

발사환경에 대한 위성 전장품의 구조진동 해석

정일호*, 박태원#, 한상원**, 서종휘**, 김성훈***

Structural Vibration Analysis of Electronic Equipment for Satellite under Launch Environments

Il Ho Jung*, Tae Won Park#, Sang Won Han**, Jong Hwi Seo **, Sung Hoon Kim***

ABSTRACT

The impulse between launch vehicle and atmosphere can generate a lot of noise and vibration during the process of launching a satellite. Structurally, the electronic equipment of a satellite consists of an aluminum case containing PCB. Each PCB has resistors and IC. Noise and vibration of the wide frequency band are transferred to the inside of fairing, subsequently creating vibration of the electronic equipment of the satellite. In this situation, random vibration can cause malfunctioning of the electronic equipment of the device. Furthermore, when the frequency of random vibration meets with natural frequency of PCB, fatigue fracture may occur in the part of solder joint. The launching environment, thus, needs to be carefully considered when designing the electronic equipment of a satellite. In general, the safety of the electronic equipment is supposed to be related to the natural frequency, shapes of mode and dynamic deflection of PCB in the electronic equipment. Structural vibration analysis of PCB and its electronic components can be performed using either FEM or vibration test. In this study, the natural frequency and dynamic deflection of PCB are measured by FEM, and the safety of the electronic components of PCB is evaluated according to the results. This study presents a unique method for finite element modeling and analysis of PCB and its electronic components. The results of FEA are verified by vibration test. The method proposed herein may be applicable to various designs ranging from the electronic equipments of a satellite to home electronics.

Key Words : Electronic Equipment(전기소자), Printed Circuit Boards (인쇄회로기판), Random Vibration (랜덤진동), Satellite(인공위성)

기호설명

Q = Transmissibility of the system

P = PSD(Power Spectral Density)

Z' = Acceleration level

δ = Displacement of PCB(Printed Circuit Boards)

접수일: 2003년 10월 14일; 게재승인일: 2004년 5월 7일

* 아주대학교 기계공학과 대학원

아주대학교 기계공학과부

Email : park@ajou.ac.kr Tel. (031) 219-2524

** 아주대학교 기계공학과 대학원

*** 한국항공우주연구원 위성분체연구그룹

1. 서론

위성은 발사과정에서 발사체와 대기의 충돌에서 발생하는 소음 및 진동에 의해 매우 열악한 환경에 놓이게 된다. 이때 발생하는 소음과 진동은 발사체 내부로 전달되어 위성체 및 위성 본체 내부 전장품(Electronic Equipment)을 가진다. 소음 및 진동에 의한 가진은 전장품 내부의 PCB(Printed circuit boards) 및 전기소자(Electronic Component)에 영향을 미쳐, 전장품의 기능저하 및 파괴를 유발할 수 있다.

위성 본체에 장착되는 전장품은 구조적으로 박스 형태를 가지며, 내부에 여러 장의 PCB가 프레임에 의해 지지되어 있다. 또한 PCB에는 각각의 기능에 따라 여러 종류의 전기소자가 부착되어 있다. 따라서 발사과정에서 발생하는 랜덤진동에 의한 위성체의 가진은 PCB의 전기소자에까지 전달되어 피로파괴를 유발할 수 있다. 특히 랜덤진동이 PCB의 고유진동수와 일치할 경우, 전기소자와 PCB의 연결 부분에 피로 파괴를 유발한다. 그러므로 위성 전장품의 설계 및 제작과정에서는 발사환경이 전장품에 미치는 영향에 대한 안정성 평가가 이루어져야 한다.

일반적으로 전기소자의 안정성은 PCB의 고유진동수와 모드형상 및 동적처짐량에 관련된다고 알려져 있다.² 따라서 본 연구에서는 위성 전장품 중 하나인 RDU(Remote Drive Unit)를 모델로 하여, 내부 프레임에 고정된 PCB를 1차시스템으로 모사하고, 해석적 방법을 통해 발사환경조건, 동적처짐량 및 고유진동수와 PCB 전기소자 안전성 사이의 관계를 규명하였다. 이 과정에서 연구의 가장 핵심적인 PCB의 고유진동수를 알아 보기위해 전기소자가 포함된 PCB 대한 유한요소모델링 방법에 대해 연구를 진행하였다. 또한 PCB에 대한 고유진동수 실험을 수행하였으며, 실험 결과와 유한요소해석 결과를 비교 분석하여 해석의 신뢰성 검증함과 동시에 전기소자의 안정성을 평가하였다.

2. PCB 전기소자의 안전을 분석

전기소자는 리드선(Lead Wire) 등을 통해 납접으로 PCB에 연결되어있으며, 비교적 넓은 면적에 걸쳐 장착되는 경우가 있어, 진동에 의한 PCB의 동적처짐에 매우 취약할 수 있다. 따라서 발사환경에

대한 PCB의 동적처짐을 해석적인 방법을 통해 알아보기 위해, PCB를 1차시스템으로 모사하였다.

1차시스템의 운동방정식은

$$mZ' + cZ' + kZ = P_0 \cos \omega t \quad (1)$$

와 같다. 1차시스템에서 입력힘에 대한 출력힘의 관계는 다음과 같다.^{1,3}

$$Q = \frac{F_0}{P_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}{[(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2]}} \quad (2)$$

시스템의 기반가속도에 대한 질량의 가속도 응답스펙트럼은 식 (3)과 같이 시스템의 전달률 Q에 관련된다.

$$P_{out} = Q^2 P_{in} \quad (3)$$

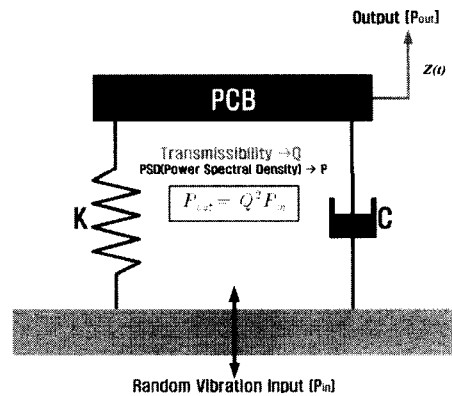


Fig. 1 Random Vibration Input

식 (2)를 식 (3)에 대입하면

$$P_{out}(f) = \frac{1 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2}{[(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\zeta \frac{\omega}{\omega_n})^2]} P_{in}(f) \quad (4)$$

와 같다. 여기에서 P는 입력과 응답의 PSD(파워스

펙트럼밀도 : Power Spectral Density)이다. 시스템의 응답은 랜덤가진(Random Vibration Input)에 대한 질량의 응답으로 얻을 수 있다. 입력 PSD(P_{in})는 전 주파수대역에서 발사체 종류에 따라 조금씩 다른 일정 상수 값으로 주어진다. 공진주파수에서 시스템의 ζ 가 매우 작은 경우(Lightly Damped System), 식 (2)의 전달률은 아래와 같이 근사할 수 있다.

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \rightarrow \zeta = \frac{1}{2Q} \quad (5)$$

또한 위성에 사용되는 PCB에서는 일반적으로 시스템의 전달률에 대해 다음과 같은 근사식을 사용한다.[2]

$$Q \cong \sqrt{f_n} \quad (6)$$

식 (4)를 전주파수 대역에 대해 적분하면

$$Z'^2_{out} = \frac{2\pi f_n P_{in}}{8\zeta} \quad (7)$$

와 같다. 식 (7)에 식 (5)를 대입하고, Q대신에 식 (6)을 대입해 정리하면

$$Z'_{out-rms} = \sqrt{\frac{\pi}{2} f_n P_{in} Q} = \sqrt{\frac{\pi}{2} f_n^{\frac{3}{2}} P_{in}} \quad (8)$$

와 같이 랜덤가진에 대한 1차시스템의 응답을 구할 수 있다. 식 (6)은 많은 실험으로부터 얻어진 경험적 근사식이다.² 식 (5)로부터 통계학적 신뢰도 99.7% Level을 갖는 응답의 최대가속도는

$$Z'_{out-Max} = 3Z'_{out} \cong 3\sqrt{\frac{\pi}{2} f_n^{\frac{3}{2}} P_{in}} \quad (9)$$

이다. 식(9)에서 구한 최대 가속도 값으로부터 기관의 최대 처짐은 가속도와 변위의 관계식으로부터, 식 (10)과 같이 구할 수 있다.

$$\delta_{max} = \frac{9.8 Z'_{out-Max}}{f_n^2} (in) \quad (10)$$

위의 식(10)에서 구한 최대 처짐은 시스템의 최대 가속도 응답에 대한 PCB의 최대처짐량이다.

PCB의 형상 및 전기소자의 부착조건과 같은 요소들을 감안한 최대허용처짐량은 일반적으로 다음의 실험식을 이용한다.²

$$\delta_{allow} = \frac{0.00022B}{C \cdot h \cdot R \cdot \sqrt{L}} (in) \quad (11)$$

B = 전기소자에 평행한 PCB edge 길이

L = 전기소자의 길이, h = PCB의 두께

R = 전기소자의 상대위치상수

C = 전기소자의 Type에 따라 달라지는 상수

=1.00	standard Dual In-line Package
	Pin grid array with perimeter wires
	Leaded chip carrier
=1.26	Side-brazed Dual In-line Package
=2.25	Leadless Ceramic Chip Carrier

여기서 R은 다음의 식(12)을 이용하여 구한다.

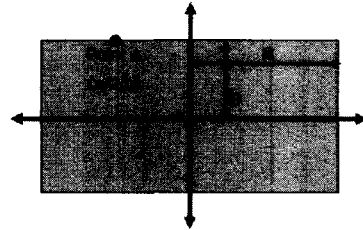


Fig. 2 Relative Position Factor

$$Z = Z_0 \sin \frac{\pi X}{a} \sin \frac{\pi Y}{2b} \quad (12)$$

$$R = \frac{Z}{Z_0} \quad (13)$$

여기에서 a와 b는 PCB의 중심점에서 길이와 폭이고, X와 Y는 a와 b에 대해 전기소자의 위치에 대한 비율이며, Z_0 는 PCB의 최대 처짐이다. 식 (12)와 (13)은 PCB의 처짐에 대해 전기소자가 장착 위치에 따라 다른 변형량을 가짐을 보여준다. 즉 전기소자의 중심이 Fig. 2의 Point A에 위치하면 X와 Y는 각각 a/2, b가 되어 R=1이 된다. 또한 식 (11)의 B의 값은 전기소자가 PCB 길이방향과 폭 방향 중, 어느 방향에 평행한가에 따라 변형량이 달라짐을 의미한다. 식(11)과 (13)을 이용해 구한 최대허용처짐량과 식(10)에서 구한 최대처짐량 및 우주환경에 적용되

는 일반적인 안전계수 1.4를 이용하여 PCB의 안전율을 구하면 다음과 같다.

$$\text{Margin of safety} = \frac{\delta_{allow}}{1.4 \times \delta_{max}} - 1 \geq 0 \quad (14)$$

식 (14)는 안전율이 0보다 큰 경우에 안전함을 뜻한다.²

3. PCB 유한요소해석 및 고유진동수 실험

앞의 2장에서 거론한바와 같이 PCB의 안전성평가를 위해서는 PCB의 고유진동수에 관계된 최대동적처짐량과 PCB의 형상과 전기소자의 위치에 관련된 최대허용처짐량을 알아야한다. 따라서 본 연구에서는 PCB의 최대처짐량에 관련된 고유진동수의 측정을 위해 단일 PCB에 대한 유한요소해석 및 진동 Test를 실시하였다. 이 과정에서 PCB에 대한 진동 Test 결과와 여러 단계의 유한요소해석 결과를 비교 분석하여 가장 유효한 유한요소모델링 방법을 제시한다.

3.1 PCB 유한요소해석 모델 개발

본 연구에 모델이 된 RDU의 내부에는 13장의 PCB가 내장되어있으며, 구조는 아래의 Fig. 3에서 보는바와 같다.

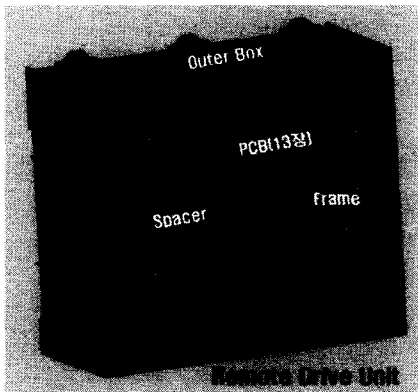


Fig. 3 Remote Drive Unit

RDU 내부 PCB는 스페이서(Spacer)로 연결되어 있으며, 스페이서는 프레임에 의해 지지되고, 프레임은 외장박스(Outer Box)에 고정되어있다.

유한요소모델의 구성은 스페이서와 PCB 및 리드선의 세가지 부분만으로 구성하였으며, 각 단계별로 모델을 다르게 구성하여 가장 유효한 모델링 방법을 찾았다. 유한요소모델에 적용된 각 부분의 물성치(Material Properties)는 아래의 Table 1과 같다.

Table 1 PCB Material Properties

size(길이×폭×두께)	189×82.3×1.6(mm)
PCB material properties (Polyimide-Glass)	탄성계수 = 17926(N/mm ²)
	프아송비 = 0.17
	밀도:3.1E-9(N-sec ² /mm ⁴)
Spacer material properties (Alumium 6061)	탄성계수 = 68258(N/mm ²)
	프아송비 = 0.33
	밀도:2.7E-9(N-sec ² /mm ⁴)
Component material properties (Ceramic)	탄성계수 = 2.8E5(N/mm ²)
	프아송비 = 0.23
	밀도:3.6E-9(N-sec ² /mm ⁴)
Lead Wire material properties (Cu)	탄성계수 = 1.25E5(N/mm ²)
	프아송비 = 0.34
	밀도:8.93E-9(N-sec ² /mm ⁴)
Node	3466개
Element	1700개

전체적인 유한요소모델은 크게 두 종류이다. PCB 상에 장착된 전기소자를 모델링 한 것과 전기소자의 질량을 PCB에 분포(Distribute)시켜 PCB의 밀도에 적용한 방법이다. 이 큰 두 가지 틀을 중심으로 3가지 단계를 통해 PCB의 유한요소 모델을 구성하였다. 유한요소모델 1단계는 아래의 Fig. 4와 5에서 보는 바와 같다. 가장 기초적으로 스페이서를 제외한 PCB를 기본으로 하여 두 가지 모델을 구성하였다.

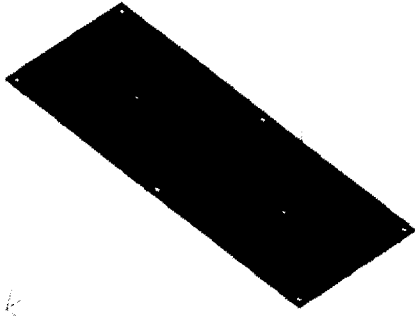


Fig. 4 1-Model 1 : Only PCB Model

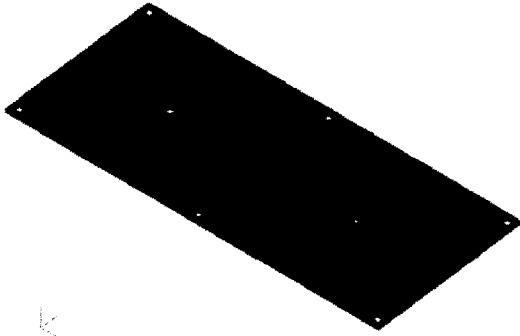


Fig. 5 1-Model 2 : PCB and Electronic Component

Fig. 4는 전기소자의 질량을 PCB에 분포시킨 것이다. 즉 PCB와 전기소자의 질량을 더해 PCB의 부피로 나눠 PCB의 밀도를 구함으로서 전기소자를 모델링에 적용하였다. Fig. 5는 PCB에서 중요한 전기소자를 모델에 포함한 것으로서, 모델링 되지 않은 전기소자는 Fig. 4의 Model 1에서와 같이 PCB에 질량을 분포시켰다. 이와 같은 방법은 다음에 나올 2단계와 3단계에도 동일하게 적용된다.

두 모델은 PCB가 스페이서에 의해 완전 구속된다는 점을 감안하여, 스페이서를 모델링하지 않는 대신, PCB에 뚫려있는 8개의 구멍에 직접 6자유도 구속을 주었다.

아래의 Fig. 6과 7은 각각 1단계 Model 1과 2의 해석 결과로서 유한요소해석은 범용 유한요소해석 프로그램인 NASTRAN 70.7을 사용하였다.

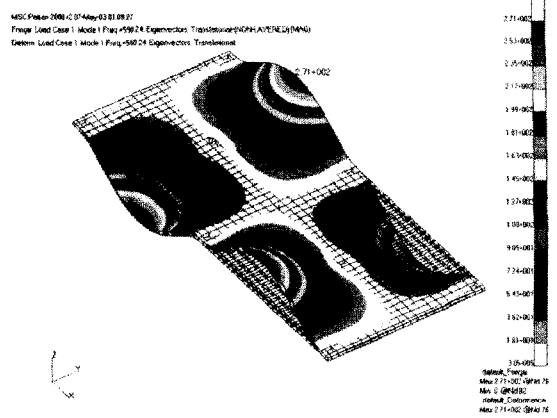


Fig. 6 1-Model1 Analysis Result : 1st Mode(590Hz)

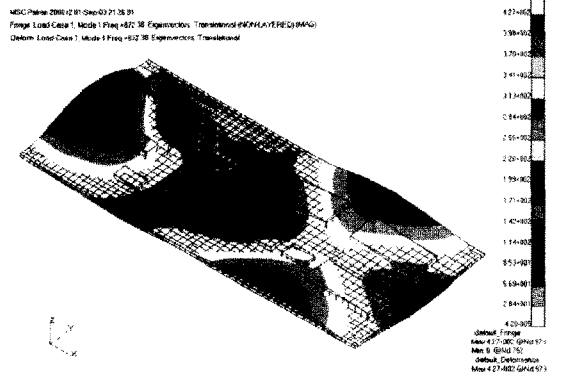


Fig. 7 1-Model2 Analysis Result : 1st Mode(872Hz)

위의 해석 결과에서 보는바와 같이 전기소자를 모델에 포함하는 것과 하지 않는 것에는 1차고유진동수(1st Natural Frequency)와 모드형상(Mode Shape)에 많은 차이를 보인다.

유한요소모델 2단계는 1단계의 두 모델에 스페이서를 포함한 것이다.

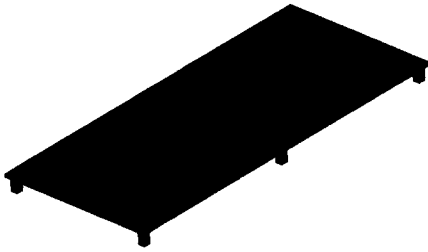


Fig. 8 2-Model 1

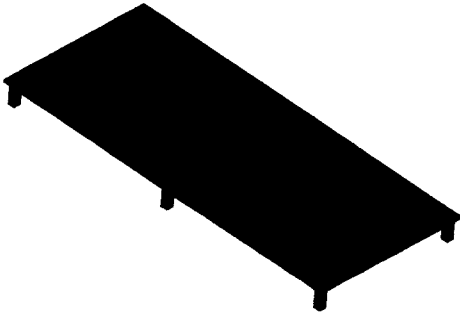


Fig. 9 2-Model 2

유한요소모델 2단계의 Model 1과 2는 위의 Fig. 8과 9에서 보는 바와 같다. 각각의 모델에서 구속 조건은 스페이스 끝에 6자유도 구속을 주었다.

위의 Fig. 8에 대한 유한요소 해석결과는 아래의 Fig. 10과 같다. 유한요소 해석결과 모드형상은 변화가 없지만, PCB의 1차고유진동수는 567Hz로 1단계보다 약 24Hz정도 낮아진 것을 볼 수 있다.

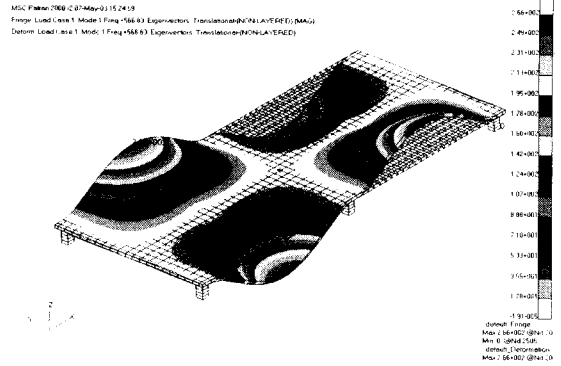


Fig. 10 2-Model1 Analysis Result : 1st Mode(567Hz)

Fig. 9의 Model 2에 대한 해석결과는 Fig. 11과 같다. 2단계 Model 1과 마찬가지로 Model 2도 스페이스를 추가한 결과, 824Hz로 1단계에 비해 50Hz정도 1차고유진동수가 낮아진 것을 볼 수 있다.

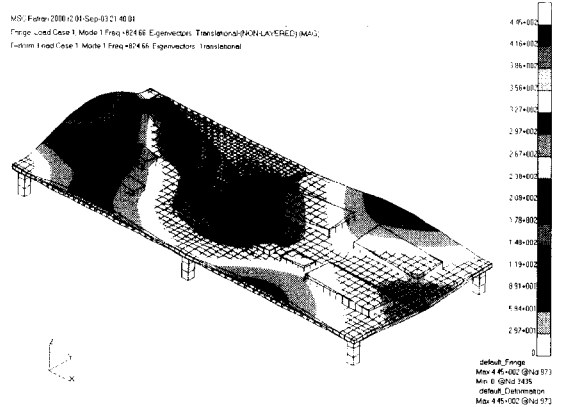


Fig. 11 2-Model2 Analysis Result : 1st Mode(824Hz)

위의 1단계와 2단계의 유한요소해석 결과를 비교해 보면, 전기소자의 모델링 유무에 따라 PCB의 1차고유진동수 및 모드형상에 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 또한 모델에 스페이스를 추가함으로써, 시스템이 유연해져 1차고유진동수가 저하됨을 알 수 있다. 2단계 해석과는 별도로 알루미늄으로 되어있는 스페이스의 재질을 강철로 바꾸어 해석해본 결과, 1단계의 결과와 거의 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 즉 스페이스의 유연성 또한 PCB의 1차고유진동수에 영향을 미친다는 것을 알 수 있었다.

1단계와 2단계의 Model 2에서 전기소자는 PCB에 노드(Node)를 공유하는 형식으로 모델링 하였

다. 즉 전기소자를 PCB에 연결하는 리드선이 모델에 포함되지 않았다.

유한요소해석의 마지막 3단계는 좀더 세밀한 모델링을 위해, PCB에 전기소자를 연결하는 리드선을 모델에 포함하였다.

상세한 리드선의 모델링은 수치 해석적으로 많은 오차를 유발 할 수 있다. 왜냐하면 PCB의 진동 특성을 알아보기 위한 유한요소의 크기와 리드선의 유한요소의 크기는 크게 다를 수밖에 없기 때문이다. 따라서 해석의 정밀도와 효율에 상당한 영향을 미친다.⁴ 그러므로 연구에서는 리드선 부분을 간략화 하는 방안의 하나로 빔 요소(Beam Element)를 사용하였다. 아래의 Fig. 11은 유한요소해석 3단계 모델을 보여준다. 원으로 표시 된 전기소자의 리드선 부분을 빔 요소를 사용하여 모델링 한 것을 볼 수 있다.

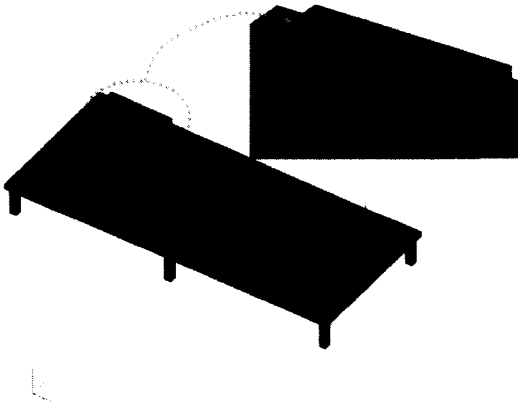


Fig. 12 3-Model : 3D Mesh

위의 Fig. 12대한 유한요소해석 결과는 아래의 Fig. 13와 같다. Fig. 13에서 보는바와 같이 3단계의 해석 결과는 778Hz이다. 이것은 리드선이 PCB의 모드형상에는 영향이 없지만, 1차고유진동수에 상당한 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

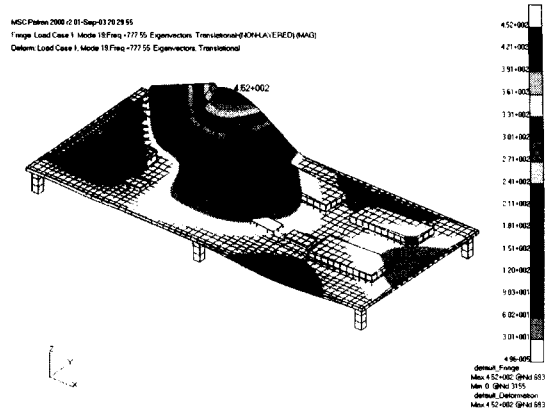


Fig. 13 3-Model Analysis Result : 1st Mode(778Hz)

유한요소모델 1 ~ 3단계의 결과와 비교 분석 및 모델의 신뢰성 확보를 위해 아래의 3장 2절과 같이 PCB 고유진동수 실험을 수행하였다.

3.2 PCB 고유진동수 실험

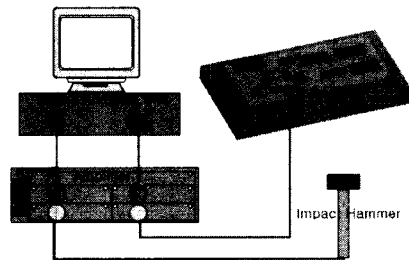


Fig. 14 Natural Frequency Test set

PCB의 전기소자에 대해 앞의 2장에서 알아본 바와 같이 1차고유진동수를 이용하여 안전성을 평가할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 PCB에 대한 1차고유진동수를 얻기 위해 3장 1절에서와 같이 유한요소해석 모델의 개발과정을 수행하였으며, 유한요소모델의 신뢰성 확보 및 비교 분석을 위해 단일 PCB에 대한 고유진동수 실험을 수행하였다.

고유진동수 실험은 위의 Fig. 14에서 보는바와 같이, RDU에서 외장 박스를 제외한 스페이서와 프레임 부분을 모사한 치구를 제작하여 수행하였다. 실험장치에서 PCB는 치구에 의해 완전 구속된 상태이다. 실제 PCB는 알루미늄으로 된 스페이서에

의해 연결되어 있으며, 스페이서는 프레임에 의해 지지되고, 프레임은 외장박스에 고정된다. Fig. 14에서 보는 치구는 이것을 모사한 것이다. 고유진동수 실험 장치에 PCB를 장착하여, 실험을 수행한 결과는 아래의 Fig. 15와 같다.

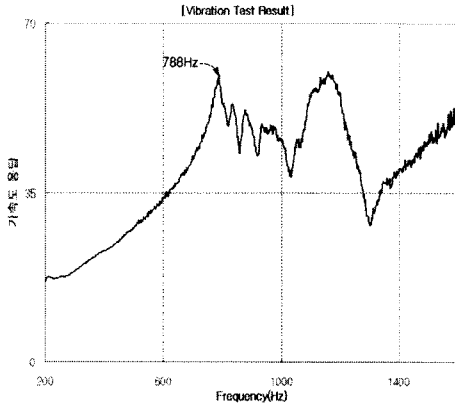


Fig. 15 Test - 1st Mode : 788Hz

Fig. 15의 고유진동수 실험 결과에서 보는바와 같이 PCB의 1st Mode는 788Hz로 나타났다. 이 실험 결과는 앞의 3장 1절의 유한요소해석 3단계, 즉 리드선을 간략화 하여 해석한 결과인 778Hz와 매우 유사하다는 것을 알 수 있다.

이와 같이 실험 결과와 유한요소해석 결과의 비교를 통해, RDU PCB에 대한 유한요소해석 모델은 스페이서와 전기소자 및 리드선을 포함한 모델이 가장 신뢰성이 있다는 것을 알 수 있다.

4. PCB 전기소자의 안전을 분석

앞의 2장에서 알아본바와 같이 PCB 위에 장착되어 있는 전기소자는 그 종류 및 장착 위치에 따라 각기 다른 안전율을 갖는다. 이는 공진주파수 상태에서 식 (11)과 (13)을 이용하여 구하는 PCB의 최대허용처짐량이 전기소자의 장착조건 및 종류에 따라 달라지기 때문이다.

따라서 본 연구에서는 위의 유한요소해석 결과와 실험 결과에서 얻은 PCB의 1차고유진동수를 이용하여 PCB의 최대동적처짐량을 계산하였다. 또한 각 전기소자의 종류 및 장착 위치를 고려하여, 전기소자의 최대허용처짐량을 구하고 안전율을 분석하였다.

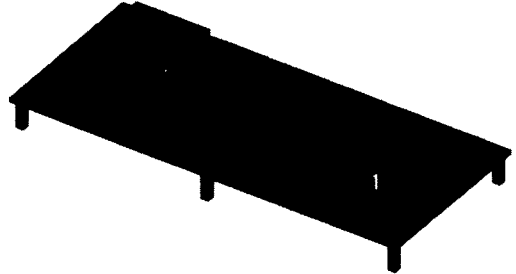


Fig. 16 Margin of Safety

위의 Fig. 16의 1번 전기소자에 대한 안전율을 분석한다. 우선적으로 PCB의 최대동적처짐량 계산에 필요한 1차고유진동수 값은 3장의 유한요소해석 3단계의 결과인 778Hz를 사용하며, 입력 PSD 값은 위성 발사체에 대한 발사 환경조건을 기준으로 하여 일정한 값인 $0.16G^2/Hz$ 을 적용한다. 이 값을 식 (9)에 대입하여 최대응답가속도를 구하고, 다시 이 결과를 식(10)에 대입하여 최대동적처짐량을 구한다. 발사환경에 대한 PCB의 최대동적처짐량을 구하면 0.089mm의 값을 얻을 수 있다.

Table 2 Shape of PCB & Electronic Component

B(Component에 평행한 PCB Edge 길이)	189mm
L(Component의 길이)	35.5mm
H(PCB의 두께)	1.6mm
C(Component의 Type에 따른 형상계수)	1.0
R(Component의 위치에 따른 형상계수)	0.267

1번 전기소자의 형상과 종류 및 장착위치를 감안하여 0.4145mm의 최대허용처짐량을 얻을 수 있다. 이 값은 식 (11)에 위의 Table 2의 값을 적용한 결과이다. 위의 Table 2에서 C의 값은 1번 전기소자의 종류가 standard Dual In-line Package이므로 1.0의 값을 가지며, R은 PCB 중심에서의 위치를 측정하여 식 (13)을 통해 계산한 값이다. 계산된 최대동적처짐량과 최대허용처짐량을 이용하여 식 (14)에 대입하여 안전율을 계산하면 2.32의 안전율을 얻을 수 있다. 2.32의 안전율은 1번 전기소자가 발사환경에 대해 안전함을 의미한다. 유한요소 해석에서 가

장 많은 변형이 일어나는 부분에 장착 된 전기소자도 1이상의 안전율을 보였으며, 이외의 다른 전기소자들도 같은 방법으로 평가한 결과 모두 1~3사이의 안전율을 가짐을 알 수 있었다.

5. 결론

지금까지 PCB를 간단한 1차시스템으로 모사하고, 고유진동수와 동적처짐량을 이용하여 전기소자의 안전율을 계산함으로써 안정성 평가를 할 수 있음을 보였다. 또한 PCB의 정확한 1차고유진동수를 유한요소해석으로 구하기 위해서는 스페이서와 전기소자 및 리드선을 유한요소모델에 포함시키는 것이 유한요소해석과 고유진동수 실험 결과의 비교를 통해 타당함을 확인하였다.

향후 보다 신뢰성 있게 PCB의 안정성을 평가하기 위해서는 전기소자와 리드선에 대한 보다 정밀한 유한요소모델의 구성이 필요하다. 또한 스페이서가 PCB의 1차고유진동수에 상당한 영향을 미치는 것으로 보아, 전체 RDU 시스템에 대한 해석 결과는 현재 단일 PCB의 해석 결과와 차이를 보일 것으로 예상된다. 따라서 PCB와 스페이서, 프레임 및 외장 박스를 포함한 RDU 시스템 전체를 해석하여 각각의 부품간의 상관관계의 영향에 대한 평가도 필요하다.

참고문헌

1. Meirovitch, L., "Elements of vibration analysis Internation Edition," McGRAW - HILL Book Company, 1986.
2. Steinberg, D. S., "Vibration analysis for electronic equipment," Jonh Wiley & Sons inc, 2000.
3. Meirovitch, L., "Analytical Methods in vibrations," The Macmillan Company, 1967.
4. Kim, K. J., "Estimation of operational strain from vibration measurement: An application to lead wire of chips on printed circuit boards," Journal of sound and vibration, 210(5), 567-579, 1998.