한국수학사학회지 제17권 제3호(2004년 8월), 1-12

고른 구조의 역사*

충북대학교 수학과 이승온
solee@chungbuk.ac.kr
충북대학교 수학과 민병수
minamor1066@hanmail.net

해석학에서는 위상 구조와 고른 구조를 거리 공간에서 다루었기 때문에 많은 혼동이 있었다. 거리 공간의 개념은 위상 구조로 일반화되었지만 '고르다'는 개념은 그 후에 앙드레 베이유에 의해서 고른 구조로 일반화되었다. 우리는 먼저 베이유의 삶과 그의 수학적 업적을 살피고 고른 구조의 역사와 발달에 대해서 알아볼 것이다.

주제어 : 위상 구조, 고른 구조, 앙드레 베이유.

0. 서론

수학은 구조적인 입장에서 순서 구조, 대수 구조, 위상 구조와 그들의 복합 구조를 연구하는 학문으로 이해된다. 이 중에서 순서 구조는 그 자체의 연구도 중요하지만, 다른 구조의 연구에 매우 중요한 도구로 사용된다. 특히 위상 수학에서 상한과 하한을 통한 근사값(approximation), 수열과 필터의 수렴에 의한 위상 구조의 연구는 모두 순서 구조가 이들의 구조를 밝히는 데 절대적임을 보여준다[27].

실수의 위상 구조와 고른 구조(uniform structure)가 실수의 순서 구조, 즉 데데킨트(Dedekind, 1831~1916) 완비성에 의하여 결정되는 것은 잘 알려져 있다. 실제로 실수의 완비성과 실수가 데데킨트 완비인 것은 서로 동치이다. 거리 공간의 위상 구조는 실수의 순서 구조를 통하여 정의된다.

보통 위상(ususal topology)이 주어진 실직선 R은 완비 공간이므로 실수로 이루어진 코시(Cauchy, 1798~1857) 수열은 수렴한다. 그러나 함수 $f:(-\pi/2, \pi/2)\rightarrow R$ $(x\rightarrow \tan x)$는 위상 동형 사상(homeomorphism)이고 수열 $<\pi/2-1/n \mid n\in N>$은 개구간 $(-\pi/2, \pi/2)$ 위에서 코시 수열이지만 R 위에서 $<\tan(\pi/2-1/n) \mid n\in N>$은

* 이 논문은 2004년도 충북대학교 학술연구지원사업의 연구비 지원에 의하여 연구되었음.

유계 수열이 아니므로 코시 수열이 아니다. 즉, 코시 수열이 된다는 성질은 위상적 성질이 아니다. 또한 개구간 $(-\pi/2, \pi/2)$는 완비 집합이 아니므로 완비성도 위상적 성질이 아니다. 마지막으로 개구간 $(-\pi/2, \pi/2)$는 유계인데 R은 유계가 아니므로 집합의 유계성도 위상적 성질이 아니다. 이들은 모두 위상 구조는 점과 집합 사이의 근사 구조를 다루는 것이므로, 위상적 성질은 근본적으로 국소적 성질(local property)를 시작으로 정의되기 때문이다.

하이네(Heine, 1821~1881) · 보렐(Borel, 1871~1956)의 정리에 의하여 R의 부분집합 A가 컴팩트이기 위한 필요충분조건은 A가 유계인 폐집합인 것이다. 여기서 컴팩트성과 폐집합은 위상적 성질이지만 유계성은 위상적 성질이 아니다. 함수 $f:[0,\infty)\to R\,(x\to x^2)$는 위상 동형 사상이지만 고른 연속 함수(uniformly continuous map)는 아니다. 즉, 함수의 고른 연속성은 위상적 성질이 아니다.

해석학에서 취급하고 있는 완비성은 거리 공간으로 쉽게 이행이 가능하지만 이는 실수의 구조에 의지하므로 위상 구조와 마찬가지로 실수에서 벗어나서도 이를 취급할 수 있는 구조가 필요하게 된다.

따라서 완비성과 같은 중요한 구조의 연구는 위상 구조를 통하여 이루어질 수 없기 때문에 이를 극복하기 위한 새로운 구조가 필요하게 되었고 1937년 앙드레 베이유(André Weil, 1906~1998)가 고른 구조와 고른 공간을 도입하였다[24].

이 논문에서는 앙드레 베이유의 생애와 업적을 조사하고 위상 구조와 고른 구조의 기원에 관한 역사적 배경을 소개한다.

1. 앙드레 베이유

앙드레 베이유는 유태인의 아들로 파리에서 태어났다. 어머니인 셀마(Selma)는 오스트리아 유태인 출신이었고 아버지 베르나르(Bernard)는 의사였다. 앙드레는 어린 나이에 수학을 좋아하게 되어서 열 살 때에는 이미 깊이 빠져 있었다. 수학말고도 그의 인생에 중요한 일이 몇 가지 더 있었는데, 여행도 그 중 하나이다. 그는 16살 때 산스크리트 원본으로 '바가바드 기타(Bhagavad Gita)'를 읽었다.

베이유는 파리에 있는 에꼴 노르말에서 공부했다. 그 곳을 졸업한 후 그는 여름 휴가로 알프스를 여행을 하였는데, 이때도 항상 노트를 들고 다니면서 수학을 공부하였다. 이 때 그는 특히 디오판투스 방정식(부정 방정식)에 사로잡혀 있었고, 여름 휴가 후에 로마에 들린 후 괴팅겐으로 갔다. 그 곳에서 첫 번째 수학 연구라 할 수 있는 대수 곡선에 관한 이론을 만들었고 아다마르(Hadmard, 1865~1963)의 지도 하에 파리 대학에서 박사 학위를 받기 위하여 연구하였다. 그는 논문의 소재로 괴팅겐에서 공부

를 시작했던 대수 곡선에 관한 이론을 선택했다. 그의 스승 아다마르는 뛰어난 제자가 좀더 높은 목표인, 모델(Mordell, 1888~1972)의 추측[1]을 증명하기를 원했으나 베이유는 아다마르의 충고를 따르지 않았고 후에 다음과 같이 말했다.

나의 선택은 현명했다. 왜냐하면 모델의 추측이 증명되는 데 반세기 이상이 걸렸기 때문이다.

그는 1928년 파리 대학에서 박사 학위를 받았으나 강의는 다른 곳에서 하였고 1930년부터 1932년까지 인도의 알리가르 무슬림(Aligarh Muslim) 대학에 재직하였다. 그는 처음에 하이데르바드(Hyderabad) 교육 장관인 시에드 마수드(Syed Masood)와 토의해서 알리가르 대학의 프랑스 문화부에 자리를 얻도록 약속을 받았다. 그러나 약속에도 불구하고 그는 시에드 마수드로부터 다음과 같은 전보를 받았다.

프랑스 문화부의 자리는 불가. 수학 분야는 가능.

1933년부터 제2차 세계대전이 발발하기 전까지 베이유는 프랑스 스트라스부르그(Strasbourg) 대학에서 강의했으며 스트라스부르그에서 그는 부르바키(Bourbaki) 모임에 참여했다.

양심적 병역 거부자인 베이유에게 전쟁은 재앙이었다. 그는 전쟁이 시작되자마자 네반리나(Nevanlinna, 1895~1980)를 방문하기 위해 핀란드로 갔다. 군대에 징집되는 것을 피하기 위한 시도였지만 그 시기에 유럽에서 전쟁을 피하는 것은 그리 간단한 일이 아니었다. 핀란드에서 베이유는 러시아어로 쓰여진 편지가 방에서 발견되어서 체포되었는데 그 편지들은 폰트리야긴(Pontryagain, 1908~1988)으로부터 온 수학에 관한 것들이었다. 상황은 매우 좋지 않았고 어느 날 네반리나는 베이유가 스파이라는 죄로 사형을 당할 것이라는 소식을 들었다. 다행히 네반리나는 베이유를 추방하도록 당국자를 설득할 수 있었고, 베이유는 프랑스로 가서 감옥에 수감되었다. 베이유는 유

---

1) 모델의 추측은 2보다 큰 지수 n에 대하여 페르마(Fermat, 1601~1665) 방정식 $x^n+y^n=k$ (x, y, k는 정수)는 많아야 유한 개의 유리수 해를 가질 수 있다는 것이다. 그래서 페르마의 마지막 정리에 대한 증명은 아니지만, 모델의 추측에 대한 증명은 중요한 발전이 될 수 있었다. 모델의 추측은 팔팅스(Faltings, 1954~)라는 젊은 독일 수학자에 의해 1983년 증명되었다. 팔팅스는 이를 증명하기 위해서 여러 가지 심오한 발상을 결합해야만 했다. 이런 결정적인 발상 중 첫째는 1947년의 베이유의 연구에 나타났다. 베이유는 유한 산술에 관한 방정식의 정수 해를 연구했었다. 베이유의 기본적인 질문은 다음과 같다. 소수 p에 대해서 방정식은 법 p(modulo p)에 관해 얼마나 많은 정수 해를 갖는가? 이 질문은 명백히 페르마의 마지막 정리와 관계된다. 왜냐하면 법 p에 관한 해가 존재하지 않는다면 통상적인 의미에서 해가 존재하지 않기 때문이다 위상수학의 일부 결과와 유사하게, 베이유는 이 문제에 관한 여러 가지 기술적인 추측을 공식화했다. 이런 추측들은 이른바 '대수적 다양체'(algebraic variety)들을 사용해서 공식화되었는데, 개략적으로 말하면 대수적 다양체는 단 하나의 방정식이 아니라 방정식 전체의 체계에 대한 해들의 집합이다. 이런 추측들은 1975년에 들린느(Deligne, 1944 ~)에 의해 증명되었다([25], [26]).

태인이라는 사실과 여동생인 시몬느(Simone) 베이유가 프랑스 레지스탕스의 지도급 인물이며 신비주의 철학자라는 이유로 커다란 위험 속에 빠졌다. 어려운 상황 속에서 베이유는 군대에 가는 것이 최선의 선택이라고 결정하였고 입대한다는 조건으로 석방을 성공적으로 설득할 수 있었다. 감옥에서 나오기 위해 군대를 이용한 베이유는 오래 복무할 의향은 없었으므로 기회가 오자마자 미국으로 탈출하였다. 베이유는 1941년부터 펜실바니아에 있는 하베포드(Haverford) 대학과 스와트모어(Swarthmore) 대학에서 가르쳤고 1945년에 브라질의 상파울로(Sao Paulo) 대학의 자리를 승낙하고 1947년까지 그 곳에 머물렀다. 1947년에 미국으로 돌아온 후 시카고 대학의 교수로 임명되었고 1958년까지 계속 그곳에서 일했다. 1958년부터는 프린스턴 대학의 고등 학술 연구소(Institute of Advanced Study)에서 일했고. 1976년 퇴임하여 명예 교수가 되었다.

베이유는 고른 구조를 도입하고 이에 대한 연구를 한 후, 정수론, 대수 기하학, 군론에 관한 연구로 그의 관심을 돌리게 된다. 1940년대 초반부터 추상 대수 기하와 가환 변수(abelian varieties)에 대한 현대적 이론에 기초를 세움으로써 대수적 기하학과 정수론에 빠른 발전을 가져왔다. 대수곡선에 대한 작업은 끈 이론(string theory)[2)]과 소립자 물리학 등의 수학 외적 분야를 포함해 많은 분야에 영향을 미쳤다. 3차원 대수기하학이 양자장론에 많이 응용되고 있는 상황에서 베이유의 작업은 3차원 대수 기하학에 대한 업적으로 1982년 필즈상을 수상한 야우(Yau, 1949~)와 같은 수학자들의 업적에 기본이 되었다.

야우만이 베이유의 뒤를 이어 연구하여 필즈상을 받은 유일한 수학자는 아니다. 들린느는 1978년 베이유 추측을 해결해서 필즈상을 받았다.

베이유의 또 다른 업적 중 하나는 대수적 함수체의 합동 제타 함수(the congruence zeta functions of algebraic function fields)에 대한 리만(Riemann, 1826~1866) 가설을 증명한 것이다. 1949년에 유한 체 위에 있는 대수적 변수(algebraic varieties over finite fields)들의 합동 제타 함수에 대한 추측들이 주어졌는데, 베이유 추측들이라 불리게 된 이 가설들은 대수적 변수들의 위상에 대한 그의 깊은 통찰력에서 나왔고 체 이론을 계속 발전시킬 수 있는 원칙들을 제공하였다. 정수론과 대수적 기하학을 함께 연구한 베이유의 작업은 매우 유익하여 모듈러 형식들(modular forms), 자기 동형적 함수들(automorphic functions), 자기 동형적 표현들(automorphic representations) 등, 오늘날 깊이 있게 연구되는 많은 주제들의 기초를 베이유가 세웠다. 게다가 베이유는 복소 해석 기하학과 미분 기하학, 그리고 위상 수학에 본질적인 기여를 함으로써 새로운 수학 주제에 동기를 제공하였는데, 특히 중요한 업적은 위상적 군들에 대한 조

2) 끈 이론이란 우주에 존재하는 네 가지 힘 (즉, 중력, 전자기력, 강한 핵력, 약한 핵력)의 근원을 밝혀서 우주의 원리를 근본적으로 밝히려고 하는 'Theory Of Everything'(TOE)이 될 수 있는 강력한 후보 중 하나이다

화해석학 연구 영역과 특성 클래스들(harmonic analysis on topological groups and characteristic classes) 사이의 근본적 관계를 밝힌 것이다. 이 영역들을 함께 연구한 것이 캘러 기하학과 떼타 함수 기하학(geometric theory of the theta function and Kähler geometry)에 관한 연구이다.

디오도네(Dieudonne, 1906~1992)를 비롯하여 여러 수학자들과 함께 1930년대부터 베이유는 부르바키라는 이름으로 일관성을 가지고 수학 전반을 기술하기 위한 시도를 감행하였다. 부르바키의 목적은 수학 전반에 걸친 엄밀성 결여와 같은 흐름을 바꾸는 것이었다. 부르바키의 영향력은 오랫동안 매우 컸으나, 수학의 엄밀성과 추상성이 이루어진 지금은 그 중요성이 줄어들게 되었다. 베이유의 저서에는 '대수적 기하학의 기초(Foundations of Algebraic Geometry)(1946)', '아이젠슈타인(Eisenstein, 1823~1852)과 크로네커(Kronecker, 1823~1891)에 의한 타원 함수(Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker)(1976)'가 있다.

베이유는 뛰어난 수학적 능력으로 많은 곳에서 명예 회원이 되었다. 1959년 런던 수학회 명예 회원이 되었고 1966년에는 런던 국립 학회 회원으로 선출되었으며 파리 과학회 및 미국 국립 과학회에도 회원으로 선출되었다. 베이유는 1950년 하버드 국제 수학자 모임에 연사로 초청되었고, 1954년에도 역시 초청되었다. 1979년 베이유는 울프상을 받았고 다음 해에 미국 수학회는 그에게 스틸상을 수여했다. 1994년에는 일본 이나모리 재단으로부터 교토상을 받았는데, 교토상의 인용문은 다음과 같다.

> 창조성과 뛰어난 업적으로 수학에 대한 예리한 통찰력과 깊은 이해를 가지고 앙드레 베이유가 성취한 결과와 그가 제기한 문제들은 수학과 과학 발전에 커다란 영향력을 미쳤고 또한 인간 정신을 크게 향상시켰다.

더 타임즈(The Times)에 실린 부고란에는 그를 다음과 같이 묘사했다.

> 앙드레 베이유는 수학에서 그가 이룬 근본적인 작업들, 건조한 유머, 다루기 힘든 성격, 교양 있는 이미지로서 기억될 것이다. 그의 공식적 일대기에 유일하게 등록되어 있는 명예 회원명은 '폴다비아[3] 문학 과학회 회원'이었다.

2. 위상 구조

바일(Weil, 1885~1955)은 수학은 무한에 관한 학문이라고 했다.

유한한 인간은 무한을 이해하고자 오랫동안 노력해 왔다. 이 문제를 해결하기 위하

3) 폴다비아는 가상적으로 만들어진 부르바키의 고향이다.

여 종교와 철학은 오랜 시간에 걸쳐서 여러 가지 대책을 강구하고 그 대책은 다시 수많은 문제를 만들어냈다. 무한 집합을 정의한 칸토어(Cantor, 1845~1918)가 정신 병원을 드나들다가 그 곳에서 숨을 거둔 것이나, 1931년 '불완전성 정리'를 발표하여 당시의 힐베르트(Hilbert, 1862~1943)와 러셀(Russell, 1872~1970) 등 공리적인 방법에만 의존하여 수학의 체계를 세우려는 확신을 좌절시킨 괴델(Gödel, 1906~1978)도 역시 병원에서 굶어 죽은 사실도, 무한을 극복하지 못한 좌절과 무관하지 않으리라고 추측할 수 있다.

수학에서는 무한의 문제를 해결하기 위하여 극한의 개념을 고대 그리스 시대부터 만들어 냈다. 특히 아르키메데스(Archimedes, 기원전 287~212)는 포물선의 한 부분의 면적을 극한을 이용하여 구하고, 또 원둘레를 내접하는 정다각형의 길이로 근사값을 구하였다. 이들은 모두 미분 적분학의 기본적인 출발점으로 뉴턴(Newton, 1643~1727)과 라이프니츠(Leibniz, 1646~1716)에 의하여 다시 나타나게 되었고, 실제로 현재 우리가 사용하는 극한의 개념은 19세기에 들어와서 정립되었다.

극한이란 더 좋은 근사값의 상태를 나타내는 것이므로 이를 잴 수 있는 적당한 자가 필요하게 되었다. 19세기 전반에는 주로 실직선 R이 그 대상이었으므로 R의 보통 거리(usual metric)를 사용하면 충분하였다. 그러나 해석학의 발전으로 그 대상이 유클리드 공간 R^n으로 확장되고, 나아가 함수 공간이 연구의 대상으로 대두됨에 따라 위상 구조가 필요하게 되었다[28].

코시, 아벨(Abel, 1802~1829), 볼차노(Bolzano, 1781~1848) 등에 의하여 수열의 극한과 극한의 관계와 연속 함수의 정확한 이해가 이루어지고, 이들을 발전시켜 리만은 위상 구조의 정의의 필요성을 강조하고 또 위상 공간을 정의하려고 시도하였다. 그는 위상을 라이프니츠가 사용하였던 'Analysis Situs'라는 단어로 쓰기 시작하였다[22]. 따라서 위상 수학을 처음 창안한 사람은 리만으로 간주된다. 그는 위상 공간을 관념적으로 공식화하려는 시도를 처음으로 한 사람이고 위상 공간의 성질들을 자연스럽게 고안했으며 '베티(Betti, 1823~1892) 수'를 정의하여 위상수학의 발전에 지대한 영향을 끼쳤고, 위상 수학을 해석학에 처음으로 응용한 사람이다.

위상 구조는 점과 집합 사이의 근사 구조인데 점 x가 집합 A에 가깝다는 것은 $x \in \overline{A}$($\overline{A}$는 A의 폐포(closure))를 의미한다. 쿠라토우스키(Kuratowski, 1896~1980)는 위상 공간을 $\overline{A}$로 정의하였는데[20], 즉 위상 공간은 $\overline{A}$에 의해서 완전히 결정될 수 있음을 의미한다.

실직선의 부분집합 A와 실수 x에 대해 $x \in \overline{A}$일 필요충분조건은 x로 수렴하는 A 위에서의 수열이 존재하는 것이다. 이는 실직선의 위상 구조가 실수열의 수렴 구조에 의해 완전히 결정됨을 뜻한다. 마찬가지로 $R \to R$ 함수의 연속성도 실수열의

수렴 구조에 의해 완전히 결정된다[29].

이에 착안해 수렴 구조를 일반화하려는 노력이 1906년 프레쉐(Fréchet, 1878~1973)가 아다마르의 지도 하에 쓴 그의 학위 논문에서 거리 공간과 수열 공간을 도입하여 수 체계의 위상을 추상화한 후[9], 1914년 하우스도르프(Hausdorff, 1868~1942)가 위상공간(=오늘의 하우스도르프 공간)을 도입함으로써 일반 위상 수학(general topology)이 시작되었다[11].

그러나 실직선의 경우와는 달리 일반적인 위상 공간에서의 수열의 역할은 그리 만족스럽지 못했다. 따라서 실직선에서 수열이 하던 역할을 위상공간에서 대신할 수열의 일반화를 찾게 되었고, 1922년 무어(Moore, 1862~1932)와 스미스(Smith)에 위해 그물(net)과 그물의 수렴의 개념[21]이, 1937년 카르탕(Cartan, 1904~)에 의해 필터(filter)의 개념[5]이 도입되었고, 위상 구조와 위상 공간 사이의 함수의 연속성이 그물이나 필터의 수렴 구조에 의해 결정됨이 밝혀졌다.

1937년은 두 가지 측면에서 위상 수학의 발전에 매우 중요한 전기를 이루는 해였다. 첫째는 1930년 초에 티코노프(Tychonoff, 1906~1993)가 곱 공간(product space)을 정의하고 티코노프의 정리를 증명한 이후[23] 1937년 필터의 도입으로 위상 수학은 가산 수열과 가산 덮개(cover) 등 가산 집합의 제약에서 완전히 자유로와 질 수 있었고, 둘째는 앙드레 베이유에 의하여 고른 공간과 완비 공간이 도입된 것이다[24].

3. 고른 구조

고른 공간에 대한 주요한 개념과 연구 결과들은 실변수 이론에서 발전되었고 이러한 연구가 체계적으로 이루어진 것은 19세기 후반에 시작되었다. 급수에 대한 엄밀한 기초를 처음으로 세우려 시도했던 코시는 실수열 $\langle a_n \rangle$이 수렴하기 위한 필요충분조건이 n이 충분히 커질 때 $|a_{n+p}-a_n|$을 우리가 원하는 만큼 작게 만들 수 있음을 보였다. 따라서 코시는 볼차노와 함께 처음으로 이 원칙의 중요성을 인식하고 명백하게 언급한 사람 중 하나이다. 코시 수열은 n이 충분히 커질 때 a_{n+p}와 a_n의 거리가 우리가 바라는 만큼 작게 만들 수 있는 것으로 거리 공간에서 정의되었다. 마지막으로 코시 수열은 코시 필터로 일반화된다. 실수에 대한 직관적인 접근이 한계에 부딪히게 되었을 때 해석학의 엄밀한 기초를 수립하기 위하여 유리수를 이용하여 실수를 정의하려 했고 19세기 후반 코시의 원칙[6]은 이러한 시도를 위한 가장 적합한 정의들을 제공하게 된다.

칸토어가 수립하였고 하이네와 메레이(Méray, 1835~1911)에 의하여 독립적으로 발전된 실수의 정의는 유리수로 이루어진 코시 수열(칸토어의 용어로는 기본적 수열

(fundamental sequence))이 대응되도록 만드는 방법으로 구성된다([4], [14]). 같은 실수에 두 개의 수열 $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$이 대응되면 이것은 $|a_n - b_n|$이 0으로 수렴하는 것과 동치이다. 여기서 본질적인 생각은 어떤 입장에서 바라본다면(고른 구조에서 바라본 입장) 유리수는 비완비 집합인 반면 실수는 유리수의 완비화로 얻어진 집합이라는 사실이다.

한편으로 하이네는 하나 이상의 실변수를 가진 실함수의 고른 연속성을 바이어스트라스(Weierstrass, 1815~1897)와 칸토어의 아이디어에서 많은 부분을 도움 받아 정의하였다[13]. 하이네는 또한 유계이고 폐구간 위에서 연속인 실변수 함수는 고른 연속임을 증명했다. 이것이 하이네 정리이다. 이 결과는 실수가 갖는 중요한 성질의 하나인 유계인 폐구간의 컴팩트성과 관련이 있다. 1895년 보렐은 컴팩트 집합(=유계 폐집합)의 가산 열린 덮개는 유한 부분 덮개를 갖는다는 것을 증명하였다. 그리고 하이네의 증명을 약간 변형시키면 보렐 · 르베그(Lebesgue, 1875~1941) 정리를 증명할 수 있다. 때문에 보렐 · 르베그 정리가 전술한 하이네 · 보렐 정리라고 불린다.

실직선을 일반적인 거리 공간으로 확장하여 연구하면서 이러한 생각들은 일반적인 거리 공간에 의하여 유도된 위상 공간과 고른 공간으로 확대되었다.

프레쉐는 처음으로 이러한 공간들의 일반적인 정의를 만들었으며 코시 원칙의 중요성을 인지하고 거리 공간 X가 완전 유계(totally bounded)이기 위한 필요충분조건은 X의 임의의 양수 ε에 대하여 지름이 ε보다 작은 집합들로 이루어진 X의 유한 덮개가 존재한다는 정리를 증명했다([9], [10]).

하우스도르프는 'Mengenlehre'에서 거리 공간에 대한 이론을 상당히 발전시켰는데, 앞에서 언급한 칸토어의 구성을 적용할 수 있는 비완비 거리 공간을 완비화(completion)할 수 있음을 깨달았다[12]. 1937년에 베이유가 충분한 일반성을 가지고 고른 공간과 완비 공간을 도입하였고 완비성과 컴팩트성이 서로 연결이 가능하게 되었다[24].

즉, 하우스도르프 컴팩트 공간은 유일한 고른 구조에 의하여 유도되는 위상 공간이고, 또 하우스도르프 공간이 컴팩트이기 위한 필요충분조건은 그 고른 구조가 완비이고, 완전 유계인 것으로, 이를 통하여 전술한 하이네 · 보렐 정리의 위상 구조와 고른 구조의 양면성을 포함하고 있는 것을 완전히 고른 구조로 정리할 수 있게 되었다.

이전의 고른 구조에 대한 관점이나 연구 결과들은 거리 공간이나 거리화 가능 공간에서만 적용되었다. 그러나 위상의 현대적 연구에서는 거리가 정말 고른 구조 속에서 유용성을 가지고 있는지 의문을 나타낸다.

필터에 대한 관점을 자유롭게 이용할 수 있다면 거리 공간의 성질들을 고른 공간의 성질들로 일반화시키는 것은 그다지 어렵지 않다. 유사한 예로, 알렉산드로프(Alexandroff, 1896~1982) · 호프(Hopf, 1894~1971)의 위상에서 주어진 컴팩트 거리

공간에 대한 결과들을 일반적 컴팩트 공간으로 확대할 수 있다[1].

특히 고른 공간의 완비화 공식은 칸토어가 구성한 실수에 본질적인 변화 없이 약간의 전환을 가져온 정도이다. 실제로 거리 공간의 완비화는 실수의 완비성에 의존하나, 고른 공간에서 극소 코시 필터(minimal Cauchy filter)를 통하여 실수와 상관없는 완비화를 구성할 수 있고, 또 완전 유계 공간은 그 완비화가 컴팩트인 것으로 특성 지어져 이를 예비 컴팩트(precompact)라 하기도 한다.

한편 베이유의 가장 큰 업적은 조밀한 부분공간에서 완비 하우스도르프 공간으로의 고른 연속 함수는 항상 전체 공간으로의 고른 연속 함수로 확장이 가능하게 되어 완비화는 유일하게 존재함을 보여 완비 하우스도르프 공간은 완전히 그 조밀한 부분공간에 의하여 특성 지울 수 있게 되었다.

위상공간의 컴팩트화(compactification)는 완비화로 볼 수 있으므로 컴팩트화를 통일된 완비화로 연구할 수 있게 되었다.

4. 결론

위상 구조는 점과 집합 사이의 근사구 조인데, 실직선에서 수열이 하던 역할을 위상 공간에서 대신 할 수열의 일반화를 찾아서 그물과 필터의 수렴의 개념이 도입되었다. 위상 구조의 일반화로서 수렴 공간의 개념이 쇼케(Choquet, 1915~)[7], 코발스키(Kowalski)[19], 피셔(Fischet, 1932~)[8] 등에 의해 도입되었다.

베이유가 소개한 고른 공간은 거리 공간들과 위상군들(topological groups)을 단일화(unify)시키는 도구로 가산성(countability properties)을 사용하는 번거로움을 피할 수 있게 되었다.

고른 구조에 접근하는 방법은 세 가지로 나뉘어지는데, 1937년 베이유는 대각선 원소의 근방(entourages of the diagonal)의 모임으로 고른 구조를 정의하였다. 이는 부르바키 학파에 의하여 정리되고, 1940년 튜키(Tukey, 1915~2000)는 덮개를 사용하여 정의하였으며, 이는 1964년 이즈벨(Isbell, 1930~)의 저서에 정리되었다[15]. 또한 베이유는 고른 공간이 거리에 의하여 유도되는 고른 구조를 가지기 위한 필요충분조건이 그 고른 구조가 가산 기저(countable base)를 가지는 것으로 이를 이용하면 모든 고른 구조는 준거리 공간(pseudmetric spaces)에 의하여 정의되는 것을 보이게 된다. 이는 [3]과 [18]에 정리되어 있다. 따라서 고른 구조는 준거리 공간의 'initial hull'로 접근이 가능하게 된다.

1952년에는 두 집합 사이의 근사 구조를 연구하는 proximity(근접) 구조에 관한 연구가 시작되었으며 1959년에는 유한 개의 집합 사이의 근사 구조를 연구하는

contiguity인접) 구조에 대한 연구가 시작되었다. 이들은 모두 컴팩트화의 연구에 중요한 역할을 하였고 1974년 헬리히(Herrlich, 1937~)는 임의의 집합족 사이의 근사 구조를 나타내기 위하여 nearness(이웃) 구조를 도입하였다.

현재에는 위상 공간의 위상이 완비 헤이팅 대수(Complete Heyting algebra=frame =locale)임에 착안하여 위상 구조와 고른 구조의 연구가 격자(lattice) 이론을 이용하여 활발하게 진행되고 있다([2], [16], [17]).

참고 문헌

1. Alexandroff, P. · Hopf, H., *Topologie* I, Berlin: Springer, 1935.
2. Banaschewski, B. · Hong, S.S. · Pultr, A., "The completions of nearness frame," *Quaestiones Math.* 21(1998), 19-37.
3. Bourbaki, N., *Elements of Mathematics, General Topology Part I, II*, Addison -Wesley Publishing Company, Inc., Reading, 1966.
4. Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer, 1932.
5. Cartan, H., "Théorie des filtres; filtres et ultrafiltres," *C. R. Acad. Sc. Paris* 205(1937), 595-598, 777-779.
6. Cauchy, A.-L., *Sur la convergence des séries [Exercices d'Analyse*, 2^{e}Année, Paris, 1827, p. 221 = Oeuvres(II), vol. 7, Paris(Gauthier-Villars) 1889, p. 267].
7. Choquet, G., "Convergences," *Annales Univ. Grenoble* 23(1948), 57-112.
8. Fischer, H.R., "Limesräume," *Math. Ann.* 137(1959), 269-303.
9. Fréchet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel," *Rend. Palermo* 22 (1906), 1-72.
10. Fréchet, M., "Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel," *Rend. Palermo* 30(1910), 1-26.
11. Hausdorff, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig: Veit, 1914.
12. Hausdorff, F., *Mengenlehre*, Berlin: de Gruyter, 1927.
13. Heine, E., "Über trigonometrische Reihen," *Crelle's Journal* 71(1870), 353-365.
14. Heine, E., "Die Elemente der Functionenlehre," *Crelle's Journal* 74(1872), 172-188.
15. Isbell, J.R., *Uniform Spaces*, Amer. Math. Soc., Providence, 1964.
16. Johnstone, P.T., *Stone Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982.
17. Johnstone, P.T., "Tychonoff's theorem without the axiom of choice," *Fund. Math.* 113(1981), 21-35.

18. Kelly, J. L., *General Topology*, New York: Springer-Verlag, 1957.
19. Kowalski, H.J., "Limesräume und Kompättierung," *Math. Nachr.* 12(1954), 301-340.
20. Kuratowski, K., *Topology*, New York and London: Academic Press, Warszawa: Pwn-Polish Scientific Publishes, 1966.
21. Moore, E.H. · Smith H.L., "A general theory of limits," *Amer. Journ. Math.* 44 (1922), 102-121.
22. Riemann, B., *Gesammelte mathematische Werke* 2nd ed., Leibzig: Teubner, 1982.
23. Tychonoff, A., "Über die Topologische Erweiterung von Räumen," *Math. Ann.* 102(1930), 544-561.
24. Weil, A., *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Act. Scient. et Ind., no. 551, Paris (Hermann), 1937.
25. 최상기, "부정방정식에 대하여," 한국수학사학회지 제16권 제1호(2003), 17-24.
26. Devlin, K. 저/허민 · 오혜영 역, 양식의 과학, 경문사, 1996.
27. 홍성사 · 홍영희, "순서와 위상구조의 관계," 한국수학사학회지 제10권 제1호(1997), 19-32.
28. 홍성사 · 홍영희, "Categorical Topology의 역사," 한국수학사학회지 제10권 제2호 (1997), 11-23.
29. 한용현, "수렴구조의 역사," 한국수학사학회지 제14권 제2호(2001), 13-20.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 17 No. 3 (Aug. 2004), 1-12

The History of Uniform Structures

Dept. of Math., Chungbuk National Univ. Research Institute of Mathematical Science
Seung On Lee · Byung Soo Min

In the Analysis, there have been many cases of confusion on topological structure and uniform structure because they were dealt in metric spaces. The concept of metric spaces is generalized into that of topological spaces but its uniform aspect was much later generalized into the uniform structure by A. Weil. We first investigate Weil's life and his mathematical achievement and then study the history of the uniform structure and its development.

Key words: topological structure, uniform structure, André Weil.
2000 Mathematics Subject Classification: 06A99, 54A99, 54D99