

부드러운 C^2 확장 곡면 생성

김 회 섭*

The Generation of a Smooth C^2 Extension Surface

Kim, H. S.*

ABSTRACT

To design parts satisfying physical property in the continuous region, we do it in the discrete rectangular mesh points. Then we obtain points data from parts design and usually construct the surface using least squares method. In such case, that surface has an oscillation in the ineffective region which is inadequate for physical phenomena or NC machining. To solve both problems simultaneously, we extend the surface smoothly to have small curvature in the extended region. Up to now, we use the least squares method for the parts design in Color Picture Tube or Color Display Tube but in this paper, we use functions which is easily controllable. This surface has no error within the effective region compared to the least squares method.

Key words : Least squares method, Extension Surface

1. 서 론

실험 또는 설계로부터 얻은 데이터를 처리하는 방법 중의 하나로 우리는 보통 최소자승법을 이용하여 비매개 다항식^[1,2] 또는 B-Spline 곡면을 구성한다. 그러나 이 곡면은 데이터가 주어진 유효 영역 내에서는 곡면이 진동이 없이 잘 처리되지만 데이터가 없는 유효면 바깥은 진동이 많아 가공이나 물리적 현상의 연장이 필요한 부품 설계에 문제가 있다. 따라서 어느 정도 필요한 영역만큼 유연하게 확장하는 것이 필수적이다. 수학적으로는 확장 연산자를 써서 확장이 가능하다는 것이 증명되어 있다^[2,4]. 좁은 영역에 대한 확장은 B-Spline에 대해 연구된 바 있다^[5]. 그리고 최소 자승법에 의한 확장으로 실험 데이터를 처리한다^[6].

하지만 이 경우는 곡면주위의 좁은 영역까지 모통 나루게 되고, 연결부위의 곡률이 유효면에서의 곡률보다 크게 되어 상당히 넓은 영역까지 적절한 두께가 필요한 부품 또는 물리적 현상의 연장이 필요한 부품 설계에서는 공학적으로 사용하기에 부적합하다.

예를들면 브라운관 설계 공정 중의 하나인 노광공정은 Fig. 1에서 보는 것처럼 Panel에서 유효개의 점

(예를 들면 $17 \times 13 = 221$)에서 형광체 도포 부분과 전자총이 화면을 때리는 부분과의 차이인 Mismatching Error를 측정하여 Lamphouse에서 나오는 빛의 궤적을 바꾸기 위해 Ray-tracing하면 그 점에 해당하는 Shadow mask points, Filter points, Lens points가 일대일 대응으로 유일하게 결정된다. Panel의 유효면에 대응하는 Ray-tracing상의 Shadow mask영역, Filter 영역, Lens 영역은 줄어든다. 실제 빛이 지나가는 점들은 포함하는 약간의 큰 영역을 유효면적으로 잡는다. 왜냐하면 데이터를 최소자승법으로 구하여 곡면을 구하면 원래 데이터가 주어진 영역의 1.1~1.2배까지는 곡률의 변화가 아주 작기 때문에 물리적 현상이나 가공에 문제가 없다. 브라운관 제품 또는 공정에 쓰이는 부품의 곡면은 보통 다항식 또는 B-Spline곡면이다. 우리가 눈으로 보는 화면인 Panel은 보통 4차에서 6차의 다항식이고, Red, Green, Blue칼라를 분리하는 Shadow Mask는 4~6차 다항식이다.

전자총에서 나오는 전자빔이 Deflection Yoke에 의해 Shadow Mask를 통과하여 Panel내면에 있는 형광체를 때릴 때 형광체 위치와 전자빔의 위치가 일치하도록 빛의 입사각에 따른 굴절각을 정해주는 물리 법칙인 Snell's law에 의하여 접선 벡터를 유한개 다시 구하여 최소자승법을 이용하여 곡면을 형성하는 노광 렌즈는 보통 8~12차 다항식이거나 B-spline 곡면을

*경원대학교 수학적정보학과
- 논문투고일: 2003. 07. 15
- 심사완료일: 2004. 02. 03

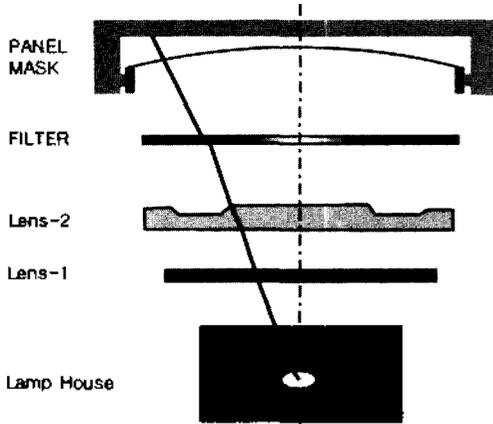


Fig. 1. 노광 공정.

사용한다. 형광체를 도포하는 공정인 노광 공정에서는 중앙과 주변의 빛의 양이 틀리기 때문에 광량을 조절하여 주는 Fig. 1에서 처럼 노광필터가 필요한데 필터의 투과율도 유한개의 측정 점에서 그 값을 구하여 연속적인 투과율 분포를 얻으려면 최소자승법을 사용한다. 이러한 곡면들은 모두 설계 데이터가 Panel에서 유한개의 점에서 측정된 값을 사용하여 최소자승법으로 연속 곡면을 만들어 낸다.

Panel이나 Shadow Mask처럼 아주 Curvature가 적은 곡면은 이렇게 구한 곡면을 유효면 바깥까지 그대로 사용하여도 무방하나 노광렌즈와 노광필터는 유효면 바깥에서 진동이 생겨서 그대로 사용하기는 부적합하다. 따라서 유효영역 바깥에서는 가공에 문제가 없도록 높이연속과 미분연속이 필요하고 경계에서 기하학적 성질을 일치시키기 위해서 Gaussian Curvature 나 Mean curvature를 구하려면 두번 미분가능한 곡면이 필요하다. 그러나 실제 공학에서는 C¹만 되어도 큰 문제가 없고, 그럴 경우 확장에 대한 선택의 폭이 훨씬 넓어져서 좀더 자연스러운 곡면을 만들 수 있다. Snell's law와 같은 물리적 현상을 그대로 유지하기 위해서 한번 미분 연속이 필요하다. Fig. 1에 있는 Panel, Filter, Lens, Lamphouse는 하나의 노광대 설비에 장착된다. 노광렌즈는 노광대에 장착하기 위하여 유효길이의 1.5~2배가 필요하다. 따라서 곡물이 줄면서 상당히 넓은 영역(예를 들면 x축, y축의 유효길이의 두 배)까지 곡면을 확장하는 것이 필요하다.

이 논문에서 우리가 실제로 부품에서 사용하는 전체 면적을 Ω 라고하고 그 중에서 유효면으로 사용하고자 하는 영역을 D 라고 하고 그 영역을 볼록 영역(Convex set)인 경우로 한정한다. D 가 볼록 영역이 아

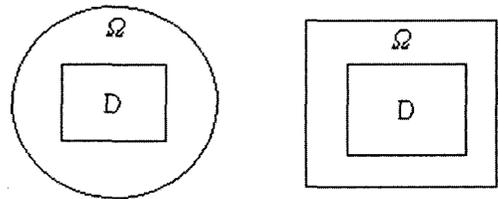


Fig. 2. (a) 노광렌즈 (b) 노광필터.

닌 경우는 Maclaurin급수 전개에서 외부 한점에서 경계 점을 두 점 이상 잡을 수 있고 그럴 경우 급수 전개 값이 확장영역의 한 점에서 틀리기 때문에 Uniqueness가 보장 되지 않는다. Fig. 2에서 노광렌즈 부품과 노광필터 부품에서 D 와 Ω 를 표시하였다.

그리고 $D^* = \Omega - D$ 라고 하면 확장 영역이 된다.

2. 확장 곡면 생성

이 절에서 다루는 곡면은 매개변수 곡면이 아니라, 함수형태의 non-parametric 곡면에 대해 다룬다. parametric 곡면에 대한 연구는 별도로 이루어져야 한다.

2.1 최소자승법에 의한 방법

높이 $data(x_k, y_k, z_k), k = 1, \dots, N$ 가 주어진 경우 오차 함수는 다음과 같다.

$$E = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x_k) B_j(y_k) - z_k \right)^2$$

함수값과 측정값의 오차의 합 E 를 최소로 하는 계수를 구하면 된다. 즉 정규방정식 $\partial E / \partial a_{pg} = 0$ 을 풀면 계수가 얻어지는데 그 계수값을 이용하여

$$S(x, y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} B_i(x) B_j(y)$$

값을 임의의 점 x, y 에서 구할 수 있다. 다항식인 경우는 $B_i(x) = x^i, B_j(y) = y^j$ 이다. B-spline인 경우는 3차 B-spline basis이다.

따라서 내부 곡면을 어느정도 오차를 가지고 유지 하면서 외부 곡면을 만들어내기 위해서는 내부 D 상에서 데이터는 직사각형 mesh 상에서 $(x_k, y_k, z_k), k = 1, \dots, M, M < N$ 값을 뽑고, 외부 D^* 상에서 데이터는 부품의 특성에 맞게 D 경계상에서의 함수 값과 미분값을 이용하여 D^* 상에서 $(x_k, y_k, z_k), k = M+1, \dots, N$ 를 재생성한다^[1]. 그리고 내부 데이터와 외부 데이터를 모두 합하여 전체 데이터를 이용하여 최소자승법

을 이용하여 곡면을 구하면 그 자체가 다항식 곡면이기 때문에 가공이나 물리적 현상에 전혀 문제가 없다. 다만 내부곡면에서 데이터를 추출하여 재근사하였기 때문에 근사에 의한 오차로 내부 데이터에 약간의 변화가 있다.

2.2 함수에 의한 방법

최소자승법에 의한 곡면 확장은 D에서는 설계 함수로부터 높이 데이터를 얻고, D'에는 적당한 알고리즘을 통하여 높이 데이터를 생성하여 전체 데이터를 최소자승법으로 구하기 때문에 D에서는 미세하나마 오차가 발생한다. 이런 점을 보완하고 새로운 접근 방법으로서 유효면 내부 D는 기존 설계함수를 그대로 쓰고 외부 D'에는 유효면의 경계에서 함수값, 1차 미분값과 2차 미분값을 활용하여 유효면 내부에 정의된 함수와는 독립적으로 새로운 함수를 정의함으로써 가공이나 물리적 현상에 적합한 곡면을 조절 변수를 사용하여 구성할 수 있다.

2.2.1 Maclaurin 급수 전개

정리 1. (Maclaurin) 함수 f(x, y)가 n차 도함수를 가진다면 적당한 0 < θ < 1에 대하여

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(0, 0) + \frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0, 0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(0, 0) + \frac{1}{n!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\theta x, \theta y)$$

이다.

2.2.2 곡면 확장 함수 정의

Maclaurin 급수를 수정하여 영역 D에서는 원래 함수로 정의하고 D'에서는 경계를 따라

$$g(x_b, y_b) = f(x_b, y_b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_b, y_b) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_b, y_b),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_b, y_b) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_b, y_b)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_b, y_b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_b, y_b)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_b, y_b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_b, y_b)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_b, y_b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_b, y_b)$$

를 만족하는 새로운 함수를 정의함으로써 원하는 확장된 곡면을 얻는다. 여기서 (x_b, y_b)는 (x, y)가 D'에 있을 때 D까지의 거리가 최소인 점이다.

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ g(x, y), & (x, y) \in D' \end{cases} \quad (2)$$

여기서

$$g(x, y) = f(x_b, y_b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_b, y_b)A(x-x_b, y-y_b) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_b, y_b)B(x-x_b, y-y_b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_b, y_b)C(x-x_b, y-y_b) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_b, y_b)D(x-x_b, y-y_b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_b, y_b)E(x-x_b, y-y_b) \quad (3)$$

이다. Maclaurin 급수를 조금 수정하여 식 (3)을 만든다. 함수 A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y)는 Table 1을 만족하여야 한다.

주어진 조건을 만족하는 A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y) 함수들은 무수히 많다. 그 중에서 특별한 형태를 띠는 함수는 예제 1, 2에 나타난다.

예제 1.

$$A(x, y) = \alpha \sin \frac{x}{\alpha}$$

Table 1. 함수 A,B,C,D,E가 만족해야할 조건

*	A	B	C	D	E
*(0,0)	0	0	0	0	0
d*/dx(0,0)	1	0	0	0	0
d*/dy(0,0)	0	1	0	0	0
d ² */dx ² (0,0)	0	0	1	0	0
d ² */dxdy(0,0)	0	0	0	1	0
d ² */dy ² (0,0)	0	0	0	0	1

$$B(x, y) = \alpha \sin \frac{y}{\alpha}$$

$$C(x, y) = \frac{1}{2} \left(\alpha \sin \frac{x}{\alpha} \right)^2$$

$$D(x, y) = \alpha \sin \frac{x}{\alpha} \alpha \sin \frac{y}{\alpha}$$

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \left(\alpha \sin \frac{y}{\alpha} \right)^2$$

조절 변수 α 를 가변함으로써 곡면의 모양을 원하는 형태에서 선택할 수 있다.

예제 2.

$$A(x, y) = x$$

$$B(x, y) = y$$

$$C(x, y) = \frac{1}{2}x^2$$

$$D(x, y) = xy$$

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2$$

예제 2는 테일러 급수 전개에서 나오지만 x, y 값이 크짐에 따라 곡면이 발산하기 때문에 곡면가공용으로는 부적합하다. 예제 1은 Gaussian and Mean Curvature를 계산하는 데도 함수로 주어지기 때문에 전혀 문제가 없다.

2.2.3 수치 결과

노광렌즈 곡면식은 설계에 의하여 다음과 같다.

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x^i y^j \tag{4}$$

Table 2. Some coefficients a_{ij} of the eq. (4)

No.	i	j	a_{ij}
1	0	0	0.0000e+00
2	0	1	2.7051e-01
3	0	2	-1.196e-02
4	0	3	-1.978e+00
5
6	8	5	0.0000e+00
7	8	6	-5.2234-13
8	8	7	0.0000e+00
9	8	8	1.7641e-17

Fig. 3에서는, $\Omega = [-100, 100] \times [-75, 75]$, $D = [-70, 70] \times [-50, 50]$, $\alpha = \pi/60$ 로 택하였다.

α 는 sine curve중에서 어느 부분까지 곡면을 형성하는데 공학적으로 사용할 것인지를 한 주기를 결정하는데 사용된다. 만약 $y = \sin(\alpha x)$ 에서 $x = 30$ 가 되는 시점에서 sine curve가 최대가 되도록 할려면 $\alpha x = \pi/2$ 로 되어 $\alpha = \pi/60$ 로 택하면 된다. 실제로 함수는 실수 전체에서 정의 되지만 우리가 필요한 부분은 그 중의 일부이기 때문이다. A, B, C, D, E를 예제 1과 같이 sine 함수로 만들 경우, 진폭과 주기가 비례하는데, 주기를 필요한 확장 곡면 반쯤 크게하면, 진폭도 그와 유사하게 커져서 확장곡면이 필요이상으로 변화하는 문제가 있으나, 실제로는 수치결과에서 보듯이 trade-off에 의해 주기를 필요한 만큼만 조절하여 사용한다. 또는 sine 함수를 이용하여 공학적으로 문제가없는 부분까지 1차 확장하고, 1차 확장된 영역까지를 유효면적으로 해서 그 경계값에서 함수값, 1차미분값과 2차 미분값을 이용하여 sine 함수를 써서 2차로 확장하면 보다 유연한 영역을 큰 영역까지 확장할 수 있다. Fig. 3에서 두 부분이 완전히 겹친 영역이 유효변적에 해당되고, 원곡면은 앞부분으로 많이 처진 윗 곡면이고, 확장곡면은 앞부분의 경계가 뒤에 있는 아래 곡면으로서 주변에 부드럽게 확장된다.

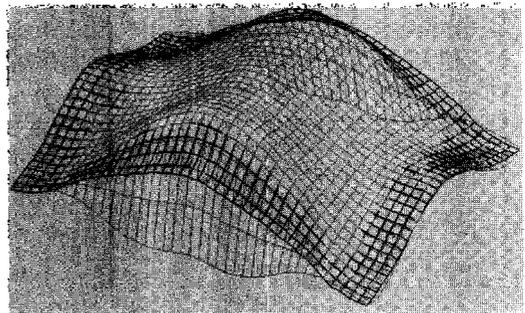


Fig. 3. 원곡면과 예제 1을 이용한 확장곡면.

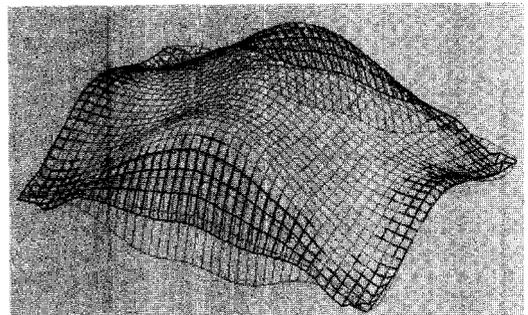


Fig. 4. 원곡면과 예제 2를 이용한 확장곡면.

예제 2는 적게 확장할 때는 문제가 없으나 크게 확장할 때는 Fig. 4에서 보듯이 끝 부분에 진동이 있고, 확장영역 경계 높이가 높아져서 필요없는 가공시간 증가를 초래하고 유리같은 경우는 Crack이 발생한다. 예제 2의 2차식의 값이 발산하여 사용에 적절치 않으면, 3차식을 써서 2차미분값도 맞추고 높이 변화도 적절한 범위내로 조절할 수 있다. 이 경우 남은 자유도를 이용하여 C^2 도 만족을 시키며 적당한 범위내에서 함수값을 제한시킬 수 있는 장점이 있으며 3차식을 이용하는 부분에 대하여는 향후에 연구한다.

3. 결 론

본 연구에서는 원곡면을 그대로 사용하고 확장곡면을 새롭게 함수를 정의하여 사용하였는데 동일한 원리를 최소자승법에서 사용할 수 있다. 즉 최소자승법으로 얻어진 곡면을 원곡면에 적용하지 않고 단지 확장곡면에만 적용하는 것이다. 그렇다면 확장영역에서 원하는 높이에 가까운 곡면을 얻을 수 있을 것이다. 물론 원곡면은 원래 함수 그대로 사용하므로 전혀 오차는 없게 된다. 그러나 함수를 이용한 방법은 새로운 알고리즘을 하나 제시하는 것이고 위에서 언급한 것과 유효영역 D 의 경계에서 수학적으로 문제가 없고 아주 큰 영역까지 확장하는데 확장된 영역 Ω 의 경계에서 높이 조절이 편리하다.

본 논문에서는 부품 설계나 실험데이터로부터 얻어지는 유효영역이 있지만 브라운관의 노광 렌즈처럼 물리적 현상의 연장뿐만 아니라 노광대에 장착하기 위해서 일정한 두께를 가지면서 진동이 없이 어느 정도의 두께가 필요한 곡면 설계 및 가공에 두 번 미분 연속인 확장된 곡면이 필요하다. 또 노광 필터처럼 램프하우수가 이동함에 따라 빛이 실제 투과율데이터가 주어진 바깥부분 영역까지 통과하게 되어 역시 넓은 영역까지 곡률이 적게 변화하는 투과율 곡면이 필요하다.

향후 연구로는 식 (2)에서 정의된 함수 $F(x, y)$ 가 (x, y) 가 주어질 때 마다 (x_n, y_n) 는 상수가 아니라 (x, y) 로부터 거리가 최소가 되는 함수이기 때문에 x 축, y 축, 45도 방향은 연속이지만 일반적으로는 수학적으로 두 번 미분이 연속임을 보여야 한다. 그리고 현재

는 수치적으로 부품 전체 곡면 Ω 에서 곡률 값(예를 들면 1 mm 간격의 사각형 그리드 상에서)을 계산하여 유효면 바깥으로 나가면서 곡률 값이 적어지게 예제 1에서와 같이 Sin함수와 조절변수 $\alpha = \pi/60$ 를 택하여 공학적으로 사용하지만 곡률 값이 유효면적의 경계로부터 멀어짐에 따라 경계곡률 보다도 Gaussian Curvature가 점점 줄어드는 곡면인 함수 $g(x, y)$ 를 수학적 증명을 통하여 구성을 할 필요가 있다.

참고문헌

1. Hoi Sub Kim, "On the construction of a surface from discrete derivative data and its extended surface using the least squares method," *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 4, No. 2, pp. 387-396, 1997.
2. D. Gilbarg N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1977.
3. Lars Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, 1983.
4. Elias M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
5. Shetty, S. and White, P. R., "Curvature-continuous extensions for rational B-spline curves and surfaces," *Computer-Aided Design*, Vol. 23, No. 7, pp. 484-491, 1991.
6. Vanhoneracker, W. R., "Meta-analysis and response surface extrapolation: A least squares approach," *The American Statistician*, Vol. 50, No. 4, pp. 294-299, 1996.
7. 이규봉, *알기쉬운 수치해석학*, 경문사, 2001.



김희섭

1982년 서울대학교 수학과 졸업(학사)
 1987년 한국과학기술원 응용수학과 졸업(석사)
 1992년 한국과학기술원 수학과 졸업(박사)
 1984년~1997년 삼성SDI 종합연구소, 생산기술센터
 1997년~현재 경원대학교 수학정보학과 부교수
 관심분야: 수치해석, CAD/CAM