논문 2004-41SC-4-4

고장 특이시스템의 신뢰 H_∞ 제어기 설계 알고리듬 개발

(Development of reliable H_∞ controller design algorithm for singular systems with failures)

김 종 해*

(Jong Hae Kim)

요 약

본 논문에서는 구동기 고장을 가지는 시간지연 특이시스템의 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기 설계방법을 제안한다. 미리 설정한 영역내에서의 구동기 고장이 발생함에도 불구하고 특이시스템의 점근적 안정성(asymptotic stability)과 H_∞ 성능지수를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기가 존재할 조건과 제어기 설계 기법을 선형행렬부등식, 특이값 분해(singular value decomposition), 슈어 여수정리(Schur complements), 변수 치환 등에 의하여 제시한다. 제안한 충분조건은 구하려는 모든 변수의 견지에서 하나의 선형행렬부등식으로 표현되기 때문에 모든 해를 동시에 구할 수 있다는 장점이 있다. 또한, 제안한 알고리듬을 이용하면 변수 불확실성과 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 강인 신뢰(robust reliable) H_∞ 제어기 설계문제에도 쉽게 확장됨을 보인다. 마지막으로, 제안한 알고리듬의 타당성을 수치예제를 통하여 확인한다.

Abstract

This paper provides a reliable H_∞ state feedback controller design method for delayed singular systems with actuator failures occurred within the prescribed subset. The sufficient condition for the existence of a reliable H_∞ controller and the controller design method are presented by linear matrix inequality(LMI), singular value decomposition, Schur complements, and changes of variables. The proposed controller guarantees not only asymptotic stability but also H_∞ norm bound in spite of existence of actuator failures. Since the obtained sufficient condition can be expressed as an LMI form, all variables can be calculated simultaneously. Moreover, the controller design method can be extended to the problem of robust reliable H_∞ controller design method for singular systems with parameter uncertainties, time-varying delay, and actuator failures. A numerical example is given to illustrate the validity of the result.

Keywords : Reliable H_∞ control, singular systems, actuator failure, linear matrix inequality

I. 서 론

지난 수십 년 동안 활발히 연구되고 있는 H_∞ 제어는 자동제어 분야에서 중요한 개념의 하나였다. H_∞ 이론을 바탕으로 하는 제어기 설계 알고리듬이 수학적으로 완벽히 개발되었다 할지라도 대부분의 설계방법은 정칙시스템(nonsingular system)의 상태공간 모델을 다루었다. 상태공간 모델은 매우 유용하지만, 상태 변수가 임펄스나 히스테리시스 등의 물리적 의미를 모두 포함할 수는 없다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 최근 특이시스템에 대한 제어연구가 활발해지면서 기존의 정칙시스템의 상태공간 모델에 대한 결과를 기반으로 하여 특이시스템(singular system)의 제어 이론으로 확장하는 결과[1-11]들이 나오고 있는 실정이다. 특히, 시스템의 안정성을 위한 리아푸노프 방정식[1,2], 유계실수정리(bounded real lemma)[3], 가제어성과 가관측성[4], LQ 제어분야[5,6]에 대한 이론들이 나오고 있으며, 특히 변수 불확실성(parameter uncertainty)을 가지는 시스템에 대한 특이시스템의 제어기법들의 결과[7,8]가 나오고 있다.

* 정회원, 선문대학교 전자정보통신공학부
(Division of Electronics, Information and Communication Engineering, Sunmoon University)
※ 본 논문은 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음." (KRF-2003-003-D00116)
접수일자: 2004년1월8일, 수정완료일: 2004년7월5일

특이시스템을 다룰 경우 정칙시스템을 포함할 뿐 아니라 여러 가지 동특성을 다룰 수 있다는 장점이 있기 때문에 다양한 연구들이 행해지고 있다. 게다가, 특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 특징들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템의 연구가 활발히 진행되고 있다.

특히, Masubuchi 등[9]은 임펄스 모드와 허수축 제로를 가지는 특이시스템에 대한 가정을 없애는 특이시스템의 H_∞ 제어기 설계방법을 구하고자 하는 해가 상호 결합된 3개의 리카티(Riccati) 행렬부등식을 이용하여 제시하였다. Rehm과 Allgower[7]는 시스템 행렬에 노움 유계(bound)를 가지는 불확실한 비정칙(nonregular) 특이시스템의 H_∞ 제어문제를 다루었다. 하지만, 제어기 설계방법이 아니라 변수 불확실성이 있는 특이시스템을 변수 불확실성이 없는 등가의 시스템으로 변형하는 방법에 대하여 언급하였다. Hung과 Lee[10]는 시간지연을 가지는 특이시스템에 대하여 변형한 리카티 방정식 방법으로 상태궤환 H_∞ 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만, 제어기를 설계하기 위해서는 몇 개의 변수의 값을 미리 선정해야 하는 등 최적의 해를 구할 수 없었다. 또한, Takaba 등[2,6]은 불확실 특이시스템의 리아푸노프 함수와 H_2 제어문제를 다루었다. 하지만, 구동기의 고장이 존재하는 경우에는 만족스러운 성능을 얻지 못하거나 시스템이 불안정해질 수 있다. 따라서, 실제 시스템에서는 구동기의 고장이 발생하는 경우에 대한 고려가 필요하다. 이러한 구동기 고장 문제를 해결하기 위하여 Seo 등[12]과 Veillet 등[13]은 신뢰 H_∞ 제어문제를 다루었다. 특히, Seo 등[12]은 구동기 고장을 가지고 시스템 행렬에 변수 불확실성을 가지는 정칙시스템에 대한 강인 신뢰(robust reliable) H_∞ 상태궤환 제어기 설계 방법을 제시하였다. 그러나, 특이시스템에 대해서는 직접 적용할 수 없고 시간지연도 다루지 않았다. 따라서, Gu 등[14]과 Wang[15]은 리카티 방정식을 이용하여 변수 불확실성과 시간지연을 가지는 정칙시스템에 대한 강인 신뢰 H_∞ 제어기 설계방법에 대한 연구결과를 제시하였다. 그러나, 특이시스템에 직접 적용할 수 없고 리카티 방정식을 풀기 위해서는 몇 가지 변수를 미리 선정하는 등 해를 구하는 측면에서 보수적이다. 최근 최적화 알고리듬에 의한 LMI 도구상자[16]가 개발되어서 선형행렬부등식 접근방법을 이용하면 한번에 해를 구할 수 있다. 따라서, 본 논문의 하나의 목적은 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식 접근방법을 이용하여 기존 논문의 보수성을 없애고, 모든 해를 한번에 구하는 것이다. 게다가, 시간지연이 존재하는 경우에 시스템의 성능이 저하되거나 불안정해질 수 있기 때문에 시간지연에 대한 연구[17,18]가 활발히 행해지고 있다. 본 논문의 목적은 미리 설정한 구동기 집합에서 고장이 발생하는 경우에도 여러 가지 성능을 만족하는 시간지연 특이시스템에 대한 신뢰 H_∞ 제어기 설계 알고리듬을 개발하는 것이다.

본 논문에서는 구동기 고장과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대해 점근적 안정성과 H_∞ 노음 유계를 만족하게 하는 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기 설계 방법과 존재조건을 단 하나의 선형행렬부등식 접근방법에 의하여 제시한다. 따라서, 볼록최적화가 가능하기 때문에 모든 변수를 한번에 구할 수 있다. 제안한 알고리듬은 일반적인 상태공간 모델에 대한 신뢰 H_∞ 제어기에 대한 설계 문제뿐만 아니라 변수 불확실성을 포함하는 시간지연 특이시스템의 제어기 설계문제에도 쉽게 확장 가능함을 보인다. 마지막으로, 예제를 통하여 제안한 제어기 설계방법의 타당성을 확인한다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. $(\cdot)^T$, $(\cdot)^{-1}$, $deg(\cdot)$, $|\cdot|$, $tr(\cdot)$및 $rank(\cdot)$는 $(\cdot)$에 대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant), 대각합(trace), 계수(rank)를 각각 나타낸다. 그리고, I, I_r, $x_r(t)$ 및 R^r은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, $r\times r$ 차원을 가지는 단위행렬, $r\times 1$ 차원의 벡터 및 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소를 나타낸다.

Ⅱ. 문제 설정

시변 시간지연을 가지는 선형 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_dx(t-d(t))+B_1u(t)+B_2w(t) \\ z(t) &= Cx(t)+C_dx(t-d(t))+D_1u(t)+D_2w(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t\in[-\bar{d},0] \end{aligned} \tag{1}$$

을 고려한다. 여기서, $x(t)\in R^n$는 상태, $z(t)\in R^l$는 제어될 출력, $u(t)\in R^m$는 제어입력, $w(t)\in R^p$는 외란입력, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬, $\phi(t)$는 연속 벡터 값을 가지는 초기함수, 모든 행렬은 적절한 차원을 가진다. 여기서, 시변 시간지연은

$$0 \le d(t) \le \bar{d} < \infty,\ \dot{d}(t) \le \beta < 1 \tag{2}$$

를 만족한다. 한편, 시스템에서 발생할 수 있는 구동기 고장을 고려하여야 한다. 일반적으로 제어 시스템의 구동기는 두 부분[14,15]으로 나누어질 수 있다. 하나는 $\Omega \subseteq \{1,2,\ldots,m\}$으로 표시되는 고장에 민감한 구동기의 집합이다. 이러한 구동기의 집합은 시스템의 안정성과 관련되는 부분이고 제어성능을 개선하는 부분에 기여할 수 있다. 다른 하나는 $\bar{\Omega} \subseteq \{1,2,\ldots,m\} - \Omega$로 표시되는 고장에 대해 강인한 집합이다. 또한, 이러한 고장에 대하여 강인한 구동기 집합은 주어진 특이시스템 (1)의 안정성을 위하여 고장이 나지 않는다고 가정한다. 즉, 미리 고장이 날 것 같은 구동기 Ω의 집합을 미리 선정하고 나머지는 고장이 일어나지 않는다는 것이다. 따라서, 구동기와 관련한 시스템 행렬은

$$B_1 = B_\Omega + B_{\bar{\Omega}} \tag{3}$$

로 분해할 수 있다. 여기서, B_Ω는 집합 Ω와 관련되는 제어행렬이고, $B_{\bar{\Omega}}$는 제어입력의 여집합(complementary subset) $\bar{\Omega}$와 관련되며, B_Ω와 $B_{\bar{\Omega}}$는 Ω와 $\bar{\Omega}$에 따라서 영을 열로 대입함으로 만들 수 있다[15]. 여기서, 구동기와 관련되는 행렬 D_1도 동일한 분해가 가능하다. 또한, 실제로 고장이 나는 $\alpha \in \Omega$의 집합에 대해서는

$$B_1 = B_\alpha + B_{\bar{\alpha}} \tag{4}$$

로 표시될 수 있고, B_α, $B_{\bar{\alpha}}$, B_Ω, $B_{\bar{\Omega}}$의 관계는

$$\begin{aligned} B_\Omega B_\Omega^T &= B_\alpha B_\alpha^T + B_{\Omega-\alpha} B_{\Omega-\alpha}^T \\ B_{\bar{\Omega}} B_{\bar{\Omega}}^T &= B_{\bar{\alpha}} B_{\bar{\alpha}}^T - B_{\Omega-\alpha} B_{\Omega-\alpha}^T \end{aligned} \tag{5}$$

와 같다. 특이시스템 (1)에 대하여, 구동기 고장에도 점근적 안정성과 H_∞ 성능지수를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기를

$$u(t) = Kx(t) \tag{6}$$

으로 둔다. 그리고, 제어기 (6)과 특이시스템 (1)로 구성되는 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (A + B_1K)x(t) + A_d x(t-d(t)) + B_2 w(t) \\ z(t) &= (C + D_1K)x(t) + C_d x(t-d(t)) + D_2 w(t) \end{aligned} \tag{7}$$

이고, H_∞ 성능지수는

$$J = \int_0^\infty [z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)]dt \tag{8}$$

이다.

여기서, 본 논문의 목적은 시간지연, 외란, 구동기의 고장에도 불구하고 폐루프시스템의 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성 뿐만 아니라 미리 선정한 H_∞ 노옴 유계를 만족하는 신뢰 제어이득 K를 결정하는 것이다. 여기서, 증명을 위해 필요로 되는 정의와 보조정리를 서술한다.

정의 1[1]. $E\dot{x}(t) = Ax(t)$의 시스템에 대하여,

(i) $|sE - A| \neq 0$이면 특이시스템은 정규적(regular)이고,

(ii) $rank(E) = deg|sE - A|$ 이면, 특이시스템이 임펄스프리(impulse free)이기 위한 필요충분조건이고,

(iii) 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면 시스템은 점근적으로 안정하다.

정의 2[10]. 주어진 행렬 $E \in R^{n\times n}$, $A^* \in C^{n\times n}$에 대하여, $|\alpha E + A^*| \neq 0$ 또는 다항식 $|sE - A^*| \neq 0$를 만족하는 상수 $\alpha \in C$가 존재하면 특이시스템은 정규적이다.

보조정리 1[10]. $(E, A + A_d e^{-s\bar{d}})$가 정규적일 필요충분조건은 $\tilde{E} \equiv Q^* E P^* = diag(I_{n_1}, N)$ 와 $\tilde{A} \equiv Q^* A^* P^* = diag(A_1^*, I_{n_2})$을 만족하는 비특이 행렬 Q^*와 P^*가 존재하는 것이다. 여기서, $A^* = A + A_d e^{-j\omega\bar{d}}$, $n_1 + n_2 = n$, $A_1^* \in C^{n_1\times n_1}$, $N \in R^{n_2\times n_2}$는 거듭제곱이 영(nilpotent)인 행렬이다.

정의 3[10]. 아래의 성질들은 모두 동일하다.

(i) 특이시스템 (1)이 임펄스프리하다.

(ii) $rank(E) = deg|sE - A^*|$

(iii) 보조정리 1에서 행렬 N은 영행렬(null matrix)이다.

(iv) $(sE - A^*)^{-1}$이 진유리함수(proper function)이다.

보조정리 2. 주어진 $\gamma > 0$에 대하여, 특이시스템 (1)이 신뢰 제어기 (6)에 의하여 정규성, 임펄스프리, ASH$_\infty$-AF(외란, 시간지연, 구동기의 고장에 불구하고 점근적 안정성과 H_∞ 성능지수를 만족)를 만족할 필요충분조건은 아래의 시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_{\bar{\Omega}} u(t) + B_w \hat{w}(t) \\ z(t) &= Cx(t) + C_d x(t-d(t)) + D_{\bar{\Omega}} u(t) + D_w \hat{w}(t) \end{aligned} \tag{9}$$

가 동일한 신뢰 제어기 (6)에 의하여 정규성, 임펄스프리, ASH_∞-AF가 되는 것이다. 따라서, 주어진 특이시스템 (1)은 적절한 수식전개에 의하여 구동기 고장에 민감한 부분이 외란의 행렬에 첨가되는 시스템으로 변형가능하다. 여기서, 몇 가지 변수들은

$$B_w = [B_2 \ B_\Omega], \ D_w = [D_2 \ D_\Omega], \ \hat{w}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \tag{10}$$

으로 정의되고, $v(t)$는 고장난 구동기의 출력이다.

증명: H_∞ 성능지수 (8)과 적절한 리아푸노프 후보 함수 및 기존 결과[12-15]를 이용하면 쉽게 증명된다. ■

여기서, 제어입력 $u(t)$는 일반적인 구동기를 통하여 작동하고 고장난 구동기의 출력은 $u(t)$의 추가적인 외란으로 작용하는 것에 유의하자. 신뢰 제어기 (6)과 변형한 등가의 시스템 (9)로부터 얻어지는 폐루프시스템은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_K x(t) + A_d x(t-d(t)) + B_w \hat{w}(t) \\ z(t) &= C_K x(t) + C_d x(t-d(t)) + D_w \hat{w}(t) \end{aligned} \tag{11}$$

으로 주어지고, 변수들은 $A_K = A + B_\Omega K$와 $C_K = C + D_\Omega K$로 정의된다.

III. 신뢰 H_∞ 제어기 설계

본 절에서는 제어기가 존재할 조건을 선형행렬부등식의 견지에서의 충분조건으로 표현하고, 신뢰 H_∞ 제어기 설계 방법을 제시한다.

정리 1. 시변 시간지연을 가지는 특이시스템 (9)를 다룬다. 주어진 $\gamma > 0$에 대하여, 아래의 행렬부등식

$$E^T P = P^T E \geq 0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi & P^T A_d & P^T B_w & C_K^T \\ * & -(1-\eta)R & 0 & C_d^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P, 양의 정부호(positive-definite) 행렬 R, 제어기 이득 K가 존재하면, 제어기 (6)은 폐루프시스템 (11)을 정규성, 임펄스프리, ASH_∞-AF을 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기이다.

여기서, $\Psi = A_K^T P + P A_K + R$.

증명: 등가의 특이시스템 (9)의 점근적 안정성을 위하여, $E^T P = P^T E \geq 0$의 성질을 만족하는 리아푸노프 후보함수(Lyapunov function candidate)

$$V(x(t)) = x(t)^T E^T P x(t) + \int_{t-d(t)}^{t} x(\tau)^T R x(\tau) d\tau \tag{14}$$

를 잡는다. 여기서, R은 양의 정부호 행렬이다. 식 (14)의 시간에 대한 미분은

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq\ & \dot{x}(t)^T E^T P x(t) + x(t)^T P^T E \dot{x}(t) \\ & + x(t)^T R x(t) - (1-\dot{d}(t)) x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \end{aligned} \tag{15}$$

와 같고, 식 (15)가 음의 정부호일 충분조건은

$$\begin{aligned} \dot{V}_a(x(t)) =\ & \dot{x}(t)^T E^T P x(t) + x(t)^T P^T E \dot{x}(t) \\ & + x(t)^T R x(t) - (1-\eta) x(t-d(t))^T R x(t-d(t)) \end{aligned} \tag{16}$$

이 음의 정부호이다. 따라서, $\dot{V}_a(x(t)) < 0$은 폐루프시스템의 점근적 안정을 의미한다. 식 (8), (15)와 (16)으로부터 폐루프시스템의 H_∞ 노옴 유계를 만족하기 위하여 충분조건의 관계로부터

$$z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}_a(x(t)) < 0 \tag{17}$$

을 얻는다. 따라서, 식 (17)의 관계로부터 폐루프시스템의 미리 설정한 영역 γ 유계 이내로 성능지수를 만족하고 점근적 안정성을 보장하는

$$\eta(t)^T \begin{bmatrix} \Pi & P^T A_d + C_K^T C_d & P^T B_w + C_K^T D_w \\ * & -\tilde{R} + C_K^T C_d & C_d^T D_w \\ * & * & -\gamma^2 I + D_w^T D_w \end{bmatrix} \eta(t) < 0 \tag{18}$$

의 조건을 얻을 수 있다.

여기서, $\eta(t) = [x(t)^T \ x(t-d(t))^T \ w(t)^T]^T$이고, $\Pi = A_K^T P + P^T A_K + R + C_K^T C_K$이다. 따라서, 행렬부등식 (18)은 슈어 여수정리[15]를 이용하면 식 (13)으로 변형된다. 정리 1을 만족하는 P, R, K가 존재하면 보조정리 1을 만족하는 Q^*와 P^*가 존재하기 때문에 폐루프시스템 (11)은 정규적이다. 게다가, 폐루프시스템 (11)은 보조정리 1과 정의 3으로부터 임펄스프리하다. 또한, 정리 1을 만족하는 해가 존재하면 폐루프 시스템이 γ 유계를 가지면서 점근적으로 안정하다. ■

그러나, 정리 1은 구하려는 변수의 견지에서 선형행렬부등식의 형태가 되지 않고 또한 등식의 조건인 식 (12)를 포함하므로 최적의 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, 등식의 조건을 없애고, 모든 변수의 견지에서 하나의 완벽한 선형행렬부등식으로 만들기 위하여 변수치환, 슈어 여수정리, 특이값 분해 방법 등의 적절한 전개방법을 정리 2에서 이용한다. 게다가, 구동기 고장을 가지는 시간지연 특이시스템의 신뢰 H_∞ 제어기 설계방법도 제시한다.

정리 2. 주어진 $\gamma > 0$에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & B_{12} & \Sigma_4 \\ * & \Sigma_3 & B_{22} & \Sigma_5 \\ * & * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & \Sigma_6 \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 Q_1, S_1, S_3, 역행렬이 존재하는 대칭행렬 Q_4 및 행렬 Q_3, S_2, M_1, M_2가 존재하면, 아래의 행렬이득은

$$K = [M_1P_1 + M_2P_3 \;\; M_2P_4] \tag{20}$$

은 식 (6)의 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기 이득이다. 여기서, 변수들은

$$\Sigma_1 = A_1Q_1 + Q_1A_1^T + B_{11}M_1 + M_1^TB_{11}^T + A_{d1}\tilde{S}_1A_{d1}^T + A_{d2}\tilde{S}_2^{\,T}A_{d1}^T + A_{d1}\tilde{S}_2A_{d2}^T + A_{d2}\tilde{S}_3A_{d2}^T$$

$$\Sigma_2 = Q_3^TA_4^T + B_{11}M_2 + M_1^TB_{12}^T + A_{d1}\tilde{S}_1A_{d3}^T + A_{d2}\tilde{S}_2^{\,T}A_{d3}^T + A_{d1}\tilde{S}_2A_{d4}^T + A_{d2}\tilde{S}_3A_{d4}^T$$

$$\Sigma_3 = A_4Q_4 + Q_4A_4^T + B_{12}M_2 + M_2^TB_{12}^T + A_{d3}\tilde{S}_1A_{d3}^T + A_{d4}\tilde{S}_2^{\,T}A_{d3}^T + A_{d3}\tilde{S}_2A_{d4}^T + A_{d4}\tilde{S}_3A_{d4}^T$$

$$\Sigma_4 = Q_1C_1^TM_1^TD_{\bar{\Omega}}^T + A_{d1}\tilde{S}_1C_{d1}^T + A_{d2}\tilde{S}_2^{\,T}C_{d1}^T + A_{d1}\tilde{S}_2C_{d2}^T + A_{d2}\tilde{S}_3C_{d2}^T$$

$$\Sigma_5 = Q_3C_1^T + Q_4C_2^T + M_2D_{\bar{\Omega}}^T + A_{d3}\tilde{S}_1C_{d1}^T + A_{d4}\tilde{S}_2^{\,T}C_{d1}^T + A_{d3}\tilde{S}_2C_{d2}^T + A_{d4}\tilde{S}_3C_{d2}^T$$

$$\Sigma_6 = -I + C_{d1}\tilde{S}_1C_{d1}^T + C_{d2}\tilde{S}_2^{\,T}C_{d1}^T + C_{d1}\tilde{S}_2C_{d2}^T + C_{d2}\tilde{S}_3C_{d2}^T$$

$$\tilde{S}_i = (1-\eta)^{-1}S_i, \;(i = 1, 2, 3)$$

$$P_1 = Q_1^{-1}, \; P_4 = Q_4^{-1}, \; P_3 = -P_4Q_3P_1$$

와 같다.

증명: 슈어 여수정리와 $Q = P^{-1}$, $S = R^{-1}$, $M = KP^{-1} = KQ$ 의 변수 치환을 이용하면 식 (13)의 행렬부등식은

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_{\bar{\Omega}}M + M^TB_{\bar{\Omega}}^T + A_d\tilde{S}A_d^T & B_w & QC^T + M^TD_{\bar{\Omega}}^T + A_d\tilde{S}C_d^T \\ * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & -I + C_d\tilde{S}C_d^T \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

의 등가의 행렬부등식으로 변형된다. 식 (12)의 등호조건을 없애고 구하려는 모든 변수의 측면에서 완벽한 하나의 선형행렬부등식을 얻기 위해서 변수치환과 특이값 분해 방법을 이용한다. 일반성을 상실함 없이[3,9], 특이시스템 행렬은

$$\begin{aligned} &E = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, \; A_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix}, \\ &B_{\bar{\Omega}} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \; B_w = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \; C = [C_1 \;\; C_2] \\ &C_d = [C_{d1} \;\; C_{d2}], \; D_{\bar{\Omega}} = D_{\bar{\Omega}}, \; D_w = D_w \end{aligned} \tag{22}$$

의 특이치 분해 형태를 가질 수 있다. 또한, 식 (22)의 특이시스템 행렬과 식 (12)의 조건을 이용하면, 구하려는 해는

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \tag{23}$$

로 둘 수 있다. 또한, 구하려는 다른 해들은

$$M = [M_1 \;\; M_2], \; Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}, \; S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^T & S_3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

로 잡을 수 있고, 식 (22)와 (23) 및 (24)를 식 (21)에 대입하면 식 (21)은 식 (19)와 등가이다. 따라서, 식 (19)는 구하려는 Q_1, Q_3, Q_4, S_1, S_2, S_3, M_1, M_2의 모든 변수들의 견지에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 형태이다. 변수치환 $M = KP^{-1} = KQ$로부터 제어기 이득 식 (20)을 얻을 수 있고, 구한 해로부터 식 (20)을 이용하면 신뢰 H_∞ 제어기 이득을 직접 구할 수 있다. ■

참조 1. 식 (1)의 특이시스템에서 $E = I$이면, 식 (21)의 선형행렬부등식으로부터 일반적인 시간지연 상태공간 문제에 대한 해를 직접적으로 구할 수 있다. 따라서, 제안한 설계 알고리듬은 특이시스템 뿐만 아니라 정칙시스템에 대한 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기를 설계할 수 있는 일반화된 제어기 설계 알고리듬이다.

제안한 제어기 설계 알고리듬은 시간지연이 없는 특이시스템에 대해서도 아래 보조정리 3에서처럼 간단한 수식전개를 통하여 적용할 수 있다.

보조정리 3. 식 (1)에서 시간지연이 없는 $A_d=0$와 $C_d=0$인 특이시스템을 고려한다. 주어진 $\gamma>0$에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \triangle_1 & \triangle_2 & B_{21} & Q_1C_1^T+M_1^TD_{\Omega}^T \\ * & \triangle_3 & B_{22} & Q_3C_1^T+Q_4C_2^T+M_2^TD_{\Omega}^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D_w^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 Q_1, 역행렬이 존재하는 대칭행렬 Q_4, 행렬 Q_2, M_1, M_2가 존재하면 식 (6)에 의해 표현되는 행렬들은 구동기 고장에도 불구하고 특이시스템의 점근적 안정성과 γ이내의 H_∞ 노옴의 유계를 만족하게 하는 신뢰 H_∞ 제어기의 궤환이득이다. 여기서, 변수들은

$$\triangle_1 = A_1Q_1+Q_1^TA_1+B_{11}M_1+M_1^TB_{11}^T$$
$$\triangle_2 = Q_3^TA_4^T+B_{11}M_2+M_1^TB_{12}^T$$
$$\triangle_3 = A_4Q_4+Q_4A_4^T+B_{12}M_2+M_2^TB_{12}^T$$

으로 정의한다.

증명: $E^TP=P^TE\geq 0$의 성질을 만족하는 리아푸노프 후보함수 $V(x(t))=x(t)^TE^TPx(t)$와 식 (8)의 H_∞ 성능지수 및 정리 1과 2의 증명과정을 이용하면 직접 얻을 수 있다. ■

또한, 제안한 알고리듬을 이용하면 구동기 고장에도 불구하고 변수 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 강인 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기 설계 기법에도 직접 적용할 수 있다. 즉, 보조정리 4에서는 변수 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템이 폐루프시스템의 점근적 안정성과 H_∞ 노옴 유계의 견지에서 등가의 변수 불확실성이 없는 시간지연 특이시스템으로 변형됨을 보인다.

보조정리 4. 변수 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= [A+\Delta A(t)]x(t)+[A_d+\Delta A_d(t)]x(t-d(t)) \\ &\quad +[B_1+\Delta B_1(t)]u(t)+[B_2+\Delta B_2(t)]w(t) \\ z(t) &= [C+\Delta C(t)]x(t)+[C_d+\Delta C_d(t)]x(t-d(t)) \\ &\quad +[D_1+\Delta D_1(t)]u(t)+[D_2+\Delta D_2(t)]w(t) \end{aligned} \tag{26}$$

을 다룬다. 여기서, 변수 불확실성은

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta A_d(t) & \Delta B_1(t) & \Delta B_2(t) \\ \Delta C(t) & \Delta C_d(t) & \Delta D_1(t) & \Delta D_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(t) [J_1 \ J_2 \ J_3 \ J_4],$$
$$F(t)^TF(t)\leq I \tag{27}$$

이다. H_1, H_2, J_i, $(i=1,2,3,4)$는 알고 있는 행렬이며, $F(t)$는 식 (27)의 조건을 만족하는 모르는 행렬이다. 제어기 (6)을 가지고 식 (26)의 특이시스템이 안정가능화하고 H_∞ 노옴이 γ이내로 유계될 필요충분조건은

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_dx(t-d(t))+B_1u(t) \\ &\quad +[B_2 \ \ \gamma\lambda H_1]\begin{bmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ \frac{1}{\lambda}J_1 \end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix} C_d \\ \frac{1}{\lambda}J_2 \end{bmatrix}x(t-d(t)) \\ &\quad +\begin{bmatrix} D_1 \\ \frac{1}{\lambda}J_3 \end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} D_1 & \gamma\lambda H_2 \\ \frac{1}{\lambda}J_4 & 0 \end{bmatrix}u(t) \end{aligned} \tag{28}$$

의 변형한 시스템에서 양의 실수 λ가 존재하고 동일한 제어기 (3)에 의하여 안정가능화하고 H_∞ 노옴이 γ이내로 되는 것이다. 여기서, $\hat{w}(t)$와 $\hat{z}(t)$는 추가적인 외란 입력과 제어될 출력이다.

증명: 참고문헌 [7]과 [19]의 결과를 이용하면 직접 증명할 수 있고, 증명의 과정이 참고문헌의 결과로부터 매우 명확하므로 본 논문에서는 생략한다. ■

참조 2. 보조정리 4에서 변형한 등가의 시스템 식 (28)의 형태는 결국 본 논문에서 다루고 있는 식 (1)의 시간지연 특이시스템 형태이다. 따라서, 정리 2의 선형행렬부등식의 결과에 직접 대입하면 식 (26)의 구동기 고장에도 불구하고 파라미터 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 강인 신뢰 H_∞ 제어기를 설계할 수 있다.

예제. 제안한 알고리듬의 타당성을 보기 위하여 시간지연을 가지는 특이시스템

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-0.2&0.05&0.01\\0&-0.3&0\\0.1&0&0.1\end{bmatrix}x(t-d(t))$$
$$+\begin{bmatrix}5&0.2&0\\0&3&0.1\\0.1&0&0.1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.01&0\\0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix}w(t)$$
$$z(t)=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0.2&0.1&0.1\\0.1&0.1&0.2\end{bmatrix}x(t-d(t))$$
$$+\begin{bmatrix}1&0.5&1\\0.5&1&0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix}w(t)$$
$$\gamma=2$$
$$d(t)=3+2sin(0.2t) \tag{29}$$

를 다룬다. 여기서, $\Omega=\{3\}$으로 설정하면, 즉, 3번째 구동기가 고장이 날 수도 있다고 가정하면, 구동기 고장과 관련이 있는 행렬은 식 (3)에 의하여

$$B_{\bar{\Omega}}=\begin{bmatrix}5&0.2&0\\0&3&0\\0.1&0&0\end{bmatrix},\ B_{\Omega}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0.1\\0&0&0.1\end{bmatrix},$$
$$D_{\bar{\Omega}}=\begin{bmatrix}1&0.5&0\\0.5&1&0\end{bmatrix},\ D_{\Omega}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{30}$$

와 같이 분해할 수 있고, 보조정리 2에 의하여

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-0.2&0.05&0.01\\0&-0.3&0\\0.1&0&0.1\end{bmatrix}x(t-d(t))$$
$$+\begin{bmatrix}5&0.2&0\\0&3&0\\0.1&0&0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.01&0&0&0&0\\0.1&0&0&0&0.1\\0.1&0&0&0&0.1\end{bmatrix}w(t)$$
$$z(t)=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0.2&0.1&0.1\\0.1&0.1&0.2\end{bmatrix}x(t-d(t))$$
$$+\begin{bmatrix}1&0.5&0\\0.5&1&0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0.1&0&0&0&1\\0&0.1&0&0&0\end{bmatrix}w(t) \tag{31}$$

과 같은 등가의 특이시스템을 얻는다. LMI 도구상자[16]를 이용하면 정리 2의 선형행렬부등식으로부터 모든 해는

$$Q=\begin{bmatrix}12.5875&-13.9516&0\\-13.9516&68.0178&0\\1.9821&-4.0563&0.0062\end{bmatrix}$$
$$S=\begin{bmatrix}24.0419&-5.1998&-20.6929\\-5.1998&40.2673&-6.7792\\-20.6929&-6.7792&30.0542\end{bmatrix}$$
$$M=\begin{bmatrix}-10.9637&-19.1671&-1.1242\\4.9759&-42.6640&2.4843\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{32}$$

와 같이 한번에 얻어질 수 있고, 신뢰 H_∞ 제어기는 식 (20)으로부터

$$u(t)=\begin{bmatrix}19.8328&-6.9879&-180.6649\\-47.5986&13.4180&399.2292\\0&0&0\end{bmatrix}x(t) \tag{33}$$

과 같다. 컴퓨터 모의실험을 위하여 외란입력을 그림 1

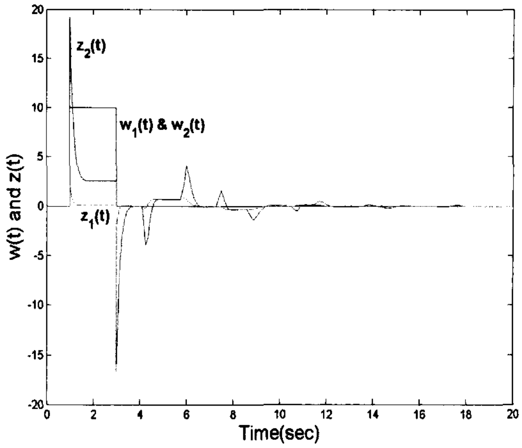

그림 1. $w(t)$와 $z(t)$의 궤적

Fig. 1. The trajectories of $w(t)$ and $z(t)$.

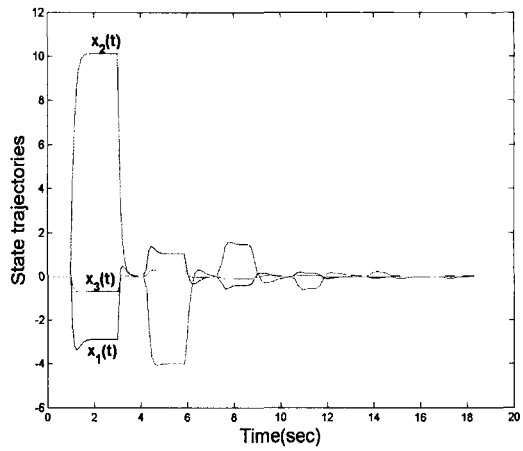

그림 2. 상태의 궤적

Fig. 2. The trajectories of states.

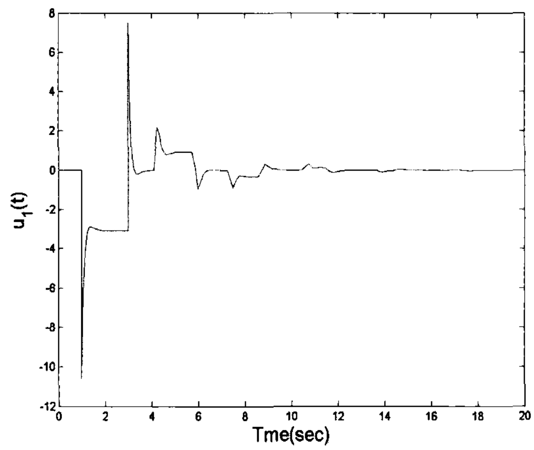

그림 3. 제어입력 $u_1(t)$의 궤적

Fig. 3. The trajectory of $u_1(t)$.

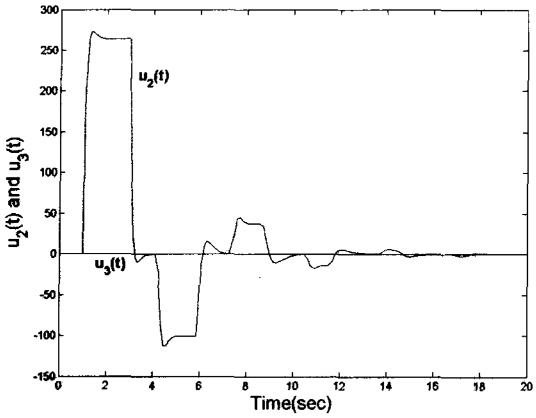

그림 4. 제어입력 $u_2(t)$와 $u_3(t)$의 궤적
Fig. 4. The trajectories of $u_2(t)$ and $u_3(t)$.

에서처럼 1초에서 3초까지 10으로 잡으면, 제어될 출력 신호와 상태 및 제어입력은 그림 1~4에서 주어진다. 그림 2의 결과에서처럼 시간이 흘러감에 따라 상태가 영으로 수렴하기 때문에 구한 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기는 시간지연 특이시스템 (1)을 안정화한다. 그림 4는 3번째 구동기의 고장($\Omega = \{3\}$)을 보여준다. 따라서, 구한 신뢰 H_∞ 제어기는 미리 설정한 구동기의 고장에도 불구하고 점근적 안정성과 신뢰성을 보장한다. 또한, 외란입력 $w(t)$와 제어될 출력 $z(t)$사이의 L_2 유도 노옴(induced norm)의 정의[20]로부터 H_∞ 노옴 유계인 γ의 값을 계산하면 0.8231으로 미리 설정한 $\gamma = 2$보다 작으므로 H_∞ 성능지수를 보장한다. 따라서, 구한 제어기는 3번째 구동기의 고장과 외란입력 및 시변 시간지연의 존재에도 불구하고 폐루프시스템의 정규성, 임펄스 프리, 신뢰성, 점근적 안정성 뿐만 아니라 미리 선정한 γ 유계를 보장한다.

IV. 결 론

본 논문에서는 구동기 고장과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대해 ASH_∞-AF를 만족하게 하는 신뢰 H_∞ 상태궤환 제어기 설계 방법과 존재조건을 볼록 최적화가 가능한 단 하나의 선형행렬부등식 접근방법에 의하여 제시하였다. 구동기 고장과 시간지연 및 외란에도 불구하고 점근적 안정성, 신뢰성, H_∞ 노옴 유계를 만족하는 신뢰 H_∞ 제어기는 구한 해로부터 직접 얻을 수 있다. 제안한 알고리듬은 일반적인 상태공간 모델에 대한 신뢰 H_∞ 제어기에 대한 설계 문제뿐만 아니라 변수 불확실성을 포함하는 시간지연 특이시스템의 제어기 설계문제에도 쉽게 확장 가능함을 보였다. 물론 제안한 알고리듬은 시간지연이 없는 특이시스템에도 적용가능하다. 수치 예제와 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안한 제어기 설계방법이 특이시스템을 안정시키고, H_∞ 노옴 유계를 만족함을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] V. L. Syrmos, P. Misra, and R. Aripirala, "On the discrete generalized Lyapunov equations," *Automatica*, vol. 31, pp. 297-301, 1995.

[2] K. Takaba, N. Morihara, and T. Katayama, "A generalized Lyapunov theorem for descriptor system," *Systems and Control Lett.*, vol. 24, pp. 49-51, 1995.no. 3, pp. 345-357, June 1998.

[3] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.

[4] J. D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 29, pp. 1076-1082, 1984.

[5] D. J. Bender and A. J. Laub, "The linear -quadratic optimal regulator for descriptor sys tems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 32, pp. 672-688, 1987.

[6] K. Takaba and T. Katayama, "Robust H_2 performance of uncertain descriptor systems," *Proc. European Control Conf.*, WE-E-B-2, 1997.

[7] A. Rehm and F. Allgower, "H_∞ control of descriptor systems with norm-bounded uncer tainties in the system matrices," *Proc. Ameri can Control Conference*, pp. 3244-3248, 2000.

[8] C. H. Fang, L. Lee, and F. R. Chang, "Robust control analysis and design for discrete-time singular aystems," *Automatica*, vol. 30, pp. 1741-1750, 1994.

[9] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix Inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[10] S. S. Hung and T. T. Lee, "Memoryless H_∞ controller for singular systems with delayed state and control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336, pp. 911-923, 1999.

[11] F. L. Lewis, "Preliminary notes on optimal control for singular systems," *Proc. 24th Conf. on Decision and Control*, pp. 262-272, 1985.

[12] C. J. Seo and B. K. Kim, "Robust and reliable H_∞ control for linear systems with parameter

uncertainty and actuator failure," *Automatica*, vol. 32, no. 3, pp.465-467, 1996.

[13] R. J. Veillette, J. V. Medanic, and W. R. Perkins, "Design of reliable control systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 37, no. 3, pp. 290-304, 1992.

[14] Y. Gu, C. Geng, J. Qian, and L. Wang, "Robust reliable H_∞ control for uncertain time-delay systems," *Proc. American Control Conference*, pp. 2415-2416, 1998.

[15] Z. Wang, "Robust H_∞ reliable control for linear state delayed systems with parameter uncertainty," *Proc. American Control Conference*, pp. 2405-2409, 1998.

[16] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

[17] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 31, pp. 917-919, 1995.

[18] J. H. Kim and H. B. Park, "H_∞ state feedback control for generalized continuous/ discrete time-delay system," *Automatica*, vol. 35, pp. 1443-1451, 1999.

[19] K. Gu, "H_∞ control of systems under norm bounded uncertainties in all system matrices," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, pp. 1320-1322, 1994.

[20] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A.R. Tannenbaum, *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing company, a division of Macmillan Inc., 1992.

저 자 소 개

김 종 해(정회원)
1993년 경북대학교 전자공학과 졸업.
1995년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학석사.
1998년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학박사.
1998년～2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원.
2000년～2001년 일본 오사카대학 컴퓨터제어기계공학과 객원연구원.
2002년～현재 선문대학교 전자정보통신공학부 조교수

<주관심분야: 강인제어, 시간지연 시스템 해석 및 제어기 설계, 특이시스템 해석 및 설계, 산업응용제어, 비약성(non-fragile) 및 신뢰(reliable) 제어 등.>