통하여 행렬 부등식 $L(\mu)<0$을 결정변수에 선형인 행렬 부등식으로 변환한다. Schur 보수(complement)에 의해 $L(\mu)<0$는 $\Phi(\mu)<0$와 등가이다. 여기에서

$$\begin{aligned} \Phi(\mu) &= \begin{bmatrix} A_c(\mu)^T P + PA_c(\mu) & * & * & * & * \\ B_c(\mu)^T P & -\gamma^2 I & * & * & * \\ F_c(\mu)^T P & 0 & -S & * & * \\ C_c(\mu) & D_c(\mu) & G_c(\mu) & -I & * \\ SE_c(\mu) & SJ_c(\mu) & SH_c(\mu) & 0 & -S \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j \Phi_{ij} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\Phi_{ij}=\begin{bmatrix} A_{cij}^T P + PA_{cij} & * & * & * & * \\ B_{cij}^T P & -\gamma^2 I & * & * & * \\ F_{cij}^T P & 0 & -S & * & * \\ C_{cij} & D_{cij} & G_{cij} & -I & * \\ SE_{cij} & SJ_{cij} & SH_{cij} & 0 & -S \end{bmatrix}$$

모든 μ에 대해서 $\Phi(\mu)<0$을 만족할 충분조건은 다소 제한적(conservative)이기는 하지만 μ에 무관한 다음의 선형 행렬 부등식으로 표현할 수 있다.

$$\Phi_{ii}<0, \quad \Phi_{ij}+\Phi_{ji}<0, \ (i=1,\cdots,r, \quad j>i,\cdots,r) \tag{13}$$

선형행렬 부등식 (13)을 만족하는 퍼지 필터의 설계방법을 정리3에 기술한다.

정리 3 : $\gamma>0$ 이 주어 졌을 때 다음의 선형행렬 부등식 (14)-(16)을 만족하는 $Y=Y^T>0$, $Z=Z^T>0$, $\overline{A}_{fj}$, $\overline{B}_{fj}$, $\overline{C}_{fj}$, $\overline{D}_{fj}$, $(j=1,\cdots,r)$이 존재하면 필터 오차의 동적방정식에서 $\int_0^\infty e(t)^T e(t)dt \le \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t)dt$ 를 만족하는 필터가 존재한다.

$$Y-Z>0 \tag{14}$$

$$\Psi_{ii}<0, \ i=1,\cdots,r \tag{15}$$

$$\Psi_{ij}+\Psi_{ji}<0, \ i=1,\cdots,r \quad j>i,\cdots,r \tag{16}$$

여기에서

$$\Psi_{ij}=\begin{bmatrix} A_i^TY+YA_i+\overline{B}_{fj}C_i+C_i^T\overline{B}_{fj}^T & * & * & * & * & * \\ A_i^TY+C_i^T\overline{B}_{fj}^T+\overline{A}_{fj}^T+ZA_i & A_i^TZ+ZA_i & * & * & * & * \\ B_i^TY+D_i^T\overline{B}_{fj}^T & B_i^TZ & -\gamma^2 I & * & * & * \\ F_i^TY+G_i^T\overline{B}_{fj}^T & F_i^TZ & 0 & -S & * & * \\ L-D_{fj}C_i & L-D_{fj}C_i-\overline{C}_{fj} & -D_{fj}D_1 & -D_{fj}G_i & -I & * \\ SE_i & SE_i & SJ_i & SH_i & 0 & -S \end{bmatrix}$$

(증명) : 선형 행렬부등식 (13)의 해 P 를

$$P=\begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad P^{-1}=\begin{bmatrix} X & M \\ M^T & \hat{X} \end{bmatrix} \tag{17}$$

이라 정의하고 Π_1, Π_2를 다음과 같이 정의하면

$$\Pi_1=\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & M^TZ \end{bmatrix}, \quad \Pi_2=\begin{bmatrix} Y & Z \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$\Pi_2=P\Pi_1$이 됨을 쉽게 알 수 있다. 여기서 $Z=X^{-1}$이다. (17)의 정의로부터 $YX>I$을 만족해야 하므로 $Y-Z>0$을 얻는다. $L_{\Pi_1}=diag(\Pi_1, I, I, I)$라 정의하면 $\Phi_{ij}<0$는 $\Psi_{ij}=L_{\Pi_1}^T \Phi_{ij} L_{\Pi_1}<0$와 등가이다. 여기에서

$$\overline{B}_{fj}=NB_{fj}, \quad \overline{C}_{fj}=C_{fj}M^TZ, \\ \overline{A}_{fj}=NA_{fj}M^TZ, \quad \overline{D}_{fj}=D_{fj} \tag{19}$$

라 정의하였다. 증명 끝. ■

정리3에서 필터 오차의 동적시스템 (6)에서 H_∞노음 조건을 충족하는 필터가 존재할 충분조건을 제시하였다. 지금부터 혼합 H_2/H_∞필터의 설계법을 기술한다. 퍼지 혼합 H_2/H_∞필터는 선형행렬 부등식 (14)-(16)의 제약조건 하에서 H_2 가치함수 $x_c(0)^TPx_c(0)$를 최소화하여야 한다. 필터 상태변수를 $x_f(0)=0$으로 초기화하면 혼합필터문제는 선형행렬 부등식(14)-(16)의 제약조건 하에서 $x_c(0)^TPx_c(0)=x(0)^TYx(0)$를 최소화하는 최적화문제가 된다. 최적화 문제의 해에서 $Y>Z$이므로 $XY+MN^T=Z^{-1}Y+MN^T=I$를 만족하는 역행렬을 갖는 M과 N은 항상 구할 수 있다. 따라서 A_{fj}, B_{fj}, C_{fj}, D_{fj} $(j=1,\cdots,r)$는 식 (19)를 이용하여 $\overline{A}_{fj}$, $\overline{B}_{fj}$, $\overline{C}_{fj}$, $\overline{D}_{fj}$, $(j=1,\cdots,r)$로부터 구할 수 있다.

4. 수치 예

4절에서는 참고문헌 [9]에서 주어진 간단한 질량, 스프링, 마찰로 구성된 비선형 기계 시스템을 고려한다.

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+0.01x(t)+0.1x(t)^3=w_1(t) \\ y(t)=x(t)+w_2(t) \tag{20}$$

여기에서 m은 불확실한 질량, $c\frac{dx(t)}{dt}$는 운동 마찰항, $0.01x(t)+0.1x(t)^3$는 스프링에 관련된 비선형 항이며 $w(t)=[w_1(t) \ w_2(t)]^T$는 외부 잡음신호이다.

IQC가 파라메터 불확실성 뿐만 아니라 시간지연, 모델되지 않은 동적오차 등의 여러 가지 불확실성을 광범위하게 표현할 수 있지만 간편을 위해 (20)의 시스템에서 파라메터 불확실성만 고려한다. 질량 m과 운동마찰계수 c는 정확히는 모르지만 실제 질량 m은 공칭질량 $\overline{m}$의 10% 오차 범위 내에 있고 실제 운동마찰계수 c는 공칭 운동마찰계수 $\overline{c}$의 20% 오차 범위 내에 있다고 가정한다. 즉 $m=\overline{m}(1+0.1\delta_m)$, $c=\overline{c}(1+0.2\delta_c)$이고 $|\delta_m|<1$, $|\delta_c|<1$, $\overline{m}=1$, $\overline{c}=1$이다. $-1.5\le x(t)\le 1.5$라 가정하고 퍼지집합 M_{11}과 M_{21}을 $M_{11}=1-\frac{x(t)^2}{2.25}$과 $M_{21}=\frac{x(t)^2}{2.25}$으로 정의하면 (20)의 기계 시스템은 다음의 T-S 퍼지 시스템으로 변환할 수 있다.

플랜트 규칙 1 :
IF $x(t)$ is M_{11}
THEN

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+0.01x(t)=w_1(t) \\ y(t)=x(t)+w_2(t) \tag{21}$$

플랜트 규칙 2 :
IF $x(t)$ is M_{21}
THEN

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+0.235x(t)=w_1(t) \\ y(t)=x(t)+w_2(t) \tag{22}$$

다음 시스템 (21)과 (22)에서 불확실한 파라메터 m과 c를 IQC를 이용하여 표현한다. $F_l(M_1, \delta_m)$을 M_1과 δ_m의 하위 선형 분수변환(lower linear fractional transform)이라 정의할 때

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{0.1}{m}\delta_m(1+0.1\delta_m)^{-1} = F_l(M_1, \delta_m),$$
$$M_1 = \begin{bmatrix} 1/m & -0.1/m \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

임을 이용하여 다음과 같이 IQC를 갖는 선형시스템으로 나타낸다.

플랜트 규칙 1 :
IF $x(t)$ is M_{11}
THEN

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1x(t) + B_1w(t) + F_1p(t) \\ z(t) &= Lx(t) \\ y(t) &= C_1x(t) + D_1w(t) \\ q(t) &= E_1x(t) + H_1p(t) \end{aligned} \tag{23}$$

플랜트 규칙 2 :
IF $x(t)$ is M_{21}
THEN

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_2x(t) + B_2w(t) + F_2p(t) \\ z(t) &= Lx(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2w(t) \\ q(t) &= E_2x(t) + H_2p(t) \end{aligned} \tag{24}$$

여기에서

$$x(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.01 & -1 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.235 & -1 \end{bmatrix},\ B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix},\ L = [0\ 1],$$
$$C_1 = C_2 = [1\ 0],\ D_1 = D_2 = [0\ 1],$$
$$E_1 = \begin{bmatrix} -0.01 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} -0.235 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다.

$x(0) = [0.5\ 1.1]^T, \gamma = 1$일때, 선형행렬 부등식 (17)-(19)의 조건하에서 $x(0)^TYx(0)$를 최소화하는 준최적 H_2/H_∞필터를 다음과 같이 얻었다.

$$A_{f1} = 10^3\begin{bmatrix} -9.9131 & -5.4034 \\ -5.1953 & -2.8338 \end{bmatrix},$$
$$A_{f2} = 10^3\begin{bmatrix} -7.7060 & -4.2002 \\ -9.2384 & -5.0380 \end{bmatrix},$$
$$B_{f1} = \begin{bmatrix} -1.4203 \\ 0.7352 \end{bmatrix},\ B_{f2} = \begin{bmatrix} -1.4199 \\ 0.7350 \end{bmatrix},$$
$$C_{f1} = 10^3[-6.6879\ \ -3.6467],$$
$$C_{f2} = 10^3[-6.6871\ \ -3.6463],$$
$$D_{f1} \approx D_{f2} \approx 0$$

준최적 H_2/H_∞필터의 성능을 컴퓨터 모의실험을 하였으며 그 결과를 그림1에 나타낸다.

모의실험에서 $m = 1.09$, $c = 0.82$로 채택하였으며 $w(t) = [n(t)\ 0.01n(t)]^T$를 사용하였다. 여기에서 $n(t)$는 분산이 1인 정규 확률변수이다. 그림 1에서 점선은 $z(t)$를 나타내고 실선은 $z(t)$의 추정치 $z_f(t)$를 나타낸다. 통상적으로 설계하기 어려운 불확실한 비선형 시스템에서도 본 논문에서 제시한 퍼지 필터는 만족할 만한 성능을 얻을 수 있었다.

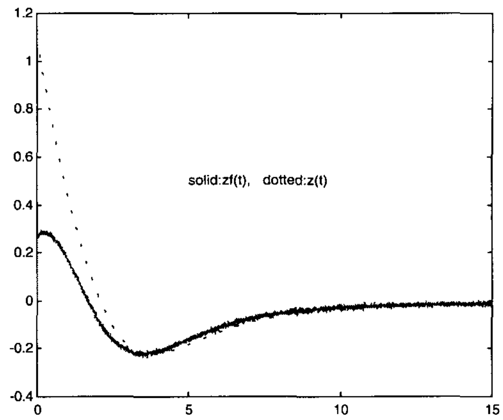

그림 1. 모의실험 결과
Figure 1. The simulation result

5. 결 론

본 논문에서는 불확실한 비선형 시스템에 대한 견실한 혼합 H_2/H_∞ 필터의 설계법을 제시하였다. 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 변환하고 불확실성은 파라메터 불확실성뿐만 아니라 모델 되지 않은 동적시스템에 대한 불확실성 등 여러 가지 불확실성을 포함하여 모델 가능한 IQC로 나타내었다. 필터 설계문제의 해가 존재하기 위한 충분조건을 제시하였으며, 필터는 상용 소프트웨어를 사용하여 쉽게 해결 가능한 LMI 제약조건을 가진 볼록 최적화문제의 해를 이용하여 설계할 수 있다. 간단한 기계계통을 예로 들어 모의실험을 수행하였으며 그 결과 불확실한 비선형 시스템에서도 만족할 만한 성능을 얻었다.

참 고 문 헌

[1] L. Xie, C.E.de Souza and Y.C.Soh, "Robust Kalman filter for uncertain discrete time systems," IEEE Trans. Automatic Control, vol.39, pp.1310-1314, 1994.

[2] Y. Theodor and U. Shaked, "Robust discrete time minimum variance filtering," IEEE Trans. Signal Processing, vol.44, pp.181-189, 1996.

[3] K.A. Barbosa and C.E.de Souza, "Robust H_2 filtering for discrete time uncertain linear systems using parameter dependent Lyapunov functions," Proceedings of the American control conference, Anchorage, AK, May 8-10, pp.3224-3229, 2002.

[4] R.M. Palhares and P.D. Peres, "LMI approach to the mixed H_2/H_∞ filtering design for discrete time uncertain systems," IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, vol.37, no.1, pp.292-296, Jan. 2001.

[5] C. Tseng and B. Chen, " Fuzzy estimation for a class of nonlinear discrete time dynamic systems," IEEE Trans. Signal Processing, vol.49, no.11,

pp.2605-2619, Nov. 2001.
[6] B. Chen, C. Tsai and D. Chen, "Robust H_∞ and mixed H_2/H_∞ filters for equalization designs of nonlinear communication systems : Fuzzy interpolation approach", IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.11, no.3, pp.384-398, Jun. 2003.
[7] A. Megretski and A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints," IEEE Trans. Automatic Control, vol.42, no.6, pp.819-830, Jun. 1997.
[8] C.W. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali," Multi-objective output feedback control via LMI optimization", IEEE Trans. Automatic Control, Vol.42, no.7, pp.896-911, Jul., 1997.
[9] K. Tanaka, T. Ikeda and H.O. Wang,"Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : Quadratic stabilizability, H_∞ control theory and linear matrix inequalities", IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.4, no.1, pp.111-13, Feb., 1996.
[10] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
[11] J. C. Geromel, "Optimal linear filtering under parameter uncertainty", IEEE Trans. on Signal Processing, vol.47, no.1, pp.168-175, January, 1999.
[12] H.D. Tuan, P. Apkarian and T. Q. Nguyen, "Robust filtering for uncertain nonlinearly parameterized plants", IEEE Trans. on Signal Processing, vol.51, no.7, July, 2003.

저 자 소 개

류석환(Seog-Hwan Yoo)
1975년 : 서울대학교 전기공학과 졸업.
1989년 : University of Florida 전기공학과 졸업(공학박사)

관심분야 : 견실제어, 지능제어, 모델간략화, 제어응용

Phone : 053-850-6621
Fax : 053-850-6619
E-mail : shryu@daegu.ac.kr

최병재(Byung-Jae Choi)
1987년 : 경북대학교 전자공학과 공학사
1989년 : 한국과학기술원 원자력공학과 공학석사
1998년 : 한국과학기술원 전기전자공학과 공학박사
1999~현재 : 대구대학교 전자정보공학부 교수

관심분야 : 지능시스템, 인공지능 이론 및 응용, 마이크로프로세서 응용