

건성마찰력을 받는 탄성재료의 안정성에 미치는 중간 지지의 효과

류시웅#, 장탁순*

Effect of an Intermediate Support on the Stability of Elastic Material Subjected to Dry Friction Force

Si Ung Ryu# and Tag Soon Jang *

ABSTRACT

This paper discussed on the effect of an intermediate support on the stability of elastic material subjected to dry friction force. It is assumed in this paper that the dry frictional force between a tool stand and an elastic material can be modeled as a distributed follower force. The elastic material on the friction material is modeled for simplicity into an elastic beam on Winkler-type elastic foundation. The stability of beams on the elastic foundation subjected to distributed follower force is formulated by using finite element method to have a standard eigenvalue problem. The first two eigen-frequencies are obtained to investigate the dynamics of the beam. The eigen-frequencies yield the stability bound and the corresponding unstable mode. The considered beams lose its stability by flutter or divergence, depending on the location of intermediate support.

Key Words : Elastic Foundation (탄성지지), Distributed Follower Force(분포종동력), Flutter(플러터), Divergence(다이버전스), Dry frictional force(건성마찰력)

기호설명

β = Distributed follower force parameter
 β_{cr} = Dimensionless critical distributed follower force
 $\mathbf{e}(\zeta)$ = Vector of cubic shape functions
 \mathbf{E} = Unit matrix
 E^* = Viscous resistance coefficient
 EI = flexural rigidity of a column
 ζ = Dimensionless axial local coordinates

η = Dimensionless transverse displacement
 κ = Dimensionless spring constants of the elastic foundation
 k = Spring constant of Winkler-type elastic foundation
 \mathbf{K} = Stiffness matrix
 λ = Complex eigenvalue
 L = Total length of a column
 m = Mass per unit length of a column
 \mathbf{M} = Mass matrix

접수일: 2003년 8월 18일 ; 게재승인일: 2004년 4월 9일
 교신저자: 한국기초과학지원연구원 장치운영부
 Email: ryu@bclinc.com Tel.: (042) 821-1153
 * 충남대학교 대학원 기계공학과

- N = Number of elements
- ξ = Dimensionless axial coordinates
- q = Distributed friction force
- σ = Real part of complex eigenvalue λ
- τ = Dimensionless time
- t = Time
- T = Kinetic energy
- U = Elastic potential energy
- $\mathbf{v}(\tau)$ = Vector of nodal displacements
- W_c = Work done by the conservative component of a follower force
- δW_{id} = Virtual work done by the internal damping
- δW_{nc} = Virtual work done by the nonconservative component of a follower force
- x = Axial coordinate of a column
- y = Deflection of a column
- ω = Eigen-frequency

1. 서론

금속 간의 상대운동은 접촉면에서의 건성 마찰에 의한 소음과 진동을 유발하게 되고, 이러한 소음과 진동은 인간에게 불쾌감을 줄뿐만 아니라 시스템 자체의 안정성에 중요한 영향을 미치므로 많은 연구자들의 관심의 대상이 되고 있다. 일반적으로 회전체의 가진 하에 있는 재료의 진동을 지배하는 운동방정식은 기본적으로는 분포 마찰력이 주어지는 보 모델과 같은 것으로 알려져 왔다. 이러한 분포 종동력이 주어지는 보와 같은 모델의 동적 안정성 문제는 비보존 탄성 안정성 문제로써 많은 연구자들에 의해 연구가 이루어져 왔다. 이러한 연구의 최초의 시도는 1964년 Pflüger¹에 의해 이루어졌으며 양단단순지지 보를 모델로 하여 안정성을 연구하였고 다이버전스에 의해 안정성을 잃게 된다는 것을 알아냈다. 그 후 Leipholz², Sugiyama와 공동 연구자들³은 다양한 경계조건(한단고정-타단자유, 한단고정-타단단순지지, 양단단순지지, 양단고정) 하에서 불안정 형태와 임계값을 구하였다. 이 연구들의 결과로써는 한단고정-타단자유 보에서만 플러터형 불안정이 발생하고 나머지 3개의 경계조건 하에서는 다이버전스형 불안정이 발생한다는 것을 밝혔다. 최근 Kang과 Tan⁴은 자동차와 항공기의 브레이크 시스템으

로 부터 상정한 역학적 모델로써 주기적 가진 하에서의 Leipholz's beam의 동적 불안정성을 확장 연구하였다.

본 연구에서는 건성마찰력을 받는 탄성재료의 소음과 진동현상을 이해하기 위하여 공구대, 마찰재, 탄성재료로 구성되어 있는 Fig.1과 같은 시스템에 있어서 탄성재료는 균일한 단면의 보로서, 공구대와 탄성재료 사이의 마찰력은 분포 종동력으로서, 마찰재는 탄성지지 스프링으로서 모델화하였다. 즉 탄성재료를 탄성기초상에 Leipholz's beam으로 간주하여 중간 지지점의 위치 변화가 시스템의 동적 불안정성에 미치는 영향을 연구하였다.

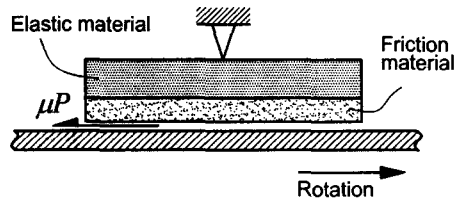


Fig.1 Conceptual sketch of elastic beam subjected to distributed friction

2. 수치 해석

2.1 수학적 모델

Fig.2는 건성 마찰력을 받는 탄성재료를 분포 접선종동력을 받는 길이 L 의 일정한 단면을 가진 보로서 모델화하였고, 보의 고정단으로부터 임의의 위치에 지지점을 가지고 있다. 여기서 굽힘강성은 EI , 단위 길이당 보의 질량 m 이고, 보의 탄성기초의 스프링 상수는 k 이다.

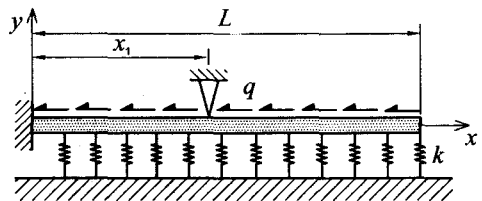


Fig.2 Leipholz's beam on the elastic foundation with an intermediate support

2.2 운동 지배방정식

Fig.2에 대한 운동 지배방정식을 얻기 위해 확

장된 헤밀턴 원리를 이용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서 T 는 운동에너지, W_c 는 작용력의 보존 성분에 의한 일, U 는 보와 분포 스프링에 저장된 탄성 포텐셜에너지를 나타낸다. 그리고 δW_{nc} 는 비 보존성분에 의한 가상 일을 나타낸다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m (y_t)^2 dx. \quad (2)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L q(L-x) (y_x)^2 dx. \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (y_{xx})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L ky^2 dx. \quad (4)$$

$$\delta W_{nc} = - \int_0^L q (y_x) \delta y dx. \quad (5)$$

여기서 하첨자 x 와 t 는 각각 위치와 시간에 대한 미분을 나타낸다.

식(2)-(5)를 식(1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \{m(y_t) \delta(y_t)\} dx + \int_0^L \{q(L-x)(y_x) \delta(y_x)\} dx - \int_0^L \{EI(y_{xx}) \delta(y_{xx})\} dx - \int_0^L ky \delta y dx \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \{q(y_x) \delta y\} dx \right] dt = 0. \quad (6)$$

계산상의 편의를 위해서 무차원 파라메타를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (7)$$

$$\rho = \frac{qL^3}{EI}, \quad \kappa = \frac{kL^4}{EI}.$$

식(7)의 무차원 파라메타를 식(6)에 대입하면 다음과 같다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_0^1 (\eta_\tau) \delta(\eta_\tau) d\xi + \int_0^1 \{ \rho(1-\xi)(\eta_\xi) \delta(\eta_\xi) \} d\xi \right. \\ \left. - \int_0^1 \{ (\eta_{\xi\xi}) \delta(\eta_{\xi\xi}) - \kappa \eta \delta \eta - \rho(\eta_\xi) \delta \eta \} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (8)$$

2.3 유한요소법의 적용

유한요소법을 적용하여 보를 N 개의 균일한 요소로 분할하면 Fig.3 에서와 같다.

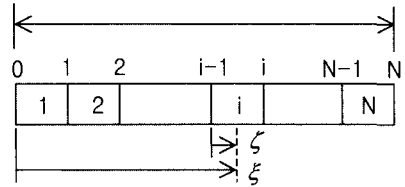


Fig.3 Finite element model of the beam

Fig.3 에서 국부좌표 ($\zeta = N\xi - i + 1; 0 \leq \zeta \leq 1$) 를 식(8)에 대입하면 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{i=1}^N \int_{\frac{i-1}{N}}^{\frac{i}{N}} \left\{ (\eta_\tau) \delta(\eta_\tau) + \rho(1-\xi)(\eta_\xi) \delta(\eta_\xi) - (\eta_{\xi\xi}) \delta(\eta_{\xi\xi}) - \kappa \eta \delta \eta - \rho(\eta_\xi) \delta \eta \right\} d\xi \right] d\tau = 0. \quad (9)$$

변위함수 ($\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \mathbf{e}^{(i)}(\zeta) \cdot \mathbf{v}^{(i)}(\tau)$) 를 도입하고 식(9)에 대입하면 다음과 같은 특성방정식⁵ 을 얻는다.

$$\mathbf{M} \mathbf{v}_{\tau\tau} + \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (10)$$

여기서 \mathbf{M} 은 조합된 질량행렬, \mathbf{K} 은 조합된 강성행렬이다.

2.4 고유치 문제

식(10)에 있어서 변위벡터 \mathbf{v} 를 다음과 같이 놓는다.

$$\mathbf{v} = \mathbf{X} \exp(\lambda \tau) \quad (11)$$

최종적으로 다음과 같은 일반 고유치 문제로 정리 할 수 있다.

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (12)$$

2.5 안정성 판별

일반적으로 식(12)에 있어서 특성근 λ 는 다음과 같은 형태의 복소수로 나타낼 수 있다.

$$\lambda = \sigma \pm i\omega \quad (13)$$

여기서 σ 는 진폭의 증가, ω 는 진동수를 나타낸다.

따라서 안정성 판별은 다음과 같다.

- 안정(Stable): $\lambda = \pm i\omega$ ($\sigma = 0, \omega \neq 0$)
- 정적불안정(Divergence): $\lambda = \sigma$ ($\sigma > 0, \omega = 0$)
- 동적불안정(Flutter): $\lambda = \sigma \pm i\omega$ ($\sigma > 0, \omega \neq 0$)

각각의 현상을 Fig.4 에 나타낸다.

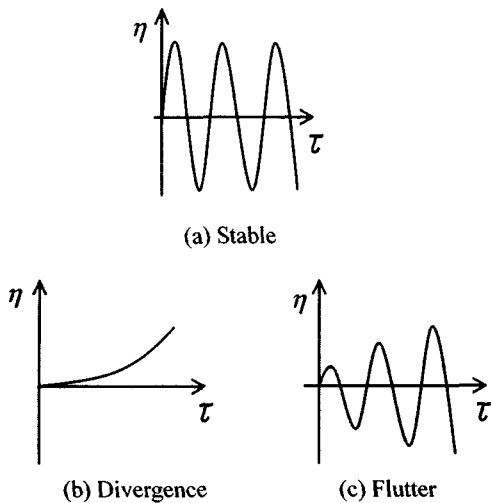


Fig.4 Stability of undamped system

3. 수치해석결과 및 토론

본 연구에서는 수치 시뮬레이션을 하기 위해 유한요소법을 적용하였고, 탄성기초상의 Leipholz's beam 에 있어서 지지점의 위치 변화에 따른 안정성을 조사할 수 있는 계산 프로그램을 개발하였다.

해의 정확도를 검증하기 위하여 탄성지지 스프링 상수가 0 일 경우 외팔보와 고정-단순지지보의 경우에 대해서 Table 1 에서 참고문헌¹⁻³ 과 비교 검토하였다.

Table 1 Comparison of results of three different theoretical analysis when $\kappa = 0$

| Boundary Condition | FEM (Present paper) | Difference method (Ref. [3]) | Galerkin's method (Ref.[1],[2]) |
|--------------------|---------------------|------------------------------|---------------------------------|
| Clamped-free | 40.05 | 40.05 | 40.7 |
| Clamped-simply | 57.01 | 56.99 | 57.95 |

Fig.5 는 탄성지지의 스프링 상수가 $\kappa = 0, 10, 100$ 일 경우의 단순 지지점의 위치 변화에 따른 불안정 타입과 임계 분포 종동력 값을 나타낸다. 이 그림에서는 단순지지점의 위치가 $\xi_1 < 0.428$ 의 구간에서는 플러터형 불안정이 발생한다. $\xi_1 = 0.428$ 에서 임계 분포 종동력 값이 점프(jump)하여 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이(transition)된다. 또한 이 그림에서 알 수 있는 것은 플러터 구간에서는 탄성지지 스프링의 스프링 상수 값에 관계없이 일정한 임계 분포 종동력 값을 가지고, 다이버전스 구간에서는 탄성지지의 스프링 상수가 커짐에 따라 임계 분포 종동력 값도 증가한다는 것을 알 수 있다. Fig.6(a)-(c)에서는 이러한 흥미로운 결과에 대하여 관찰해 보기로 한다.

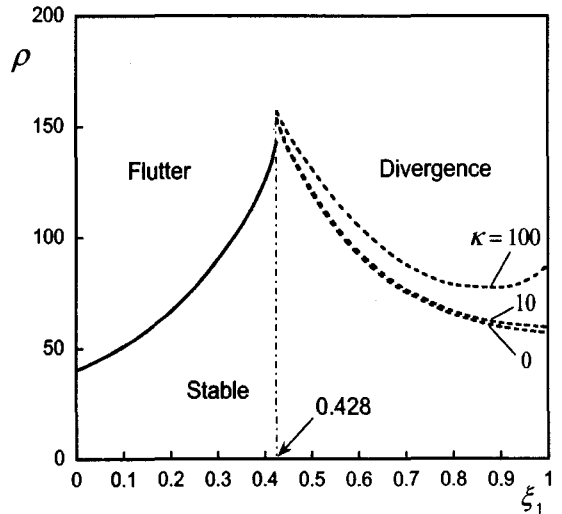
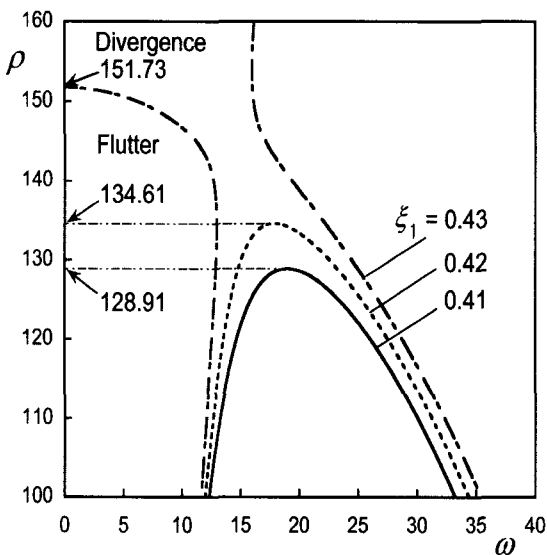


Fig.5 Critical distributed follower force as a function of the intermediate support when $\kappa = 0, 10, 100$

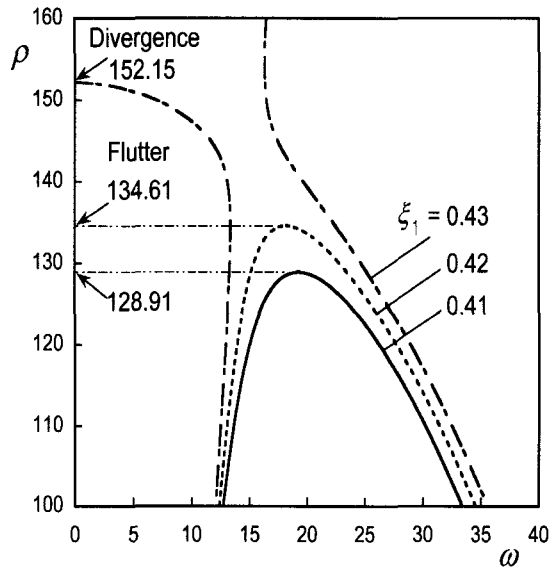
Fig.6(a)-(c)는 단순 지지점의 위치 $\xi_1 = 0.41, 0.42, 0.43$ 일 경우의 분포 종동력 값의 변화에 따른 1 차 고유 진동수와 2 차 고유 진동수 값의 변화를 나타내고 있다. Fig.6(a)는 탄성지지의 스프링 상수가 각각 $\kappa = 0$ 일 경우의 1 차와 2 차의 고유 진동수 곡선을 나타낸다. 이 그림에서 단순 지지점의 위치 $\xi_1 = 0.41, 0.42$ 일때 1 차 고유 진동수와 2 차 고유 진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 발생하고 이때의 임계 분포 종동력 값은 각각 128.91, 134.61 이다. $\xi_1 = 0.43$ 일때는 1 차 고유 진동수가 0 이 되는 151.73 에서 다이버전스형 불안정이 발생한다. Fig.6(b), (c)는 탄성지지의 스프링 상수가 각각 $\kappa = 10, 100$ 일 경우의 1 차와 2 차의 고유진동수 곡선을 나타낸다. 이 그림에서는 Fig.6(a)에서와 마찬가지로 $\xi_1 = 0.41, 0.42$ 일 경우에는 플러터형 불안정이 발생하고 임계 분포 종동력 값도 128.91, 134.61로 변화가 없는 것을 알 수 있다. 이러한 계산 결과는 Smith 와 Herrmann⁶ 에 연구 결과와 유사하다. 그들은 집중 종동력을 받는 탄성 지지된 Beck's beam 에서 탄성 지지의 스프링 상수 값이 증가함에 따라 고유진동수 값은 증가하지만 임계 플러터 값에는 변동이 없다는 예상치 못한 계산 결과를 도출했다.

또한 $\xi_1 = 0.43$ 일 경우에는 다이버전스형 불안정이 발생하고, 임계 분포 종동력 값은 각각

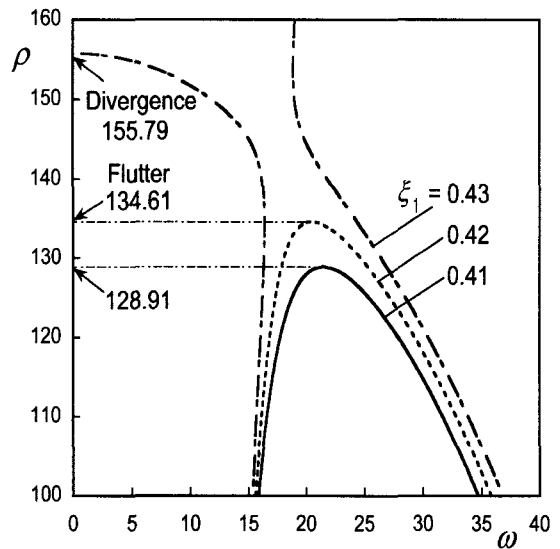
152.15, 155.79 로 증가하는 것을 알 수 있다. 즉 탄성지지의 스프링 상수 κ 가 증가는 플러터가 발생하는 임계값에는 영향을 주지않으며, 다이버전스가 발생하는 임계값은 증가하는 것을 알 수 있다.



(a) $\kappa = 0$



(b) $\kappa = 10$



(c) $\kappa = 100$

Fig.6 First and second Eigen-frequencies for distributed follower force when $\xi_1 = 0.41, 0.42, 0.43$

Fig.7 는 탄성지지의 스프링 상수가 $\kappa=1000$ 일 경우의 단순 지지점의 위치 변화에 따른 불안정 타입과 임계 분포 종동력 값을 나타낸다. 이 그림에서는 단순지지점의 위치가 $\xi_1 < 0.428$ 의 구간에서는 플러터형 불안정이 발생한다. $\xi_1 = 0.428$ 에서 임계 분포 종동력 값이 점프하여 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로 천이되고, $0.428 \leq \xi_1 < 0.712$ 구간에서는 다이버전스형 불안정이 발생한다. 또 $\xi_1 = 0.712$ 에서 다이버전스형 불안정에서 다시 플러터형 불안정으로의 천이가 발생하여 $0.712 \leq \xi_1 \leq 1$ 구간에서는 플러터형 불안정이 발생한다.

Fig.8 과 Fig.9 는 Fig.7 에서의 각각의 불안정 타입의 관계를 설명하고 있다. Fig.8 에서는 $\xi_1 = 0.412, 0.420, 0.426, 0.428$ 일때의 1 차와 2 차의 고유진동수곡선을 나타내고 있다. $\xi_1 = 0.412, 0.420, 0.426$ 에서는 1 차와 2 차 고유진동수가 일치하는 플러터형 불안정이 발생한다. $\xi_1 = 0.428$ 에서는 1 차 고유진동수가 0 이 되는 다이버전스형 불안정으로 천이 되는 것을 알 수 있다.

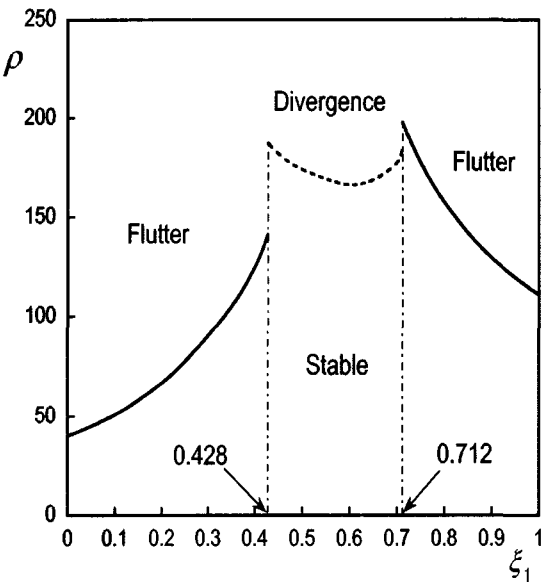


Fig.7 Critical distributed follower force as a function of the intermediate support when $\kappa=1000$

Fig.9 에서는 $\xi_1 = 0.705, 0.708, 0.710, 0.712$ 일때의 1 차와 2 차의 고유진동수곡선을 나타내고 있다. $\xi_1 = 0.705, 0.708, 0.710$ 에서는 1 차 고유진동수가 0 이 되어 다이버전스형 불안정이 발생한다. $\xi_1 = 0.712$ 에서는 1 차와 2 차 고유진동수가 일치되어 플러터형 불안정으로 천이 되는 것을 알 수 있다.

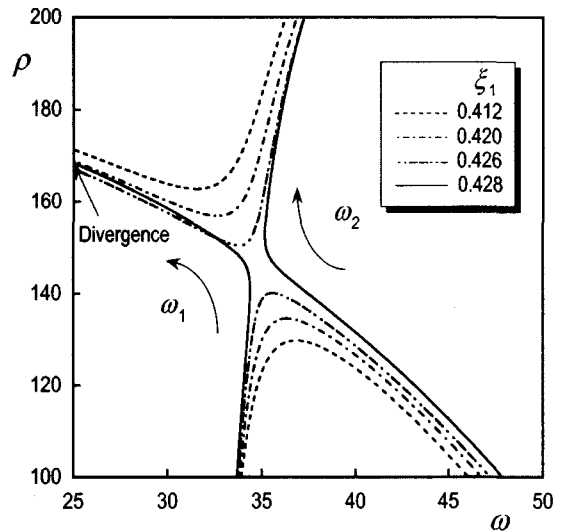


Fig.8 Transition of Eigen-frequency from flutter to divergence

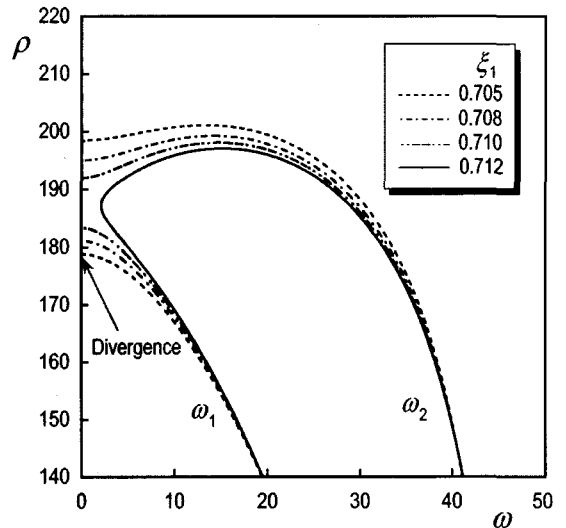


Fig.9 Transition of Eigen-frequency from divergence to flutter

Fig.10~12 는 Fig.7 에서 각각의 불안정 영역 ($\xi_1 = 0.3, 0.6, 0.9$)에서의 불안정 모드 형상을 나타내고 있다.

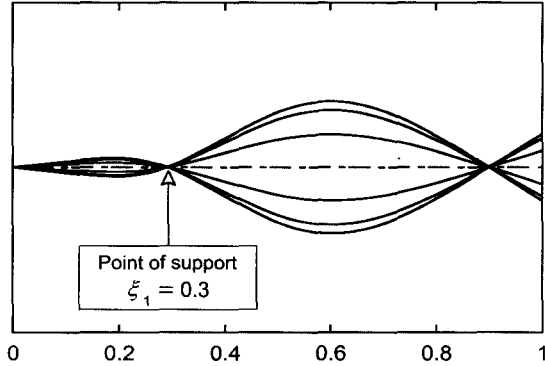


Fig.10 Flutter modes for one cycle of oscillation at critical distributed follower force $\rho_{cr} = 90.18$

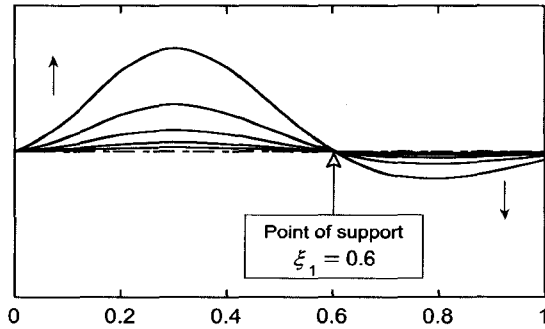


Fig.11 Flutter modes for one cycle of oscillation at critical distributed follower force $\rho_{cr} = 166.17$

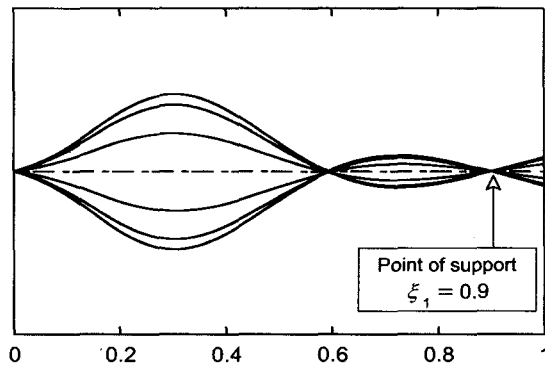


Fig.12 Flutter modes for one cycle of oscillation at critical distributed follower force $\rho_{cr} = 129.34$

4. 결론

본 연구에서는 건성 마찰력을 받는 탄성 재료를 탄성지지상의 Leipholz's beam 으로 모델화하여 중간 지지점이 안정성에 미치는 효과에 대하여 검토하였다. 얻어진 주요한 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 지지점의 위치 $\xi_1 = 0.428$ 에서 플러터형 불안정에서 다이버전스형 불안정으로의 천이가 발생한다.
- (2) 플러터 영역에서는 탄성지지 κ 의 크기에 관계 없이 임계 분포 종동력값은 일정하다.
- (3) 탄성지지 $\kappa \geq 110.33$ 일 경우 다이버전스형 불안정에서 플러터형 불안정으로 천이가 일어난다.

참고문헌

1. Pflüger, A., *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, 1964.
2. Leipholz, H., "Stability of Elastic Systems," Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980.
3. Sugiyama, Y., Katayama, T. and Sekiya, T., "Studies on Non- Conservative Problems of Instability of Columns by Difference Method," Proceedings of the Nineteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 23-31, 1971.
4. Kang, B. and Tan, C. A., "Parametric Instability of a Leipholz Column under Periodic Excitation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229(5), pp. 1097-1113, 2000.
5. Ryu, S. U. *Computational Dynamics Study on Nonconservative Problems of Elastic Stability*, PhD Thesis, Osaka Prefecture University, Japan, 2003.
6. Smith, T. E. and Herrmann, G., "Stability of a Beam on an Elastic Foundation Subjected to Follower Forces," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39, pp. 628-629, 1972.