

# 단섬유 복합체에서 탄성계수비가 내부응력에 미치는 영향

김홍건\*, 노홍길†

(논문접수일 2004. 4. 6, 심사완료일 2004. 4. 29.)

## Effects of Elastic Modulus Ratio on Internal Stresses in Short Fiber Composites

H. G. Kim\*, H. G. Noh†

### Abstract

The conventional SLT(Shear Lag Theory) which has been proven that it can not provide sufficiently accurate strengthening predictions in elastic regime when the fiber aspect ratio is small. This paper is an extended work to improve it by modifying the load transfer mechanism called NSLT(New Shear Lag Theory), which takes into account the stress transfer across the fiber ends and the SCF(Stress Concentration Factor) that exists in the matrix regions near the fiber ends. The key point of the model development is to determine the major controlling factor among the material and geometrical coefficients. It is found that the most affecting factor is the fiber/matrix elastic modulus ratio. It is also found that the proposed model gives a good result that has the capability to correctly predict the elastic properties such as interfacial shear stresses and local stress variations in the small fiber aspect ratio regime.

**Key Words :** Composite(복합체), Fiber Aspect Ratio(섬유종횡비), Volume Fraction Ratio(체적함유율), SCF(응력집중계수), NSLT(신전단지연이론), Elastic Modulus Ratio(탄성계수비)

## 1. 서론

복합재료의 최적설계를 위해 피로 메커니즘과 함께 복합재료의 강화과정에 대한 지식은 강성과 강도의 견지에 있어서 아주 중요하다. 일반적으로 단섬유(보강재)와 모재 사이의 상호작용은 매우 복잡하며 불완전하게 이해되고 있는 경우가 많다. 단섬유 복합체에 있어서 작용하는 하중은 강

화재인 섬유로 직접 전달되지 않고 모재에서 보강재 양단을 통하여 전달이 된다. 이와 관련되어 단섬유로 보강된 복합체의 복합강화메커니즘을 이해하기 위한 여러 이론 중에서 재료역학적 접근을 통한 응력해석 방법이 기존의 연구에서 보고된 바 있다<sup>(1)</sup>. 보강재의 길이가 긴 장섬유일 경우에는 양단의 수직응력전달은 전체에 비하여 매우 작기 때문에 무시할 수 있으며 하나의 연속섬유로 간주할 수

\* 전주대학교 기계공학과 (hkim@jj.ac.kr)  
주소: 560-759 전북 전주시 완산구 효자동 3가 1200번지  
† 전북대학교 대학원 정밀기계공학과

있다<sup>(1)</sup>. 그러나 단섬유보강의 경우, 이러한 양단효과는 매우 커서 무시할 수 없으며 그 효과는 보강재 길이의 함수로 볼 수 있다<sup>(2)</sup>. 장섬유 보강의 경우, 재료역학적 접근으로서의 응력해석을 위해서 유도된 전단지연이론(Shear Lag Theory : SLT)<sup>(3,4)</sup>이라 불리는 이론이 존재하나 단섬유 보강의 경우 이 이론은 잘 맞지 않는 것으로 알려져 있다<sup>(5)</sup>. 이와같은 복합체에 있어서 모재의 항복응력과 평균응력을 가정하여 계산된 이론이 있지만 이러한 응력계산은 거시적인 복합체응력 상승효과의 근사적 해석에는 도움이 되나 순수 탄성영역인 인장 초기단계에는 적용할 수가 없게 된다. 그 외에도 Taya와 Arsenault<sup>(4)</sup>는 보강재 단의 응력을 모재의 평균응력으로 가정하여 계산하였다. 즉, 보강재 단의 응력집중이 없다고 가정한 것이다. 이러한 단점들을 보완하기 위해 Kim<sup>(5)</sup>은 Closed Form의 해인 수정전단지연이론(Modified Shear Lag Theory : MSLT)을 공식화시켰으며, 이의 기본원리는 응력집중이 심하게 일어나는 부분인 보강재와 보강재 사이의 모재에 가상의 보강재를 투입시켜 불연속섬유를 연속섬유화시키는 것이다. 즉, 가상섬유를 사용하여 실제 섬유에 적용했던 미분방정식을 가상섬유에도 동시에 적용하는 것이다. 이어서 Kim<sup>(6)</sup>은 Closed Form의 해를 사용해 수정전단지연이론으로 기지의 항복시점과 기지내의 응력집중을 예측할 수 있는 복합재료의 탄성과 탄소성 거동을 규명하였으며, 후에 Kim은 단섬유의 복합강화효과를 계산하기 위한 식을 사용할 때, 이러한 MSLT를 사용하지 않고 섬유단의 응력집중계수(Stress Concentration Factor : SCF)를 정의해 됨으로써 빠른 계산을 할 수 있는 해를 구하였다. 즉 SCF 산정시 가장 민감한 변수인 탄성계수비(Modulus Ratio :  $E_f = E_f/E_m$ )의 함수로만 정의하였다. 이는 유한요소해석(FEA) 결과로부터도 함수관계를 도출해 내었으며 응력집중계수를  $SCF = \sqrt{E_f/E_m}$ 로 정의한 후 보강재의 내부응력 및 화이버와 모재 경계에서의 전단응력을 신전단지연이론(New Shear Lag Theory : NSLT)을 이용하여 계산하였으며, 상세한 유도 과정은 기존의 연구<sup>(7)</sup>에 기술되어 있다.

본 논문에서는 대표모델(Representative Volume Element : RVE)로서 축대칭 모델을 사용하여 기존의 얻은 연구결과로부터 탄성영역에서 탄성계수비의 변화에 따른 보강재의 응력변화와 보강재/모재 경계면에서의 전단응력을 산출하였다.

이에 대한 SLT와 NSLT의 수치에 추이를 고찰해 본 결과, 섬유형상비가 작은 영역에서는 보강재의 수직응력은 매우 큰 차이가 있음이 보여지고 있으며 섬유형상비가 큰 영역에서는 보강재의 수직응력은 차이가 거의 없음이 보여지

고 있다. 마찬가지로 섬유/모재의 계면전단응력도 역시 이와 비슷한 경향을 보이고 있으나 SLT에 의한 계면전단응력이 NSLT에 의한 결과보다 더 높게 나타남을 알 수 있었다. 결과적으로 이러한 NSLT를 적용하면 단섬유 보강복합체의 내부응력을 예측하는데 비교적 용이한 접근이 가능하게 됨을 알 수 있었다.

## 2. 이론 해석

본 이론의 미세구조역학적 모델은 기존의 모델과 같이 보강재와 모재가 탄성적으로 거동하고 있다고 가정하고, 계면이 항복이나 슬립 없이 보강재들로부터 모재로 응력이 전달된다고 가정한다. 각 보강재는 Fig. 1에서처럼 정육각형으로 규칙적으로 다른 보강재들에 의하여 둘러싸여 있다고 가정한다.

기존의 연구결과<sup>(6)</sup>에 의하면 내부응력의 크기는 다음과 같이 된다.

$$\sigma_f = E_f \epsilon_c \left\{ 1 - \frac{\cosh(nz/r_f)}{\cosh(ns)} \right\} \quad (1)$$

$$\tau_e = \frac{n E_f \epsilon_c \sinh(nz/r_f)}{2 \cosh(ns)} \quad (2)$$

이 때 보강재 단에서의 응력전달시 발생하는 SCF에 영향을 주는 여러 인자중 가장 민감한 변수인 탄성계수비(Modulus Ratio ;  $E_f = E_f/E_m$ )의 함수로만 정의를 해 주면 기존 경계

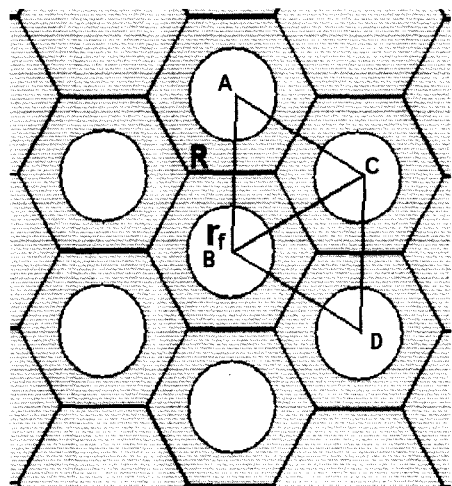


Fig. 1 Regularly arranged hexagonal model

조건을 수정함으로써 보강재 단에서 집중응력이 전달됨을 고려한 신전단지연이론(New Shear Lag Theory : NSLT)은 다음과 같이 정리된다<sup>(7)</sup>.

$$\sigma_f = E_f \left\{ 1 + \left( \sqrt{\frac{E_m}{E_f}} - 1 \right) \times \frac{\cosh(nz/r_f)}{\cosh(ns)} \right\} \epsilon_c \quad (3)$$

$$\tau_e = \frac{n E_f (1 - \sqrt{E_m/E_f}) \sinh(nz/r_f)}{2 \cosh(ns)} \epsilon_c \quad (4)$$

### 3. 수치에 결과 및 고찰

NSLT의 정식화 과정 및 결과검증에 관해서는 기존의 연구<sup>(7)</sup>에서 FEM 결과와 매우 유사한 결과를 얻었으므로 이 논문에서는 순수하게 SLT와 NSLT의 복합강화효과가 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 계산하였다. 따라서 SLT의 결과식 (1), (2) 및 NSLT의 결과식 (3), (4)를 이용한 수치예로서 복합체의 내부응력을 비교하기 위하여 적용된 수

치는 복합체의 변형률  $\epsilon_c=0.001$ , 체적함유율  $V_f=0.2$ 이고 섬유중형비는  $s=4, s=8, s=16$  그리고  $s=32$ 인 경우 각각에 대하여  $E_f/E_m=1, E_f/E_m=2, E_f/E_m=4, E_f/E_m=8, E_f/E_m=16$  그리고  $E_f/E_m=32$ 인 경우를 본 논문의 모델 NSLT의 해석결과와 SLT를 비교 분석하였다.

#### 3.1 보강재의 내부응력(수직응력)

Fig. 2~5는 각각 SLT, NSLT에 대한 0.1%의 변위로 하중을 가한 경우의 해석 결과로서 보강재의 내부응력을 나타낸다. 앞에서 기술한대로 SLT의 계산결과는 보강재 양단에서 0이 되고 이는 기준이론(SLT)에서 하중전달을 무시하는 가정을 전제로 했기 때문에 나타나는 당연한 결과라 볼 수 있으며, 본 논문의 제안모델인 NSLT의 결과는 SLT의 결과보다 높은 응력상태를 보여주고 있다. Fig. 2(a) 및 (b)는 섬유형상비가 4인 경우에 관하여 탄성계수비의 변화에 따른 보강재의 내부응력을 각각 보이고 있다. 여기서 보강재

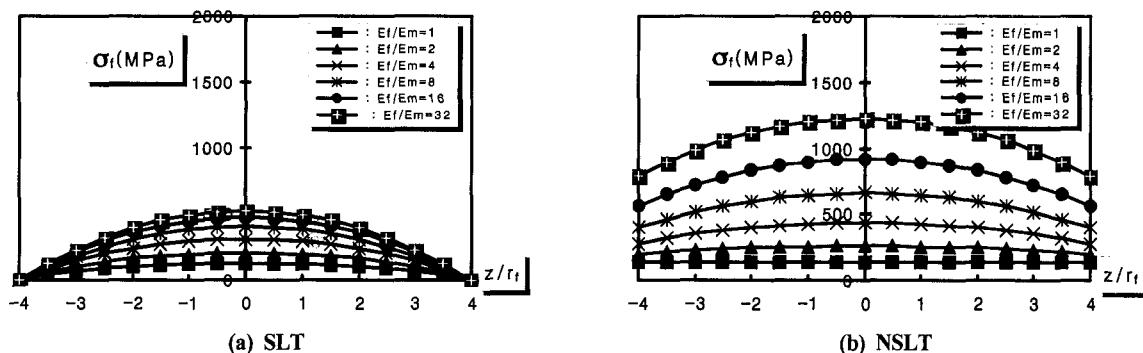


Fig. 2 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=4$  for fiber internal stress

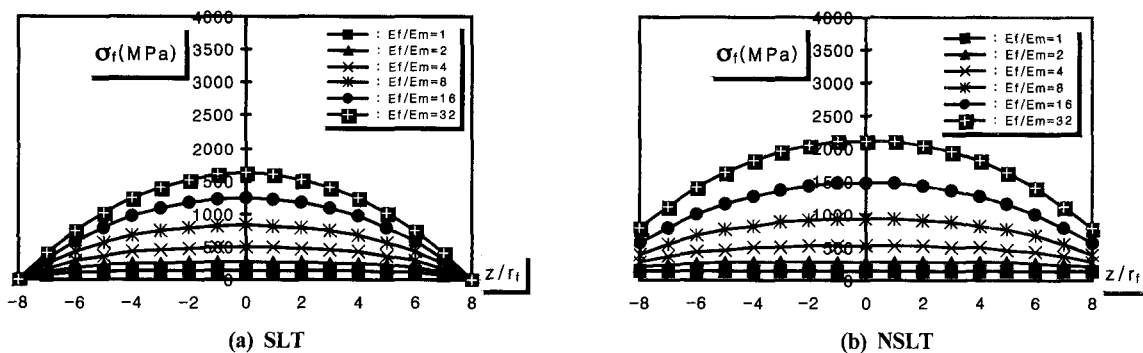
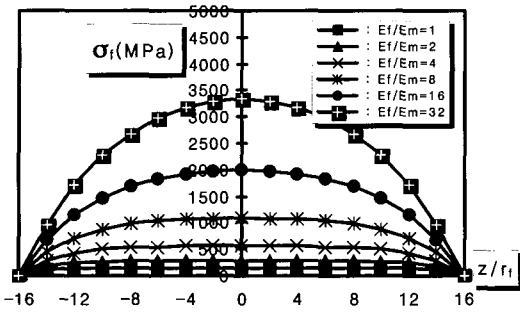


Fig. 3 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=8$  for fiber internal stress

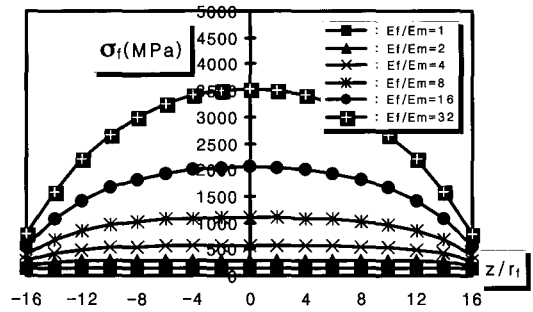
내부응력은 탄성계수비의 크기에 따라 매우 민감하게 영향을 받는다는 것을 알 수 있으며 섬유형상비가 비교적 작은 경우 보강재내의 최대응력은 2배 이상이 됨을 알 수 있으나 탄성계수비가 작은 경우에는 SLT 및 NSLT 모두 큰 차이가 없음을 보이고 있다.

Fig. 3(a) 및 (b)는 섬유형상비가 8인 경우에 관하여 탄성계수비의 변화에 따른 보강재의 내부응력을 각각 보이고 있다. 여기서 보강재 내부응력은 탄성계수비의 크기에 따라 다소 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 4 및 5는 섬유형상비가 16 및 32인 경우에 관하여

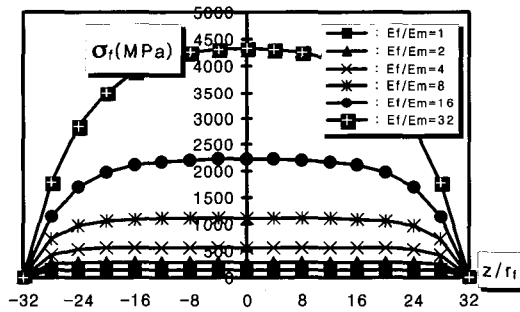


(a) SLT

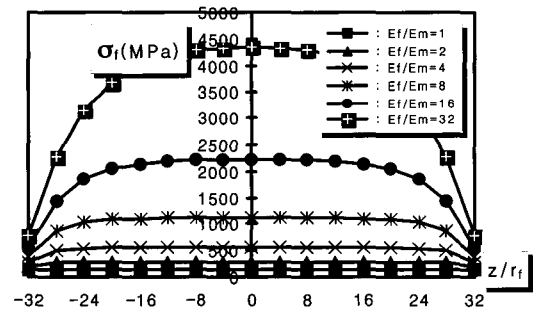


(b) NSLT

Fig. 4 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=16$  for fiber internal stress

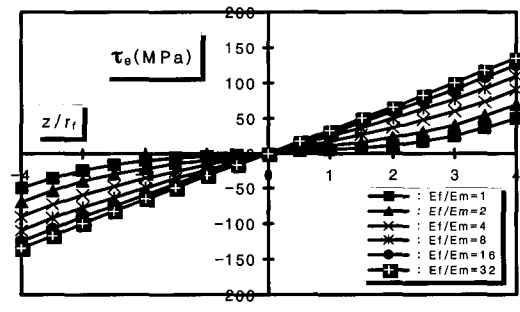


(a) SLT

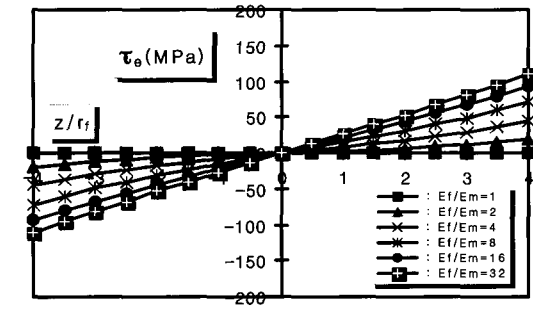


(b) NSLT

Fig. 5 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=32$  for fiber internal stress

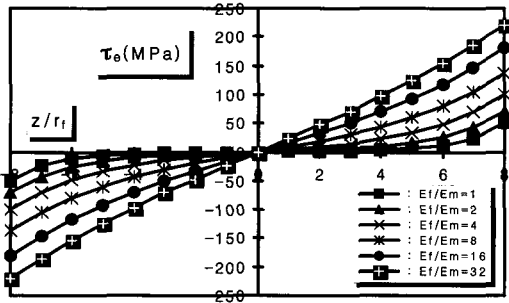


(a) SLT

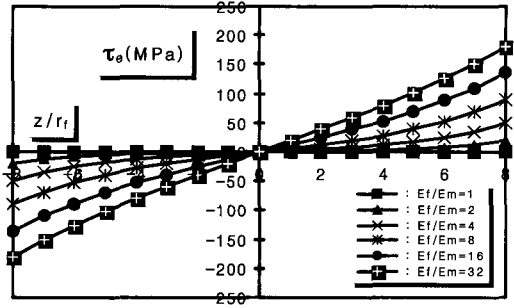


(b) NSLT

Fig. 6 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=4$  for fiber/matrix interfacial shear stress

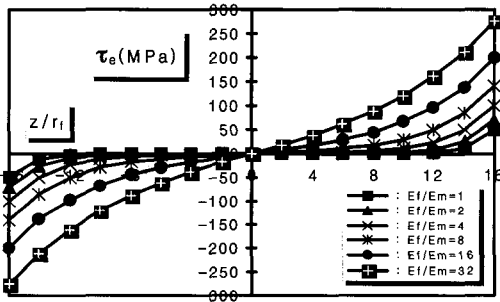


(a) SLT

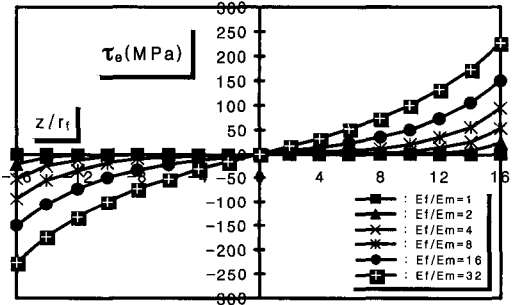


(b) NSLT

Fig. 7 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=8$  for fiber/matrix interfacial shear stress

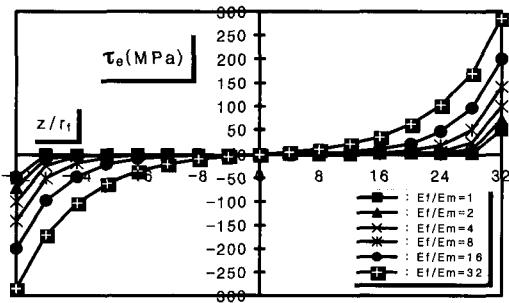


(a) SLT

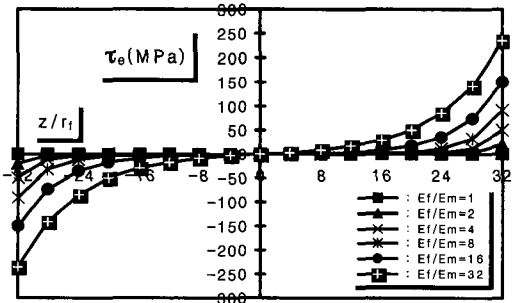


(b) NSLT

Fig. 8 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=16$  for fiber/matrix interfacial shear stress



(a) SLT



(b) NSLT

Fig. 9 Effect of modulus ratio using SLT & NSLT in case of  $s=32$  for fiber/matrix interfacial shear stress

탄성계수비의 변화에 따른 보강재의 내부응력을 각각 보이고 있다. 여기서 보강재 내부응력은 탄성계수비의 크기에 따라 영향을 거의 받지 않는다는 것을 알 수 있다.

### 3.2 보강재의 계면전단응력

Fig. 6~9는 각각 SLT, NSLT에 대한 0.1%의 변위로 하중을 가한 경우의 해석 결과로서 보강재/모재의 계면전단응

력을 나타낸다. 앞에서 기술한대로 SLT의 계산결과는 보강재 중앙에서 0이 되고 제안모델인 NSLT의 결과는 SLT의 결과보다 낮은 보강재/모재 계면전단응력상태를 보여준다. Fig. 6(a) 및 (b)는 섬유형상비가 4인 경우에 관하여 탄성계수비의 변화에 따른 보강재/모재의 계면전단응력을 각각 보이고 있으며 보강재/모재 계면전단응력은 탄성계수비의 크기에 따라 매우 민감하게 영향을 받는다는 것을 알 수 있다. 그러나 탄성계수비가 작은 경우에는 SLT 및 NSLT 모두 큰 차이가 없음을 보여주고 있다. Fig. 7~9는 섬유형상비가 8, 16 및 32인 경우에 관하여 탄성계수비의 변화에 따른 보강재/모재 계면전단응력을 각각 보이고 있다. 여기서 보강재/모재 계면전단응력은 탄성계수비의 크기에 따라 약간의 영향을 받는다는 것을 알 수 있다.

#### 4. 결론

단섬유 보강 복합체에서의 의 복합강화효과를 계산하기 위한 보강재의 내부응력 및 보강재/모재의 경계면 전단응력 계산 방법에 관하여 기존의 SLT의 문제점을 분석하였다. 또한 이를 개선하여 단순화된 식 NSLT를 이용하여 탄성계수비(Elastic Modulus Ratio)의 변화에 따른 보강재의 내부응력 및 보강재/모재의 경계면 전단응력의 그래프를 종횡비 기준으로하여 산출하였으며 결론은 다음과 같다.

- (1) 보강재 단의 응력전달에 있어서 영향을 주는 주요 인자는 보강재의 종횡비, 체적함유율 및 탄성계수비를 들 수 있으며 이 3가지 인자중 가장 민감한 변수는 탄성계수비이다.
- (2) 응력집중계수를 고려한 탄성계수비의 변화에 따른 보강재의 내부응력은 SLT보다 높은 결과가 산출되었으며, 보강재/모재의 계면전단응력은 SLT보다 낮게 산출되었다. 무엇보다 기존의 SLT를 개선하여 빠른 계산이 가능한 Closed Form의 해를 구할 수 있었다.

- (3) 유도된 식(NSLT)을 이용하여 내부응력 및 계면전단응력을 계산한 결과는 탄성계수비의 변화에 따른 복합체에서의 복합강화효과가 어느 정도로 발생하는지 정량적으로 알 수 있었다.

#### 참고문헌

- (1) Agarwal, B. D., Lifshitz, J. M., and Broutdman, L. J., 1974, "Elastic-Plastic Element Analysis of Short Fiber Composites," *Fiber Science and Technology*, Vol. 7, pp. 45~62.
- (2) Agarwal, B. D., and Broutman, L. J., 1980, *Analysis and performance of Fiber Composites*, Johns Wiley and Sons, New York, pp. 71~104.
- (3) Cox, H. L., 1952, "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials," *British Journal of Applied Physics*, Vol. 3, pp. 72~79.
- (4) Taya, M., and Arsenault, R. J., 1987, "A Comparison between a Shear Lag Type Model and an Eshelby Type Model in Predicting the Mechanical Properties of Short Fiber Composite," *Scripta Metallurgica*, Vol. 21, pp. 349~354.
- (5) Kim, H. G., 1994, "Stress Transfer in shear Deformable Discontinuous Composites," *KSME Journal*, Vol. 8, No. 4, pp. 475~484.
- (6) Kim, H. G., 1998, "Analytical Study on the Elastic-Plastic Transition in Short Fiber Reinforced Composites," *KSME International Journal*, Vol. 12, No. 2, pp. 257~266.
- (7) Kim, H. G., 2003, "Stress Analysis of a Discontinuous Composite Using Mechanics of Materials Approach," *KSMTE*, Vol. 12, No. 4, pp. 63~69.