비버바흐 추측과 루퀴켕 추측에 대한 역사적 고찰

수원대학교 수학과 정문자
mjeong@suwon.ac.kr

이 논문에서는 두 추측, 사실로 판명된 비버바흐 추측과 옳지 않다고 판명된 루퀴켕 추측을 다루었다. 두 추측을 역사적으로 고찰하고 흥미로운 결과를 소개한다. 이들로부터 수학의 심오한 이론은 연속되는 추측의 결과임을 발견한다.

주제어 : 비버바흐 추측, 루퀴켕 추측

0. 서론

수학의 정리는 완벽한 증명을 거쳐 탄생하는 객관적 진리이며, 알려진 조그만 사실을 확장하여 더 큰 범위의 집합에서 성립할 수 있는지 끊임없이 의문을 가지며 연구한 결과로 얻어진다. 그 결과 어떤 경우는 추측이 사실로 판명되기도 하고, 어떤 경우는 추측이 성립하지 않기도 한다. 때론 며칠만에 해결되는 문제도 있으나 때에 따라서는 몇 십 년이 지나서 해결되기도 하고 미해결 난제로 남아있는 경우도 있다.

이 논문에서는 두 가지 추측인 비버바흐 추측(Bieberbach Conjecture)과 루퀴켕 추측(Lu Qi-Keng Conjecture)에 대하여 역사적으로 어떻게 연구되어 왔는지를 알아보고 흥미로운 결과를 소개하고자 한다.

1. 비버바흐 추측

리만(Riemann) 사상 정리에 의하면 복소평면 전체가 아닌 임의의 단순연결 평면영역에서 정의된 단엽함수를 단위원판 $\{z \in C : |z| < 1\}$에서 정의된 함수와 대응시킬 수 있다. 그러므로 $\{z \in C : |z| < 1\}$에서 정의된 단엽함수(Univalent function)의 대부분의 기하학적 정리들을 2개 이상의 경계점을 가진 임의의 단순연결 평면영역에서 정의된 단엽함수에 관한 정리로 쉽게 옮겨서 생각할 수 있으므로, 단엽함수의 정의역을

단위원판으로 제한해서 생각할 수 있다.

함수족 $S=\{f: f(z)$는 단위원판에서 해석적이고 단엽이며 $f(0)=0,\ f'(0)=1\}$에 속하는 모든 함수는 다음과 같은 형태로 표현된다.

$$f(z)=z+a_2z^2+a^3z^3+\cdots$$

이에 속하는 가장 대표적인 함수가 다음과 같은 쾨베(Koebe) 함수이다.

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\cdots$$

이 함수 k는 단위원판을 $-1/4$로부터 무한대까지의 음의 실수축 위의 반직선을 제외한 복소평면으로 사상시킨다.

모든 $f\in S$는 $f(0)=0$인 열린 사상이므로 f의 상은 원점을 중심으로 하는 어떤 원판을 포함하는데, 1907년 쾨베는 함수족 S에 속하는 모든 함수들의 상은 한 공통인 원판 $\{w\in C: |w|<r\}$을 포함한다는 것을 발견하였으며, 쾨베 함수에 의하여 $r\leq 1/4$임을 알 수 있었고, 비버바흐는 $r=1/4$임을 밝혔다

쾨베는 왜곡 정리(distortion theorem)를 증명함으로써 함수족 S가 컴팩트함을 보였다. 그러므로 모든 자연수 n과 모든 $f\in S$에 대하여 z^n의 계수의 크기에 대한 평등 유계가 있다는 점을 알 수 있다. 비버바흐가 1916년에 $|a_2|\leq 2$라는 사실을 증명함으로써 계수 a_2의 최대 유계를 얻었는데, 이는 다음과 같다.

정리. $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in S$라면, $|a_2|\leq 2$이다.

증명. 복소함수 $g(z)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\cdots}$$

그러면 g는 해석적이며 $g(0)=0,\ g'(0)=1$이다. 또한 g가 기함수라는 사실을 이용하여 g가 단엽함수임을 알 수 있다. 그러므로 $g\in S$이며, $g'''(0)=3a_2$이므로 $g(z)=z+(a_2/2)z^3+\cdots$이다. 로랑(Laurent) 급수 전개를 이용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)\left[1+\left(\frac{a_2}{2}\right)z^2+\cdots\right]}=z-\frac{a_2}{2}\frac{1}{z}$$

이는 영역 $\{z\in C: |z|>1\}$에서 일대일이고 해석적임을 알 수 있다. 또한 그로넬

(Gronwall)이 1914년에 얻은 면적 정리(area theorem)를 이용하면 $|a_2/2|^2 \le 1$, 즉 $|a_2| \le 2$임을 알 수 있다.□

다음 함수에 대해서는 등식 $|a_2|=2$가 성립한다.

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}=z+2e^{i\alpha}z^2+3e^{2i\alpha}z^3+\cdots=e^{-i\alpha}k(e^{i\alpha}z)$$

함수 f는 단위원판을 $-(1/4)e^{-i\alpha}$로부터 무한대까지의 반직선을 제외한 복소평면으로 사상시키는데, 이 함수의 성질을 토대로 하여 나온 비버바흐 추측은 다음과 같다.

비버바흐 추측: $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \in S$라면, 모든 계수 a_n은 부등식 $|a_n| \le n$을 만족시킨다.

함수족 S의 여러 부분족에 대해서는 위의 추측이 성립한다는 사실이 많이 알려졌으나, S에 대해서는 오랫동안 미해결 과제로 남아있었다. 예를 들면, 1915-1916년에 알렉산더(Alexander)에 의해 소개된 S에 속하며 원점에 관한 별모양(starlike)함수들의 집합족 S^*, 1931-1932년에 소개된 S에 속하며 계수가 실수인 함수족 P, 1952년에 카플란(Kaplan)이 소개한 볼록에 가까운(close-to-convex) 함수족 C 등은 S의 부분함수족이며 비버바흐 추측이 함수족들이다(참조 [1, 7]).

S에 대해서는 $n=2$인 경우 비버바흐가 1916년에 $|a_2| \le 2$임을 증명하였으며, $n=3$인 경우 S의 조밀부분집합은 편미분방정식의 해로부터 얻어질 수 있다는 뢰브너(Löwner)의 결과를 이용하여 1923년에 뢰브너가 $|a_3| \le 3$임을 증명하였다. $n=4$인 경우 1955년에 가라비디언(Garabedian)과 쉬퍼(Schiffer)가 매우 복잡한 방법으로 $|a_4| \le 4$임을 증명하였는데, 1960년에 카르진스키(Charzynski)와 쉬퍼가 1939년의 그룬스키(Grunsky)의 결과를 이용하여 아주 간단하게 $|a_4| \le 4$임을 보였다.

여기서 그룬스키의 결과는 아래와 같다(참조 [8]). $f \in S$이고 c_{nk}는 f의 계수 c_n의 다항식이라 할 때 다음과 같다고 하자.

$$\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_{nk}z^n\zeta^k,\quad |z|<1,\ |\zeta|<1$$

그러면 모든 정수 N과 모든 복소수 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}\lambda_n\lambda_k\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2 \tag{1}$$

그룬스키 부등식(1)은 기하학적 함수론에 매우 중요한 결과이다. 이어 1968년에 피더슨(Pederson)과 오자와(Ozawa)가 $|a_6|\le 6$임을 증명하였는데, 건너뛴 $n=5$에 대해서는 1972년에 피더슨과 쉬퍼가 그룬스키 부등식의 확장이라고 할 수 있는 1967년의 가라비디언 · 쉬퍼 부등식을 이용하여 $|a_5|\le 5$임을 증명하였고, 같은 해에 오자와와 쿠보타(Kubota)가 $|a_8|\le 8$임을 증명하였다(참조[2]). 그 후 고츠쉬(Gautschi)가 컴퓨터를 이용하여 $n\le 25$인 경우에 비버바흐 추측이 성립할 수 있는 조건을 얻었으며, 그 이외의 경우는 68년 동안 미해결 과제로 남아 있었고, 모든 계수에 대해 하나씩 풀어나가는 것이 결코 추측을 증명하는 방법이 되지 못했으나 이런 과정을 이용하여 복잡한 문제를 풀기 위한 아이디어를 얻는 계기가 마련되었다.

한편 계수 각각에 대하여 추측을 푸는 방법 이외에, $|a_n|\le Cn$이라는 부등식을 조사하는 방법도 연구되고 있었다. 1925년 리틀우드(Littlewood)는 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \in S$라면, f의 모든 계수 a_n은 부등식 $|a_n|\le en$을 만족시킨다는 사실을 증명하였다. 1956년 밀린(Milin)은 C가 1.243임을 얻었고, 피츠제럴드(FitzGerald)는 C가 1.081임을 얻었으며, 1978년 호로비츠(Horowitz)는 C를 1.066으로 낮추었다. 이것도 C에 대해서 조금씩의 진전만 있을 뿐이었다(참조[2, 7]).

드디어, 1984년 드브랑제(de Branges)가 비버바흐 추측이 성립한다는 사실을 증명하였는데, 이는 1923년 뢰브너가 했던 연구방법에 기초를 두고 있으며, 뢰브너의 이 방법은 계수를 포함하지 않는 문제에도 유용한 것이다. 예를 들면 $|z|$을 이용하여 $|\arg f'(z)|$의 유계를 구할 수 있다.

$f\in S$이고 $0<R<1$, $|z|<1$일 때 $g(z)=f(Rz)/R=z+a_2Rz^2+a_3R^2z^3+\cdots$라 하고, Γ를 무한대와 g의 치역의 경계를 잇고 경계 위의 출발점으로 돌아올 때까지 경계를 한 번 도는 호라고 하고 마지막 부분을 제거함으로써 Γ의 수축된 호(retracted arc)를 만든다. 단위원판에서 수축된 호의 여집합으로의 리만 사상은 어떤 $t\ge 0$에 대하여 $z=0$에 대한 급수표현 $e^tz+\cdots$를 가지며, 모든 $t\ge 0$에 대하여 수축된 호 Γ_t와 리만 사상 $f_t(z)=f(z, t)$는 유일하게 정의된다. 드브랑제가 사용한 뢰브너의 편미분방정식은 x가 $|x(t)|=1$을 만족시키는 연속함수일 때, 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,\ t)=\frac{1+x(t)z}{1-x(t)z}\,z\,\frac{\partial f}{\partial z}(z,\ t) \tag{2}$$

기하학적 구성으로부터 $g(z)=f(z, 0)$이므로 모든 $f(z, 0)\in S$는 정규수렴위상(normal convergence topology)에서 S의 조밀부분집합이 된다. 우연히도 이 편미분방정식은 팽창하는 유체의 흐름을 나타내고 그 흐름마다 정보를 줄 수 있다.

$c_k(t)$를 다음에 의해 정의된다고 하자.

$$\log \frac{f(z,\ t)}{e^t z} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\, z^k \tag{3}$$

그리고 이 식에 뢰브너의 편미분방정식을 이용하면 $t\to\infty$임에 따라 모든 k에 대해 $c_k(t)$가 유계임을 얻게 된다. 그는 $t\to\infty$임에 따라 모든 k에 대해 $c_k(t)$가 유계이면 레베데브(Lebedev)·밀린 부등식이 성립한다는 사실을 보였는데, 레베데브·밀린 추측에 의하면 레베데브·밀린 부등식이 로버트슨 추측(Robertson Conjecture)을 유도한다. 로버트슨 추측이란 f가 기함수이며 $f\in S$이면, 모든 $n=1, 2, \cdots$에 대하여 다음이 성립한다는 것이다.

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{2k-1}|^2 \le n$$

코시·슈바르츠 부등식에 의하여 로버트슨 추측은 비버바흐 추측을 유도한다.

비버바흐 추측은 드브랑제의 주요한 통찰력을 포함하여 통찰력이 집적됨에 따라 수학의 진전이 이루어진 경우라고 말할 수 있다. 또한 지금은 결과나 추측이 쓸모 없게 되었다 할지라도 대대수의 많은 단계들이 필요했고 중요했다는 것을 알 수 있다. 뢰브너의 이론은 널리 사용되어 왔고, 그룬스키 부등식은 몇 가지 계수측정과 해석적 확장이론을 유도하였고, 쉬퍼와 그외 수학자들에 의하여 발전된 여러 기법들은 많은 문제의 해법을 제공하였으며 드브랑제의 방법도 널리 응용될 것이다. 확실히 비버바흐 추측는 관련된 많은 추측을 탄생시켰고 새로운 기법의 아이디어를 얻고 테스트해 보는 기틀이 되었다.

2. 루퀴켕 추측

영역 $D\in C^n$에서의 버그만핵함수 $K(z, w)$는 반대칭 성질 $K(z, w)=\overline{K(w, z)}$을 가지고, $L^2(D)$에 포함되는 해석함수의 집합인 $H^2(D)$에 속하는 모든 f에 대하여 다음과 같은 재생 성질을 가진다.

$$f(z)=\int_D K(z, w) f(w)\, dV, \qquad z\in D$$

여기서 $K(\cdot, w)$는 해석함수이고 $K(z, \cdot)$는 공액해석함수인 유일한 함수이다. 버그만핵의 영점집합은 버그만핵의 변환공식(transformation formula)에 의해 쌍해석적 불변인 성질임을 알 수 있으므로, 버그만핵의 영점집합은 두 영역간의 쌍해석적 동형성을 찾는데 유용한 도구가 되리라 생각한다. 버그만핵의 구체적 계산을 이용하여 n차 복소공간 C^n에 속하는 구와 폴리디스크(polydisc)에서는 버그만핵이 영점을 갖지 않는다는 사실은 널리 알려져 있다. 이를 토대로 하여 1966년 루퀴겡이 제기한 다음의 추측이 스콰르진스키(Skwarczynski)에 의해 루퀴겡 추측이라 불리었다.

루퀴겡 추측: 모든 유계영역에서 버그만핵이 영점을 갖지 않는다.

그러나 이 추측은 너무 대담한 것이었으며, 1969년 스콰르진스키는 [13]에서 루퀴겡 추측이 성립하지 않는 원환의 예를 찾아내었다. 즉 원환 $\{z \in C : 0 < r < |z| < 1\}$에서 다음과 같은 버그만핵의 표현공식을 이용했다.

$$K(z, \bar{t}) = \frac{1}{q}\left(-\frac{1}{\log \rho} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q\rho^m}{(1-q\rho^m)^2} + \frac{(\rho/q)\rho^m}{(1-(\rho/q)\rho^m)^2}\right)$$

여기서 $q = z\bar{t}$, $\rho = r^2$, $0 < \rho < |q| < 1$이다. 그리고 다음과 같이 놓았다.

$$\phi(q) = -\frac{1}{\log \rho} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q\rho^m}{(1-q\rho^m)^2} + \frac{(\rho/q)\rho^m}{(1-(\rho/q)\rho^m)^2}$$

이때 $q \in R$ 이거나 $|q| = r$이면 $\phi(q) \in R$임을 보였다. 그리고 $\phi(q)$는 q의 연속함수이고 $q > 0$이면 $\phi(q) > 0$이며, $\rho < e^{-4}$이면 $q = -1$ 근방에서 $\phi(q) < 0$임을 보였다. 그러므로 $\phi(q)$는 $r < e^{-2}$인 경우 내점에서 영점을 가지게 된다. 즉 $r < e^{-2}$인 경우 버그만핵이 영점을 가지게 됨을 보였다. 더 나아가 로젠탈(Rosenthal)은 [12]에서 모든 원환에서 버그만핵이 영점을 갖는다는 것을 보였다.

그 후 쉬타(Suita)와 야마다(Yamada)는 [14]에서 단순연결 평면영역이 아닌 모든 매끄러운 유계 평면영역에서는 버그만핵이 영점을 갖는다는 것을 보였다. 그러므로 복소평면에서는 리만 사상에 의해 원판과 쌍해석적 동형(biholomorphically equivalent)인 단순연결 평면영역이어야만 버그만핵이 영점을 갖지 않음을 알 수 있다. 무한연결 평면영역에서는 버그만핵이 영점을 갖는지 안 갖는지 아직 알려진 바가 없다(참조 [5]).

고차원일 경우 그린(Greene)과 크란츠(Krantz)가 [9]에서 C^∞ 위상에서 구와 충분히 가까운 영역은 버그만핵이 영점을 갖지 않는다는 사실을 밝혔다. 또한 어떤 영역에서 적당한 기하적 조건을 만족시키고 버그만핵이 영점을 갖지 않으면 섭동

(perturbation)한 영역들도 모두 버그만핵이 영점을 갖지 않는다는 것이 밝혀졌다. 그러므로 루퀴켕 추측을 다음과 같이 변형할 수 있다(참조 [10]).

C^n 위의 위상적으로 자명한 영역에서는 버그만핵이 영점을 갖지 않는다.

그런데 놀랍게도 1986년 보아스(Boas)가 [3]에서 실해석 경계를 가지고 있으며 모든 타당한 부가적인 기하적 조건을 만족시키는 위상적으로 자명한 영역이면서도 버그만핵이 영점을 가지는 경우가 있음을 증명하였다.

보아스가 [3]에서 반례로 든 C^2에서의 영역을 구체적으로 알아보자. 우선 그는 다음과 같은 영역을 고려하였다.

$$D=\{(z, w)\in C^2 : |w|<(1+|z|)^{-1}\}$$

영역 D는 비유계이며 로그적 볼록인 완전 라인하트 영역(logarithmically convex complete Reinhardt domain)이다. D에서 정의되는 모든 해석함수는 D에서 수렴하는 멱급수전개를 갖는다. 극좌표계에서의 적분을 통하여 $L^2(D)$의 부분집합인 해석함수공간 $H^2(D)$의 수직기저는 $z^j w^k$ $(j<k)$들로 구성됨을 알 수 있다. 그러므로 $L^2(D)$에 속하는 모든 해석함수가 $w=0$일 때 0이 된다. 특히 D에서 버그만핵 함수도 영점을 갖는다. D와 원점에 중심을 둔 반지름 m인 구와의 공통부분을 D_m이라 하자. 라마다노브(Ramadanov)의 정리에 의하여 $m\to\infty$일 때 D_m에서의 버그만핵이 D에서의 버그만핵으로 컴팩트집합에서 평등수렴함을 알 수 있다. 후르비츠(Hurwitz)의 정리에 의하여 m이 충분히 크면 D_m에서의 버그만핵이 영점을 갖는다는 것을 알 수 있다. D_m은 루퀴켕 추측이 성립하지 않는 위상적으로 자명한 해석영역이다.

그렇다면 유계인 볼록영역에서는 루퀴켕 추측이 성립할 지 의문으로 남는다. 이어서 그는 또 [4]에서 버그만핵이 영점을 갖지 않는 영역인 루퀴켕 영역은 적당한 위상하에 어디에서도 조밀하지 않다는 사실을 증명하였다. 즉 기대와 달리 버그만핵이 영점을 갖는다는 것이 자연스러운 현상이라는 것이다. 구체적으로 말하자면 그는 동류인 강 유사볼록 영역(generic strongly pseudoconvex domain)에서는 버그만핵이 영점을 가짐을 보였다.

잇달아서 보아스와 푸(Fu) 및 스트라우브(Straube)가 [6]에서 차원의 축소(deflation)를 이용하여 다음과 같은 3차원 볼록영역에서 버그만핵이 영점을 갖는다는 것을 증명하였다.

$$\{(z_1, z_2, z_3)\in C^3 : |z_1|+|z_2|+|z_3|<1\}$$

정확하게 말하면, 원판에서 가중치를 지닌 버그만핵을 계산함으로써, 양의 실수들인 $p_2, \cdots, p_n$에 대하여 $p_2+\cdots+p_n>2$일 때 다음 영역에서 버그만핵이 영점을 가짐을 보였다.

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in C^n : |z_1|+|z_2|^{2/p_2}+\cdots+|z_n|^{2/p_n}<1\} \tag{4}$$

모든 $p_j\leq 2$일 경우 위의 영역은 볼록영역이다. 예를 들면 다음의 볼록영역에서도 버그만핵이 영점을 가진다는 것이다.

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in C^n : |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|<1\} \quad (n\geq 3),$$

$$\{(z_1, z_2, \cdots, z_n)\in C^n : |z_1|+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2<1\} \quad (n\geq 4)$$

그 후 푸가 플룩(Pflug)에게 볼록영역인 최소구(minimal ball)에서 버그만핵이 영점을 가질 가능성에 대하여 문의하였는데, 마침내 플룩과 유스피(Youssfi)가 [11]에서 $n\geq 4$일 때 다음과 같은 최소구에서 버그만핵이 영점을 가짐을 보였다.

$$\{z\in C^n : |z|^2+|z\cdot z|<1\} \quad (|z|^2=|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2,\ z\cdot z=z_1^2+\cdots+z_n^2) \tag{5}$$

(4)와 (5)의 볼록영역들은 매끄러운 영역들은 아니지만 안에서부터 매끄러운 강볼록영역들로 접근시킬 수 있다. $0<a\leq 1$이고 m이 충분히 큰 정수일 때 다음 영역은 버그만핵이 영점을 가지며 (5)의 영역으로 내부로부터 접근하는 매끄러운 대수적 강볼록영역이다.

$$\{z\in C^n : (|z|^2+|z\cdot z|)^m+(|z|^2-|z\cdot z|)^m+a^m|z|^{2m}<1\}$$

안(Anh)이 [15]에서 3차원이상에서 버그만핵이 영점을 갖는 유계인 매끄러운 대수적 강볼록 완전 라인하트 영역을 만들었다. 2차원에서의 영역

$$\{(z_1, z_2)\in C^2 : |z_1|+|z_2|<1\}$$

에서는 버그만핵이 경계에서 영점을 가지지만 내부에서는 영점을 갖지 않는다는 점에서 이 영역이 볼록영역이며 버그만핵의 영점에 관한 경계영역이라고 할 수 있다.

3. 결론

위에서 언급한 두 가지 추측에 대하여 비버바흐 추측은 성립한다고 증명이 되었고, 루키켕 추측은 성립하지 않는다는 반례를 얻었음을 보았다. 그러나 하나의 반례에 만

족하지 않고 많은 학자들이 루퀴켕 추측이 성립하지 않는 반례들을 계속하여 얻은 것은 본래의 루퀴켕 추측의 가능한 범위를 축소하면 성립할 수 있을지도 모른다는 추측으로부터 비롯된다. 수학은 계속되는 의문으로부터 추측이 나오고 부단한 노력에 의하여 증명이 되거나 반례가 나온다. 섣불리 어떤 정리가 성립하리라 증명하지 않고도 단정짓는 것은 위험한 일이나, 위의 두 가지 추측을 보더라도 항상 의문을 가지고 추측을 해 봄으로써 수학의 발전을 이룰 수 있다고 생각한다.

참고 문헌

1. 이석영, 복소함수론, 교학연구사, 1996.
2. Devlin, K. 저/ 허민 역, 수학: 새로운 황금시대 제2판, 경문사, 1999
3. Boas, H., "Counterexample to Lu Qi-Keng conjecture," *Proc. Amer. Math. Soc.* 97(1986), 374-375.
4. Boas, H., "The Lu Qi-Keng Conjecture fails generically," *Proc. Amer. Math. Soc.* 124(1996), 2021-2027.
5. Boas, H., "Lu Qi-Keng conjecture," *J. Korean. Math. Soc.* 37(2000), 253-267.
6. Boas, H. · Fu, Siqi · Straube, E.J., "The Bergman kernel function: explicit formulas and zeroes," *Proc. Amer. Math. Soc.* 127(1999), 805-811.
7. FitzGerald, C., "The Bieberbach conjecture: Reprospective," *Notices Amer. Math. Soc.* 32(1985), 2-6.
8. Fomenko, O.M. · Kuz'mina, G.V., "The last 100 days of the Bieberbach Conjecture," *The Mathematical Intelligencer* 8(1986), 40-47.
9. Greene, R.E. · Krantz, S.G., "Stability properties of the Bergman kernel and curvature properties of bounded domains," *Recent Developments in Several Complex Variables*, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1981, 179-198.
10. Krantz, S.G., *Function Theory of Several Complex Variables* 2nd ed., Belmont: Wadsworth Inc., 1992.
11. Pflug, P. · Youssfi, E.H., "The Lu Qi-Keng conjecture fails for strongly convex algebraic domains," *Arch. Math.* 71(1998), 240-245.
12. Rosenthal, P., "On the zeroes of the Bergman kernel function in doubly-connected domains," *Proc. Amer. Math. Soc.* 21(1969), 33-35.
13. Skwarczynski, M., "The invariant distance in the theory of pseudoconformal transformations and the Lu Qi-keng conjecture," *Proc. Amer. Math. Soc.* 98 (1969), 305-310.
14. Suita, N. · Yamada, A., "On the Lu Qi-Keng conjecture", *Proc. Amer. Math.*

Soc. 59(1976), 222-224.

15. Viêt Anh, Nguyên, "The Lu Qi-Keng conjecture fails for strongly convex algebraic complete Reinhardt domains in $C^n\,(n \geq 3)$," *Proc. Amer. Math. Soc.* 128(2000), 1729-1732.

Historical Inspection of the Bieberbach Conjecture and the Lu Qi-Keng Conjecture

Department of Mathematics, The University of Suwon **Moonja Jeong**

In this paper, we consider two conjectures, the Bieberbach Conjecture that was proved true and the Lu Qi-Keng Conjecture that was proved not true. We inspect them historically and introduce the interesting results. From them we find that the deep theory of mathematics comes from continuous conjectures.

Key words: Bieberbach Conjecture, Lu Qi-Keng Conjecture

2000 Mathematics Subject Classification: 01A99, 30A10, 32H10

ZDM Classification: A30, I20, I60, I70