대한수학교육학회지 <학교수학> 제 6 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.6, No.2, 153-179. Jun 2004

모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구[1)]

신 은 주* · 이 종 희**

본 연구에서는 모델링 과정의 활동을 세 가지 활동-지각적 활동, 인지적 활동, 메타인지적 활동-으로 구분하여 이 활동들의 상호작용으로 모델을 개발하는 과정을 중학교 학생들을 대상으로 사례연구 방법으로 조사하였다. 연구결과 학생들은 자신의 경험에 기반하여 과제상황을 이해하였고, 도구를 조작하는 지각적인 활동을 하면서 상황을 구조화하였다. 또한 지각적 활동에 기반하여 개발한 모델에 대해 사고하고 추론하는 인지적 활동을 재조직하면서 모델을 개발하였다. 아울러 메타인지적 활동을 통해 모델을 수정하고 정교화하여 일반화 가능한 모델을 개발하였다. 본 연구로부터 모델링 활동은 물리적 세계에서의 지각적인 활동과 추상적인 수학 활동을 연결함으로써 추상적인 수학 지식을 학생들이 이해하기 쉽게 지도할 수 있는 방법이라는 시사점을 얻을 수 있었다.

Ⅰ. 서론

지금까지 수학교육에서 수학적 모델링에 대한 연구는 다양한 방향에서 진행되었는데, 세 가지 관점에서 고려해 볼 수 있다.

첫째, 상황의 실제성을 고려한 문장제에서 수학모델을 개발하는 번역과정을 수학적 모델링의 핵심 활동으로 고려한 연구들, 예를 들면, Greer(1997), Reusser와 Stebler(1997), Verschaffel와 De Corte(1997), Yoshida, Verschaffel와 De Corte(1997)는 모델링 단계를 분석하기보다 양적연구 방법으로 문장제 해결의 성공여부를 조사하고 그 원인을 분석하였다. 따라서 학생들이 개발한 수학모델의 정확성을 평가하였다.

Gravemeijer(2002)에 의하면, 수학적 모델링에서 번역 과정에 초점을 둘 때 모델은 모델화된 상황에서 분리된 것으로 간주되어 실세계와 모델은 두 개의 분리된 실체가 된다.

둘째, 일반화 가능한 체계로서 모델을 개발하는 과정을 수학적 모델링의 핵심 활동으로 본 연구들, 예를 들면, Carlson등(2002), Doerr와 English(2003), Izsak(2000, 2003), Lesh와 Carmona(2003)는 상황에서 수학적 관계와 구조를 조직하여 수학모델을 개발한 후에, 수학모델을 상황에 비춰 해석하여 수정하고 정교화 하는 사이클을 거치면서 일반화 가능한 체계로서 모델을 개발하는 과정을 수학적 모델링으로 보았다. 따라서 문제에 대한 하나의 해나 수학적 표현을 구성하는 것이 아니라, 모델을 해석하는 사이클을 여러 번 거치면서 다양한 맥락에 적용 가능한 체계를 개발하게 된다.

* 이화여대대학원(ejshin@ewha.ac.kr)
** 이화여자대학교((jonghee@mm.ewha.ac.kr)
1) 본 연구는 2003년도 한국학술진흥재단 지원(KRF-2003-005-B00028)에 의하여 이루어졌음

셋째, 학생들이 모델을 가진 사고와 추론 활동을 조직하는 과정을 핵심 활동으로 강조한 연구들, 예를 들면 Cobb(2002), Gravemeijer (1997, 2002), van den Heuvel-Panhuizen(2003)은 상황에서 수학모델로의 번역이 아닌 추론 활동을 조직해 나가는 과정을 모델링으로 보았다. 이 연구들은 수학의 재발명에 초점을 두어 학생들이 상황에 대한 비형식적인 모델을 개발하는 과정을 핵심 활동으로 고려한다.

Gravemeijer(2002)에 의하면, 번역 관점에서는 학생들에게 대응을 구성하도록 하는 반면, 조직 관점에서는 일관성을 유지하도록 한다.

이상에서 살펴본 바와 같이 다양한 관점에서 모델링에 대한 연구가 진행되어 왔음을 알 수 있고, 모델링을 보는 시각이 바뀌어야 할 필요성을 인식할 수 있다. 그 이유는 세 가지 관점을 가진 선행연구들은 각각 전체 모델링 사이클 중에서 일부분의 과정을 핵심 활동으로 고려했기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 첫째와 둘째 관점의 선행연구들이 상대적으로 중시하지 않고 있는 학생들 자신의 비형식적인 모델을 구성하는 활동에도 초점을 둔다. 또한 셋째 관점에서 상대적으로 중시하지 않고 있는 모델을 해석하는 사이클을 반복하면서 구조적으로 동치인 다른 상황에서 재사용 가능하고 공유 가능하며 일반화 가능한 체계인 모델을 개발하는 과정을 중시한다. 따라서 모델링 활동은 수학의 재발명과 재발명한 수학을 사용하고 응용하는 것을 모두 포함하는 활동이라고 할 수 있다.

이러한 모델링 활동은 실제를 수학화 하는 과정과 수학을 실제화 하는 과정 모두를 포함하고 있다는 점에서 교육적 의의를 가진다고 볼 수 있다. 실제를 수학화 함과 동시에 수학을 실제화하는 과정에서 학생들은 구체적인 경험수학과 추상적인 형식수학을 연결하여 학습할 수 있을 것이다.

이러한 점에 근거하여 본 논문에서는 상황을 구조화하면서 비형식적인 상황모델을 만든 후에, 상황모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학모델을 만들고, 수학모델을 상황에 반영하여 해석하고, 수정과 정교화를 거쳐 공유 가능하며 재사용 가능하고 일반화 가능한 체계인 모델을 개발하는 과정을 모델링 활동으로 본다. 이 때, 모델링 활동에서 개발한 모델은 하나의 해가 아니라 다양한 해석과 논쟁을 가능하게 하며, 사회 문화적 맥락에서 활동함으로써 수정과 변형을 거쳐 발달하는 체계로 고려해야 한다.

조직 활동으로서 모델링을 본 여러 연구들은 Gravemeijer가 분류한 활동 수준에 근거하여 각 수준에서 개발하는 모델을 분석하였다.

본 연구에서는 수준으로 구분하기 보다 세 가지 활동 유형- 지각적 활동, 인지적 활동, 메타인지적 활동-으로 구분하여 세 가지 활동의 상호작용으로 모델을 개발하는 과정을 사례연구 방법으로 조사하고자 한다.

모델링 활동에서는 모델을 해석하는 사이클을 반복하면서 일반화 가능한 체계를 개발하게 되므로 활동 수준의 상승이 위계적으로 나타나지 않을 것이라는 점에 근거하여 활동 유형별로 구분하였다.

또한 모델링 활동은 일반화 가능한 모델을 개발하기 위해 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 재조직하면서 순환적인 사이클을 거치게 되므로 지각적인 활동과 인지적 활동 이외에도 자신의 활동을 제어하는 메타인지적 사고 활동이 모델 개발에 큰 영향을 주게 될 것이라고 본다.

연구목적을 위해 먼저, 다음 장에서는 모델링에 대한 연구가 다양한 이론적 시각에서 어떻게 진행되어 왔는지를 살펴보고자 한다.

II. 모델링의 의미

수학교육에서 모델링에 대한 연구는 크게, 상황에서 수학모델로 번역하는 과정을 모델링의 핵심 활동으로 본 연구, 일반화 가능한 체계를 개발하기 위해 모델을 해석하는 사이클을 반복하는 과정을 핵심 활동으로 본 연구, 사고와 추론 활동을 조직하는 과정을 모델링의 핵심활동으로 강조한 연구로 나눌 수 있다.

1. 모델링에 대한 다양한 관점

가. 번역과정을 핵심활동으로 강조한 연구

문장제를 해결할 때 학생들이 실패한 원인을 분석한 연구들(Greer, 1997; Reusser & Stebler, 1997; Yoshida, Verschaffel & De Corte, 1997)은 실세계 상황에 대해 사고하지 않고 피상적인 방법을 사용하는 직접적인 번역 전략과 형식적인 수학적 연산을 연습하는 문장제에 익숙해온 교실문화의 영향을 실패 원인으로 지적하였다. 학생들은 상황의 의미보다 수학의 구문론에 초점을 맞춰 문장제를 해결하고, 반성이나 분석 없이 기호나 규칙을 사용하고, 이 규칙이나 기호가 맥락에서 어떤 의미를 가지는 지를 고려하지 않은 것이다. 위 연구자들은 학생들이 문장제를 해결할 때 실세계 지식을 사용하고 실제적인 고려를 하는 성향은 학교에서 개발되어야 한다고 제안하였다. 또한 산술연산으로 직접 해결할 수 있는 표준적 문장제는 실제적인 모델링 성향을 개발하는 것을 막기 때문에 형식적인 수학적 연산을 연습하는 문장제 대신 실제적인 수학적 모델링을 연습해야 한다고 제안하였다.

위 연구자들의 제안에서 알 수 있듯이 인위적인 문제는 학생들의 사고의 폭과 깊이를 넓혀주지 못한다는 인식으로 수학적 모델링을 고려하게 되었다. 이 때 상황의 실제성을 고려한 문장제에서 수학모델을 개발하는 번역과정을 수학적 모델링의 핵심활동으로 간주하였다. 번역 관점에서 모델링은 실세계에 포함된 대상, 관계, 조건을 수학으로 번역하는 과정으로서, 원래 상황의 수학적 모델을 만드는 과정에 초점을 둔다.

Verschaffel와 De Corte(1997)는 산술문장제는 학생들에게 실제적인 맥락을 제공하여 그들의 경험과 지식을 사용하게 하기보다 실세계와 관련 없는 인위적인 고려를 하게 한다는 점을 지적하였다. 또한 학생들에게 표준적인 문제, 즉 산술 연산을 적용해 해결할 수 있는 문제와 수학적 모델이 분명하게 드러나지 않은 문제를 주었을 때 학생들은 실제적인 맥락을 고려하지 않는다는 점을 제시하였다. 문장제는 모델링과 문제해결 능력을 발달시키지 못한다는 주장을 반영해 Verschaffel와 De Corte(1997)는 학생들에게 실제적인 수학적 모델링을 위한 상황을 제시해 주는 교수실험을 설계하였다. 실세계 지식의 중요성, 모델링, 산술 문장제 해를 해석하는 것에 초점을 둔 교실에서 실제적인 문제해결 성향을 개발하게 하는 것이 연구 목적이었다. 사전 시험 결과 학생들은 산술 문장제를 해결할 때 실세계 지식을 배제하는 성향을 보였으나 탐구교실에서 수업을 받은 후에 실제적인 모델링 성향에서 긍정적인 효과를 보였다. 연구결과를 기반으로 하여 연구자들은 더 실제적인 문제는 학생들에게 인지적 갈등과 반성을 유도하여 실제적인 문제해결 능력을 향상시킨다는 점을 제안하였다.

Greer(1997)는 산술문장제에 대한 대안으로 수학적 모델링을 학습할 때의 장점을 다음과 같이 제시하였다.

첫째 학생들은 문제가 정확한 모델을 제공하는 경우, 합리적인 근사 모델을 제공하는 부적

절한 모델을 제공하는 경우를 구별할 수 있다.

둘째, 실제 모델의 상대적 장점을 토론하는 것은 담화를 이끌거나 문제를 이해하게 한다.

셋째, 학교수학과 학교 밖 수학을 연결하도록 하고, 모델은 상황화된 지식과 형식수학 사이의 단절을 메꾸는 중재 역할을 한다.

넷째, 모델링을 학생들에게 일찍 지도하는 것이 수학적 성향 발달에 중요한 역할을 한다.

다섯째, 모델링 과정에 대한 이해, 사회 현상의 수학적 모델이 구성되고 해석되는 방법에 대한 이해, 모델에 대한 비평적 자세는 교육의 필수 부분이다.

이상에서 살펴 본 선행연구들은 학생들이 문장제를 해결할 때 상황의 실제성을 무시하는 것은 전형적인 문장제가 가진 특징과 교실문화 때문이라는 점을 지적하고, 그 대안으로 수학적 모델링을 제안하였다. 그러나 문장제에서 상황의 실제성을 고려하여 수학적 해를 구하는 과정에만 초점을 두었으므로 학생들이 개발한 비형식적인 상황모델을 분석하지는 않았다. Gravemeijer(2002)에 의하면, 이러한 번역 관점에서 수학적 모델링은 학생들이 문장제에 주어진 실제 상황을 수학용어로 번역하는 데 초점을 두므로 실제와 모델을 두 개의 분리된 실체로 본다. 따라서 번역 관점에서는 비형식적인 수학과 형식적인 수학이 위계를 통해 분리되며, 상황에서 관계를 추상화하는 것에 중점을 둔다고 비판하였다. 이러한 번역 과정을 수학적 모델링의 핵심 활동으로 보는 시각은 사고와 추론 활동을 조직하는 과정을 모델링의 핵심활동으로 본 연구와 대조된다. 조직 활동으로서 모델링을 볼 때 학생들의 비형식적인 수학 활동이 형식적인 수학으로 발달되므로 형식과 비형식 사이에 절대적인 구분이 만들어지지 않기 때문이다.

나. 일반화 가능한 체계 개발과정을 핵심 활동으로 고려한 연구

수학적 모델링을 일반화 가능한 체계를 개발하는 과정으로 고려한 연구들(Carlson et al, 2002; Doerr & English, 2003; Izsak, 2000, 2003; Lesh & Doerr, 2000)은 상황에서 수학적 관계와 구조를 조직하여 수학모델을 개발한 후에, 수학모델을 상황에 비춰 합리적인지를 평가하여 재사용 가능하고 공유 가능하며 일반화 가능한 체계인 모델을 개발하기 위해 모델 해석 사이클을 반복하는 과정을 수학적 모델링으로 정의하였다. 이 관점에서 수학적 모델링은 세 가지 체계의 상호작용으로 구성된다. 첫째, 내적인 개념체계, 둘째, 내적인 개념체계의 객관화와 외적인 개념체계의 내면화 역할을 하는 표현체계, 셋째, 자연에서 경험하는 외적인 체계나 인간이 구성한 인공물이 세 가지 체계를 구성하고 있다(Lesh & Doerr, 2000).

이 때, 세 가지 체계의 상호작용으로 이루어지는 모델링 사이클은 네 단계를 거쳐서 발달하게 된다.

첫째 단계는 서술단계로서, 실세계에서 모델세계로 사상(mapping)을 만들게 된다. 둘째 단계에서는 조작이 이루어진다. 즉, 원래 문제 상황과 관계된 예측을 하고 행동을 하기 위해 모델을 조작한다. 셋째 단계는 해석이나 예측을 하는 단계로서 개발한 모델을 실세계 상황에 비추어 보고 결과를 예측한다. 넷째 단계에서는 입증을 하게 된다. 이 때 행동과 예측이 유용한지를 판단하게 된다. 결국, 모델링 과정은 수학적 구성이 사용되는 실세계 상황에서 시작하여 상황에 대한 유의미한 해석을 해 나가는 과정이다. 모델을 개발할 때 학생들은 자신들의 모델에 대한 서술, 설명, 예측을 수정하고 정교화 시키는 과정을 거치면서 모델링 사이클

을 한 번 이상 경험하게 된다. 이 때에 학생들은 대안적인 사고 방법의 유용성을 스스로 판단하게 되는 것이다(Lesh & Doerr, 2003).

이 관점에서 수학적 모델링을 고려한 연구들은 상황에서 수학모델을 개발하는 과정에 초점을 두거나 수학의 응용 면에서 수학을 사용하여 모델을 구성하고 수정과 정교화를 거쳐 새 환경에 모델을 적용하여 일반화 가능한 체계를 개발하는 과정에 초점을 두었다. 예를 들면, 상황에서 수학모델을 개발하는 과정에 초점을 둔 연구들(Hines, 2002; Izsak, 2000, 2003)은 도르래를 사용하여 물체를 끌어올리는 장치인 윈치를 도구로 사용하여 대수 식을 모델링 하는 과정을 조사하였다. 또한 모델링 과정에서 수학에 대한 이해와 물리적 세계의 이해가 서로의 발달을 지지하거나 제약하는 과정을 분석하였다. 학생들은 물리적 상황의 대수모델을 만들고 사용하고 평가하면서 지식 구조를 재구성하고 정교화하였다. 연구자들은 도구를 사용하는 활동이 물리적 상황 즉, 모델화 된 맥락과 모델 사이의 관계에 대한 인식을 촉진할 수 있을 뿐 아니라 모델의 발생과 재구성과 정교화에 계속적으로 영향을 미치게 되었다고 설명하였다. 따라서 모델링은 물리적 맥락과 수학적 맥락을 연결해 모델을 개발하고 사용하고 평가해 나가는 활동이라고 제언하였다.

문제에 대한 하나의 해를 구하는 것이 아니라 일반화 가능한 체계를 개발하는 과정에 초점을 둔 연구(Doerr & English, 2003)에서는 구조적으로 동치인 세 가지 과제를 사용하여 통계에서 모델링 과정을 조사하였다. 첫째 과제는 모델을 구성하고 탐구하는 과정에, 둘째 과제는 모델을 확장하는 과정에, 셋째 과제는 앞 단계에서 개발한 모델을 적용하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 과정에 초점을 두었다. 학생들은 다양한 사이클을 거치면서 양, 양 사이의 관계, 관계의 표현, 맥락에 대한 해석을 하였다. 학생들의 모델링 과정은 문제상황을 해석하고, 적절한 요소를 추론하고, 양과 조작과 표현을 선택하고 해석하는 사이클로 구성되었다. 따라서 조건에서 목표로 한 번의 사상이 아니라 다양한 해석 사이클과 재해석을 하는 활동을 경험하였다. 모델링 활동으로 학생들은 문제에 대한 자신의 사고방식을 수정하고 정교화하고 확장할 수 있었으며, 대안적인 해석과 관점을 가지고 아이디어를 개발하였다. 따라서 위의 관점을 채택한 연구자들은 중요한 수학적 구성을 하도록 유도하는 비정형적인 문제 상황에서 시작하고, 다른 문제 상황에서 이 구성을 확장하고 적용하여 다양한 맥락에서 재사용 가능한 모델이나 체계를 개발하는 과정을 모델링이라고 정의하였다. 또한 모델개발 과정은 해석하기, 서술하기, 가설 세우기, 설명하기, 정당화하기의 순환적 과정으로 이루어지며, 다른 맥락에서 재사용 가능하고 일반화 가능한 모델을 개발하는 것이 모델링 접근의 핵심적인 활동이라고 제안하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 일반화 가능한 체계 개발과정을 핵심 활동으로 고려한 연구들은 상황에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하는 과정과 다양한 상황에서 재사용 가능한 체계를 개발하는 과정을 모델링 활동의 핵심으로 본다. 또한 수학적 모델링은 상황과 대상을 모델링하며, 수학의 응용에 초점을 둔다.

다. 사고와 추론 활동을 조직하는 과정을 핵심활동으로 강조한 연구

Gravemeijer(1997)에 의하면, 조직 활동으로서 모델링에서 조직 활동의 결과로서 문제 상황을 구조화하는 과정에서 모델이 발생한다. 결과적으로 그러한 모델은 수학모델보다 덜 정교화되고 더 비형식적인 것이다. 또한 모델을 가지

고 수학 활동을 조직하고 모델을 가지고 추론함에 따라 모델과 관계된 의미도 발달하게 된다. Gravemeijer(1997, 2002)는 조직 활동으로서의 모델링은 실세계에서 수학모델을 번역하는 과정에 초점을 두는 것이 아니라 활동을 조직화하는 과정에서 학생들이 그들의 비형식적 수학활동의 기호모델을 창조하는 과정에 중점을 둔다고 설명하였다. 따라서 조직 활동으로서의 모델링에서 학생들은 상황 내에서 활동하면서 상황의 핵심 요소를 상황화 된 비형식적인 전략으로 모델화 한다고 하였다. 즉, 활동을 모델링 하는 것이지 대상을 모델링 하는 것은 아니라고 설명하였다.

상황의 모델에서 추론을 위한 모델로 발달함에 따라서 비형식적 수준과 형식적 수준 사이에 연결성이 만들어진다. 또한 상황의 모델에서 추론을 위한 모델을 개발하는 모델링은 한 모델을 만드는 것이 아니라 모델의 체인이 만들어진다. 막대모델의 기능과 형태가 발달함으로써 모델의 체인이 만들어지는 과정을 조사한 van den Heuvel-Panhuizen(2003)은 막대모델에 부분과 전체를 표시함으로써 개발된 상황모델이 유리수 관계를 추론하는 모델로 발달하는 과정을 밝혔다. 막대는 구체적 맥락과 연결된 표현에서 근사 모델로 발달하였고, 그 후에 계산을 유도하는 더 추상적인 모델로 변화하였다. 근사 모델로서의 막대에서 계산모델로서의 막대로 발달하였고, 그 후에 사고모델로서의 막대로 기능에서 전이하였다. 기능에서의 전이 과정에서 모델을 유연하게 사용하면서 조작하게 되었고, 기능에서의 변화와 함께 모델형태 또한 다른 맥락에서 유용한 이중수직선 형태로 변하게 되었다. 그러나 모델은 엄격한 위계가 존재하거나 모델사용에서 단계가 구분되기보다는 모델을 사용하는 방법에 따라서 막대모델에 대한 해석도 다양하게 나타났다. 또한 막대모델을 가지고 퍼센트, 분수, 소수, 비 개념을 연결하여 학습할 수 있다는 점을 밝혔다.

추론활동을 모델링의 핵심활동으로 고려한 Lehrer와 Pritchard(2002)는 8-9세 아동들이 운동장의 지도를 만들기 위해 각과 길이를 측정하는 활동을 조직하면서 축적과 원점의 개념을 개발하고, 방향과 위치를 기술하기 위해 좌표를 사용하는 과정을 밝혔다. 운동장 공간을 점진적으로 모델링하는 과정은 학교 운동장을 그리는 활동과 걷는 활동에서 시작하였고, 이 활동은 위치와 방향의 수학을 학습하는 시작점이 되었다. 걷는 활동에서 특수한 길이와 방향에서의 변화를 인식하게 되었고, 그림을 그리는 활동은 큰 공간을 점진적으로 모델화 하는 활동으로 조직되었다. 따라서 걷는 활동은 길이와 각 측정을 개발하는데 도움이 되었고, 공간을 지도에 표현하면서는 원점, 축적, 다양한 위치 표시를 이해하게 되었다. 모델을 개발하고 사용하는 활동은 위치와 방향을 학습하는데 도움이 되었고, 운동장에서의 실제적인 경험은 모델 개발을 촉진하였다.

이상에서 살펴본 바와 같이 사고와 추론 활동을 조직하는 과정을 핵심활동으로 강조한 연구들은 학생들이 자신의 비형식적인 상황모델을 개발하는 과정을 중시한다. Lehrer 등(2000)은 모델에 대한 사고와 추론을 촉진하기 위해 개념적으로 중요한 요소나 관계를 구현하는 모델을 제공하고, 이 모델을 가지고 문제를 해결하는 활동은 바람직하지 못하다고 지적하였다. 즉, 학생들에게 모델을 미리 제공해주는 활동은 문제를 해결하기 위해 자신의 모델을 구성하고 평가하고 정교화 하는 성향을 촉진하게 돕는 활동보다 유익하지 못하다는 것이다. 이 관점은 Gravemeijer(1997)의 관점과 일맥상통하다. 두 경우 모두 인식론적 토대는 수학적 의미가 모델에 내재된 고정된 것으로 보는 것이

아니라 학생들이 모델을 가지고 활동함으로써 모델의 의미가 발생하는 것으로 본다. 따라서 학생들이 모델을 가지고 활동함으로써 비형식적인 상황모델에서 수학적 추론을 위한 형식적인 수학모델로 발달하는 데 초점을 두게 된다.

모델링에 대한 다양한 시각을 고찰한 결과를 정리해 보면, 번역과정이나 일반화 가능한 체계를 개발하는 과정을 핵심 활동으로 고려한 연구들은 상황에서 수학적 관계를 조직하는 과정에 초점을 두므로 상황과 대상을 모델화 하게 되며, 자신의 비형식적인 상황모델을 개발하는 과정은 상대적으로 중시하지 않는다. 또한 수학의 응용에 초점을 두어 순환적인 모델링 사이클을 반복하면서 수학모델을 다시 사용할 수 있는 일반화 가능한 체계로 개발하는 과정을 중시한다. 반면, 조직 활동을 핵심활동으로 고려한 연구들은 모델 자체가 아니라 모델을 가지고 행하는 사고와 추론활동에서 비형식적인 상황모델을 개발하여 이 모델을 수학모델로 개발하는 과정을 중시하고 수학의 재발명을 강조한다.

본 논문에서는 상황을 구조화하면서 비형식적인 상황모델을 개발한 후에, 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 이 모델을 수학모델로 발달시키고, 모델을 해석하고 수정하고 정교화하는 사이클을 거치면서 일반화 가능하고 재사용 가능한 체계를 개발하는 과정을 모델링 활동이라고 본다. 이 과정은 과제에 대한 하나의 해를 구하는 것이 아니라 순환적인 사이클을 반복하면서 일반화 가능하고 공유 가능한 체계를 개발하는 것을 중요시한다. 또한 모델링 활동은 상황과 상황에 내재한 대상을 모델링 하는 과정일 뿐만이 아니라 모델을 가지고 행하는 사고와 추론 활동을 재조직 하는 과정이라고 할 수 있다.

선행연구에서 살펴본 바와 같이 실세계 상황에서 수학모델을 개발하는 과정에 초점을 둘 때는 실제적인 상황과 수학모델이 분리된 실체로 다뤄지게 된다. 이 때 수학모델은 형식적이고 추상적인 실체로 개념화된다. 대조적으로 본 논문에서는 모델링 활동에서 학생들은 자신이 활동 주체로서 비형식적인 모델을 개발한 후에 이 모델을 수학모델로 발달시키는 과정을 거치게 된다고 본다. 따라서 수학모델은 구체에서 분리된 형식적이고 추상적인 실체라기보다는 구체와 추상의 연결된 관계 망을 통해 개발된 것이고 상황의 의미를 여전히 내포하고 있다고 볼 수 있다. 본 논문에서는 활동 주체에 의해 개발된 대상으로서의 수학모델이 상황에 대한 이해에 비춰 합리적인지를 판단하는 단계를 거치게 되므로 모델과 모델의 참조인 상황이 분리되지 않고 융합된 실체로서 개념화 될 수 있다고 본다. 또한 지각적 활동과 인지적 활동과 메타인지적 활동을 조직하는 과정에서 상황을 구조화 한 모델도 상황모델, 수학모델, 일반화 가능한 모델로 발달하는 과정을 거칠 수 있다고 본다. 이 시각에서 먼저, 선행연구를 고찰하여 수학교육에서 활동의 의미를 알아보고, 모델링을 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용으로 상황을 구조화하고 모델에 대한 사고와 추론 활동을 조직하면서 일반화 가능한 체계를 개발하는 활동으로 보는 시각에 대한 시사점을 도출하고자 한다.

2. 활동의 조직과 상황의 구조화로서 모델링 활동

가. 활동의 의미

이 절에서는 모델링 활동에서 활동의 의미를 활동이론 관점에서 고찰하고자 한다.

Leont'ev(1981)에 따르면 활동은 구조, 내적 변형, 발달을 수반하는 조직체로서 세 수준에

서 정의된다. 첫째 수준은 동기에 의해 일어나는 활동(activity)으로 문제해결 같은 교육활동이나 노동활동이 그 예이다. 둘째 수준은 목표에 의해 정의되는 행동(action)으로 산술문제해결이 그 예이다. 셋째 수준은 활동이 수행되는 조건에 의해 일어나는 조작(operation)이다(Wertsch, Minick, & Arns, 1984 재인용). Wertsch등(1984)은 활동의 본질을 정의하는 것은 활동에 포함되어 있는 수단과 목표의 관계를 정의하는 것이 아니라 활동이 일어나는 사회적 환경을 확인하는 것이라고 설명하였다. 이들의 시각은 지식을 사용하는 사회 문화적 환경에서 이루어지는 활동을 중요시하고 있는 것이다. Wertsch 등은 학교에서 행해지는 학습 활동은 학생들의 오류를 인정하지 않고 사회적 환경과 독립적인 기능을 강조한다고 지적하였다. 또한 학교에서 학생들이 목표지향 활동을 효과적으로 수행하지 못하는 이유는 학습목표가 활동 동기와 모순이 되어 학생들이 학습목표를 이해하지 못하고 활동단계를 수행하기 때문이라고 지적하였다. 그러므로 학생들의 학습과 교사가 하는 교육이 분리된 독립적인 활동으로 서로 다른 체계에서 수행되지 말아야 한다는 점을 제언하였다.

학교 교육이 사회 환경에서의 활동과 연결되어야 함을 강조한 이들의 시각은 학교 교육이 진정한 활동이 되지 못하는 이유를 제시한 Greeno(1991)의 시각과 일관된다. Greeno에 의하면, 학교에서 학생들은 교과서와 상호작용하면서 기호적인 문제를 학습하게 되므로 사회적인 학습을 하지 못한다. 모델링 활동에서 학생들은 자신의 경험에 비춰 실제적인 상황에서 활동을 시작하므로 활동 동기가 유발되어 모델링 활동 목표를 세울 수 있다고 본다. 이 목표를 성취하기 위해 활동을 수행하는 환경에서 사고와 행동을 구조화하며 자신의 비형식적인 모델을 개발할 것이다. 주어진 상황에서 활동하여 만들어진 비형식적 상황모델은 후에 자신의 활동이 일어나는 조건을 변화시키고 형식적인 활동을 재조직하면서 수학모델로 발달할 것이라고 본다. 그러므로 모델에 대한 사고, 추론 활동의 조직화, 상황의 구조화, 그리고 모델개발이라는 목표가 활동을 수행하는 환경 내에서 서로 상호작용하면서 성취하게 될 것이라고 보는 것이 본 논문에서 모델링 활동을 고려하는 관점이다.

활동이론에서는 활동의 사회적, 개인적, 물질적 측면이 상호의존적으로 작용하는 활동 체계 내에서 지식이 고려된다. 따라서 활동 체계에서 고려되는 지식과 활동은 사회적, 개인적, 물질적 현상으로 구성된다. 이 때 외적인 활동을 행하는 중에 발생하는 내적인 활동은 외적인 활동과 양방향으로 연결된다. 외적인 활동에서 내적 표현으로의 계속적인 피드백과 내적 표현에서 외적 활동으로의 계속적인 피드백에 의해 활동을 하게 된다. 또한 물리적 · 사회적 대상은 단순한 외적인 물리적 대상이 아니라 외적인 활동 결과에 의해 계속적으로 변형된다. 그러므로 활동이론에서는 외적인 것과 내적인 것의 이분법을 초월하여 내적 표상과 외적 활동과 대상의 내재적 통합이 일어난다고 본다. 그러므로 지식을 구성한다는 것은 정적이고 추상적인 실체가 아니라 수행 활동에서 개념적으로 조직을 하는 활동으로 고려된다(Keller & Keller, 1993; Seeger, 1998).

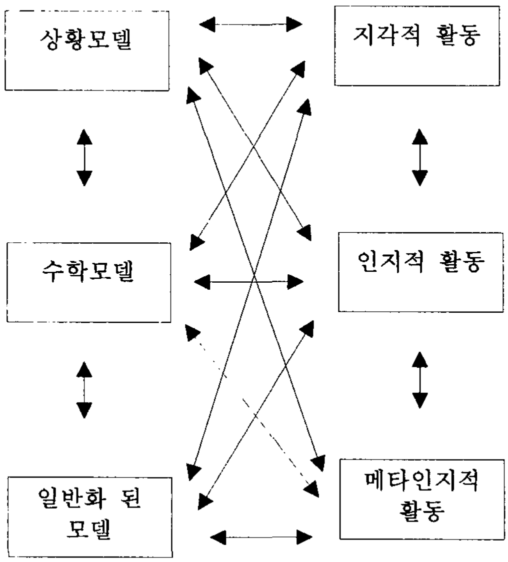
모델링 활동에서 학생들은 외적인 활동을 구조화하고 내면화하면서 모델을 구성하고, 외적인 활동과 계속적으로 상호작용하면서 모델을 변형하고 수정하고 정교화한다. 따라서 학생들이 행하는 지각적, 인지적, 메타인지적 활동과 이 활동의 상호작용으로 개발하는 모델은 서로 연결성을 가지고 서로의 발달을 촉진할 수 있다. 또한 모델에 대한 사고와 추론 활동을 조

직하는 과정에서 개발된 비형식적인 상황모델과 수학모델은 내적인 것과 외적인 것으로 구분되지 않는다고 본다. 왜냐하면 수학모델을 수정하고 정교화하기 위해 활동을 재조직하는 과정에서 상황모델에 대해 반성하고, 상황모델을 검토하고 수정하는 과정에서 수학모델이 재구성되므로 상황모델과 수학모델은 계속적으로 상호작용하면서 변형되고 발달할 수 있다고 보기 때문이다. Gravemeijer(1997)에 의하면, 활동의 재조직 관점에서는 모델화 된 상황과 모델이 연결되어 형식수학과 경험 사이에서 이분법이 나타나지 않는다. 모델화 된 맥락 상황에서 의미를 유도하기 위한 비형식적인 상황모델을 만들고 나서 형식적인 수학모델을 개발하기 때문이다.

활동이론가들에게 활동은 지식 구조를 가지고 내적 변형과 발달하는 조직체로서 환경과의 관계 내에서 변증법적으로 구성된다. 슈퍼마켓에서 하는 산술활동의 예는 환경과 활동 사이의 상호관계를 예증해 준다. 슈퍼마켓 환경에서 식품을 사는 문제해결 활동의 특징은 환경에 따라 변하고, 식품을 구입하는 과정에서 문제 해는 무엇을 구매할지를 결정하는 과정의 부분이 된다. 문제발생하기, 해 구하기, 검토하기 활동의 병치성은 문제해결의 변증법적 과정에서 강력한 모니터링을 하도록 한다. 결국 환경은 정보를 저장하고, 잠재적 계산을 제공하고, 활동을 구조화하는 수단을 제공한다(Lave, 1993). Lave(1988)에 의하면, 슈퍼마켓은 학생들에게 구체적인 세계로 경험되고, 학생들은 주체로서 수퍼마켓에서 자신의 활동을 제어하고, 환경과 상호작용하면서 문제를 만들고, 문제해결 과정을 제어하게 된다. 대조적으로 학교에서는 학생들이 스스로를 객체로서 경험하기 때문에 문제해결 과정에 대한 선택을 하지도 않고 문제를 제어하지도 않는다.

모델링 활동에서 학생들은 활동 주체로서 자신의 경험에 기반하여 실세계를 이해하고, 모델링 활동 과제가 있는 환경과 상호작용하면서 목표에 도달하기 위해 자신의 활동을 구조화하게 된다.

이 때, 계속적으로 전 단계의 활동을 반성하고 검토함으로써 진행되는 활동을 제어해 나갈 것이다. 또한 실세계 환경에서 수학적 환경으로 환경이 변화하면서 자신의 활동과 사고방식을 재조직하게 되고, 이러한 활동의 재조직 과정에서 모델이 개발될 것이다. 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 조직화 단계는 선형적이라기보다는 순환적으로 조직되므로 [그림Ⅲ-1]에서와 같이 학생들이 만든 비형식적인 상황모델, 수학적 모델, 일반화 가능한 모델에 대한 조작도 서로 병치되어 상호적으로 구성되면서 함께 발달할 것이다. 이는 곧, 문제해결 활동을 변증법적 과정으로 본 Lave의 시각과 부합된다고 할 수 있다.



[그림Ⅲ-1] 활동조직화와 모델개발의 상호작용

나. 환경과 활동과 활동하는 사람의 변증법적 관계

본 논문에서 활동 주체인 학습자가 실세계 환경과 수학적 환경에서 행하는 지각적 활동, 인지적 활동, 메타인지적 활동의 상호작용에서 모델이 개발된다고 보는 시각은 환경, 활동, 활동 주체의 변증법적 관계에 의해 활동에서 구성되는 인지를 설명하고 있는 상황인지론의 이론적 관점을 토대로 한 것이다. Lave(1988)는 활동하는 사람, 활동맥락, 활동 사이의 변증법적 관계에 의해 인지가 구성된다고 설명하였다. Lave에 의하면, 문제를 단순화하기 위해 활동 맥락 내에서 자신이 행한 것을 알아야 하고 해결 절차를 검토하는 과정이 필요하다. 이 때, 문제와 해가 상호적으로 구성되어 함께 변하고 문제와 해 모두에 대한 조작은 병치되어 환경과 함께 활성화된다. Lave는 문제를 구성하고 해를 구하고 해결과정을 검토하는 활동의 병치성을 '단절연결(gap closing)'이라고 설명하였다. 또한 환경 내에서 해결할 때 문제를 활성화하고 변형시키므로 문제해결활동을 단절을 연결하는 변증법적 과정으로 재 개념화 할 것을 제안하였다.

슈퍼마켓에서 물건을 사는 사람의 문제해결 활동의 특징을 단절연결이라는 은유로 표현한 Lave의 견해는 Nemirovsky와 Monk(2000)가 활동을 통한 문제해결과정을 '줄 만들기(trail-making)'라는 은유로 설명한 것과 유사한 관점이다. 이 은유는 문제해결 방법에 의해 일정한 경로에 따라 방향 순서를 실행하는 활동이 아니라 해결자가 최종 목표에 도달하기 위해 환경을 다루는 방법을 스스로 평가하는 창조적인 활동을 언급하기 위해 도입한 것이라고 설명하였다. 슈퍼마켓에서 물건을 구입할 때 다른 양씩 포장되어 있는 상품의 가격을 비교하여 가격의 유용성 같은 즉시적인 상황에 따라서 물건을 선택하게 되는 상황에서 문제가 발생하고 해와 검토가 병치되어 활성화되는 것과 같다. Nemirovsky와 Monk에 의하면, 학생들은 내적 표현을 만들고 나서 인지적 기능을 수행하기보다 활동하면서 기호화를 행하게 된다. 따라서 머리 속에 내재된 인지과정이 아닌 실세계에서 활동하는 개인에 초점을 두어야 하고, 수학적으로 의미 있는 활동은 실세계에서의 활동에 의해 분석되어야 한다고 제안하였다. 또한 '줄 만들기'는 해를 구하기 위해서 다음 단계에 무엇을 할지에 대한 단서에 초점을 두는 접근과 대조적인 것으로서, 다음에 무엇을 할지에 대해 열려있고 특수한 단서에 제한되지 않는 더 넓은 상황을 의식하는 것이라고 설명하였다. 모델링 활동은 선형적으로 이루어지기보다 전 단계의 활동을 검토하고 반성하면서 다음 단계의 활동을 조직하게 될 것이다. 따라서 일정한 활동 순서에 따라서가 아니라 모델을 해석하는 사이클을 순환적으로 거치게 되므로 단절연결이나 줄 만들기 은유의 함의점을 반영하고 있다고 볼 수 있다.

'흔적 만들기'라는 은유가 활동하는 주체의 창조적인 활동에 초점을 둔 것과 같은 시각에서 Nemirovsky, Tierney와 Wright(1998)는 수학적 환경에 살면서 활동을 통해 수학적 아이디어를 개발한다는 시각에서 '사는 공간(lived-in space)'이라는 은유를 소개하였다. '사는 공간'이란 활동에서 발생하는 주관적이고 경험적인 공간이다. 예를 들어, 탁자가 방에서 제거된 후에 방에 들어갔을 때 평소에 익숙하던 방이 아니라는 것을 인식할 수 있다. 때로는 탁자가 없음을 확인하고도 무엇이 변했는지를 쉽게 인식하지 못할 수 있다. 시간이 지나면서 바뀐 방에서 살게 되면서 공간이 더 넓은지, 혹은 좁은지와 같은 방의 점진적인 변형을 인식하는 것이다. 한 공간을 경험함으로써 공간이 계속

창조되고, 공간은 목표에 따라 의도적이며, 전체로서 연결되어 관계된다는 점에서 환경으로서의 '사는 공간'은 관계적, 의도적, 창조적 특징을 가진다고 설명하였다. 연구자들은 MBL (microcomputer-based labs)을 도구로 사용해 그래프를 학습하는 학생들의 경험 맥락에서 '사는 공간' 을 설명하였다. 컴퓨터스크린 위에 만들어지는 위치와 시간의 그래프를 특수한 의도와 다른 행동에 의해 '사는 공간'으로 만드는 방법을 서술하였다. 학생들은 자신들의 몸의 움직임에 따라 도구가 만드는 그래프를 이해하고, 몸의 움직임과 그래프와의 관계를 탐구함으로써 그래프 공간을 개발하였다. 또한 몸의 움직임이 만든 그래프가 어떻게 보일지를 예측하고, 그려진 그래프가 예측과 맞지 않으면 움직임을 바꾸었다. 이 때 몸 운동을 표현하는 그래프는 사는 공간으로서 활동에서 발생하는 경험적인 공간이 되었다. 그러므로 연구자들은 예측한 그래프와 그려진 그래프가 일치하는지를 보면서 그래프와 자신의 행동을 반성해 나가는 과정은 사는 공간, 즉, 그래프 공간에 대한 이해를 이끌 수 있다고 제언하였다.

'사는 공간' 개념은 Lave(1988)의 '경험된 사는 세계(experienced lived-in world)' 라는 은유와 유사한 함의점을 가진다. Lave에 의하면, 경험된 사는 세계는 활동과 활동하는 사람과 환경의 변증법적 관계가 구성되는 공간으로서, 인지 발생 과정에서 활동적 경험의 중요성을 함의하고 있다. 경험된 사는 세계는 사람들이 세계에 직접적으로 참여한다는 것을 강조한 것으로 사람을 활동이나 객관적인 세계와 분리한 전통적 관점과 대조적인 것이라고 설명하였다. 또한 환경과 활동은 경험된 사는 세계에서 활동하는 사람과 구성적 관계를 가지게 되고, 활동하는 사람과 활동하는 사람의 정신이 연결될 수 있다는 점을 제시하였다. 따라서 Lave는 정신과 신체를 이분하는 것은 고등인지 기능을 신체나 구체적인 맥락에서 구현된 경험과 분리하는 것이라고 지적하였다. 또한 경험된 사는 세계에서 직접적인 경험에 초점을 맞추는 것은 활동에서 목표를 구성하고 목표를 성취하기 위해 활동적 경험을 하는 즉, 활동과 목표 구성 사이의 반사적 관점을 강조한 것이라고 설명하였다. 따라서 이 관점은 세워진 목표로 직접 향하는 활동의 선형적 관점과 양립가능하지 않다고 설명하였다. 활동과 목표 구성 사이의 반사적 관점은 단절연결이나 흔적 만들기 은유에서 문제해결 활동을 변증법적으로 본 시각과 일맥상통한 것이다.

모델링 활동은 선형적으로 일어나지 않고 한 단계에서의 모순이 인식되면 전 단계의 활동을 재조직하고 변형함으로써 다음 단계로 발전하게 된다.

또한 각 단계는 서로 병치되어 순환적으로 발달하고, 활동 주체로서 학습자가 다양한 환경에서 경험하는 활동에 의해 발달하게 된다. 실세계 환경에서 수학적인 환경으로 환경이 변할 때 활동하는 주체인 학습자는 활동을 조직하고 상황을 구조화하면서 자신의 활동을 재조직하여 비형식적인 상황모델에서 수학모델을 개발하게 된다. 그 후에 처음 환경인 실세계 환경에서 이해할 때 수학모델이 합리적인지를 판단하고 재검토하여 일반화 가능한 모델을 개발하게 된다. 그러므로 본 논문에서는 서로 다른 환경에서 만든 모델의 연결은 다른 환경을 연결하여 조직하게 해 줄 뿐만이 아니라 활동주체가 서로 다른 환경에서 활동함으로써 다양한 모델을 연결할 것이라고 본다. 결국, 실세계 환경과 수학적 환경과 활동 주체인 학습자와 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동은 변증법적 상호작용으로 모델개발을 도울 것으로 본다.

III. 연구방법

1. 연구대상

본 연구의 대상은 서울시 소재의 한 중학교 2학년 여학생 세 명으로서 연구 참여자의 동의를 구두로 받았으며 학생들 모두 자발적으로 연구에 참여하였다. 성적이 상위권에 속하는 A 학생은 자신의 생각을 주저 없이 표현하고 대화에 적극적인 반면, 중위권인 B와 C 학생은 A의 의견을 반영해 생각을 한 후에 자신의 의견을 말하였다. A학생은 가장 먼저 자신의 수학모델을 만들고 나서 다른 학생의 모델을 보며 자신의 모델과 비교하는 성향을 가장 많이 보여주었다.

2. 연구절차

본 연구는 2004년 1월 말에 2차시에 걸쳐 시행한 연구로서, 한 차시는 2-3시간 정도가 소요되었다. 연구대상자는 삼각함수를 학습하지 않은 상태이므로 이 활동과제를 하기 전에 경사판에서 미끄러져 이동한 거리에 영향을 주는 요인을 발견하는 활동과제를 2차시에 걸쳐서 행하면서 삼각함수 성질을 학습하였다.

모델링 활동에서 본 연구자는 연구대상자와 함께 참여자로서의 관찰자 역할을 했다. 세 명의 연구대상자의 사고 과정에 대한 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리 내어 사고하기 과정을 사용하여 연구대상자의 관점을 추적하고 이해하였다. 연구대상자의 활동을 녹화한 비디오와 오디오 자료, 학생들의 지필 노트와 연구자의 현장노트를 기반으로 자료를 수집하고 분석하였다. 실세계 탐구 단계와 가설을 세우고 측정을 하여 변수 사이의 관계를 이해하는 상황모델 개발 단계에서는 소그룹으로 활동하였다. 사전경험이 다른 학생들과 과제상황에 대해 토론하면서 서로의 경험을 공유하고 의사소통 하는 과정이 상황의 이해와 자신의 사고과정에 대한 지식을 활성화 할 것이라고 생각했기 때문이다. 측정한 데이터를 가지고 수학모델을 개발하는 단계에서는 자신의 그래프를 그리게 하였다. 그래프를 그리기 위해 상황모델을 참조로 하여 개인 간 사고에서 개인 내 사고로의 내면화 과정에서 나타나는 개개인의 모델에 대한 추론과 사고과정을 파악하기 위해서이다. 상황모델이 같아도 이를 수학적으로 표현하는 방법에는 개인마다 다양성이 있을 수 있다고 생각했기 때문이다. 그 후에 소그룹으로 수학모델을 서로 비교하면서 자신이 이해한 상황에 적용하여 해석하고 모델을 수정하고 정교화 하였다. 또한 측정단계를 거치지 않고 다양한 상황에 적용 가능하고 일반화 가능한 모델을 개발하였다. 사적인 도구를 개발하는 것을 초월하여 일반화 가능한 모델을 개발할 필요성을 깨닫게 하기 위해서이다. 본 연구자는 문제를 선택하고 제시하고 연구대상자를 안내하고 고무하고 연구 결과에 영향을 주는 질문을 피하면서 상호작용을 하였다.

3. 자료수집 및 분석

자료 수집은 모델링 활동을 녹화한 비디오테이프와 오디오테이프의 녹취물, 학생들의 노트와 연구자의 현장노트를 중심으로 하였다. 수집된 자료는 자료를 수집하고 분석하는 체계적인 귀납적 절차에 기반 해서 추론하는 형태를 취하는 지속적인 비교법(constant comparison)을 사용하여 분석하였다. 자료를 수집하고 관찰하기 위해 소리내어 사고하기 과정을 사용하였고, 특히, 연구대상자의 비언어적 행동에도 주목하여 관찰하였다.

4. 연구도구

본 연구를 위해서 연구자가 고안한 다음과 같은 활동과제를 학생들에게 제시하였다. 이 활동과제는 학생들이 바이킹을 타본 경험을 기반으로 하여 바이킹이 움직이는 실제적인 상황을 수학화하여 바이킹이 움직일 때 높이의 변화를 표현하는 운동방정식을 개발하고, 이 방정식을 상황에 비춰 해석하고 정교화하여 수학을 실제화하는 과정을 모두 포함할 수 있다는 점에서 모델링 활동 과제로 선택하였다. 바이킹을 모델화 한 도구인 추는 활동 초기에 제시하였다.

<u>모델링 활동 과제</u>: 바이킹을 탈 때 높이 변화가 심한 위치에서는 스릴감을 더 느낄 수 있습니다. 바이킹의 회전각의 변화에 따라 높이 변화를 나타내는 바이킹의 운동방정식을 개발하고 그래프를 그리시오. 이 그래프와 운동방정식으로부터 바이킹의 높이 변화가 각에 따라 어떻게 변화하는지를 설명하시오.

IV. 사례연구 분석과 논의

1. 사례연구 분석

학생들의 모델링 활동 단계를 네 단계로 구분하여 각 단계에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용을 조사하기 위해 학생들의 행동과 사고를 사례연구 방법으로 수집한 자료에 기반 하여 분석하였다.

가. 실세계 탐구단계

학생들은 바이킹을 타 본 경험에 기반하여 바이킹의 높이 변화를 예측하고, 바이킹을 모델화 한 추를 움직이는 지각적 활동을 하면서 추의 높이 변화를 이해한다. 다음은 연구자와 학생들이 바이킹과 추높이가 변화하는 상황을 이해하기 위해 토론한 대화의 일부분이다.

연구자: 바이킹을 탈 때 높이가 어떻게 변하니?
학생A: 높아지다가 낮아지고, 또 높아지고 낮아지고..
(학생들이 추를 움직여보는 활동을 한다)
연구자: 추 높이가 어떻게 변하니?
학생B: 음. 땅에 가까워 져요.
학생C: 줄어들어요.
학생A: 낮아지다가 다시 높아지고 다시 낮아지고요…….

학생A는 바이킹을 타 본 경험에 기반하여 바이킹의 높이 변화를 설명하였다. 또한 학생들은 자신이 직접 추를 움직여보면서 추가 주기적으로 왕복 운동을 함에 따라 높이도 계속 어떤 패턴을 가지고 변한다는 사실을 발견하였다. 학생A가 추의 높이를 '낮아지고 높아지고'라고 표현한 것은 추의 높이가 주기적인 패턴을 가지고 변한다는 것을 이해하고 있음을 반영한다. 학생들이 활동 주체로서 실제적 환경에서 물리적 도구인 추를 조작하는 지각적 활동은 변화하는 양을 관찰하고 변화하는 양의 패턴을 발견하는 인지적 활동으로 발달하게 되었다. 추라는 물리적 도구를 직접 조작할 때 추는 물질적 기능을 하지만, 활동에 통합된 후에는 추의 높이 변화를 발견하기 위한 수단으로서 인지적 기능을 하게 되었다.

다음은 추의 높이 변화에 영향을 주는 요인을 발견하기 위해 연구자와 학생들이 한 대화의 일부분이다.

연구자: 높이하고 뭐하고 관계해서 변할까?
학생C: 실의 길이요.
연구자: 바이킹 길이는?
학생A: 일정해요.

연구자: 그럼 높이가 뭐에 따라 변하니? (학생C가 추를 다시 움직이고 학생들이 관찰한다)
학생A, C: 각 이요.
학생B: (고개를 끄덕인다)
연구자: 그렇지 각이지. 각이 지금은 몇 도니?
학생C: 0도요.
연구자: 점점 어떻게 되니?
학생A, B: 커져요.
연구자: 90도가 되면 높이가 어떻게 되니?
학생A, C: 0 이요.

학생들은 경험과 지각적 활동을 기반으로 추의 움직임에 따라 높이가 변하고 이 높이의 변화는 추의 이동 각이나 실의 길이에 따라 달라질 것이라는 예측을 하였다. 물리적 도구를 직접 조작하고 제어하는 지각적 활동을 함으로써 다양한 변화하는 양들을 고려하게 된 것이다. 이 대화는 학생들이 실세계 현상에서 변화하는 상황을 지각적 활동으로 구체적으로 경험함으로써 다양한 변화하는 양들을 인식하고 이 양들이 서로 관계하는 방법을 이해하게 되었음을 잘 반영하고 있다. 이 때 변화하는 양들은 활동에서 경험하는 구체적인 대상이 되는 것이다. 추를 움직이는 지각적 활동에서 학생들은 각의 변화에 따라 높이가 변한다는 사실을 이해하게 되었다. 따라서 각의 변화에 따른 높이 변화의 양적 관계를 조사하기로 활동 목표를 정하게 되었다. 각이라는 개념은 추가 움직이는 맥락과 연결되어 발생하였다. 이 때 추라는 물리적 도구의 성질인 이동각과 높이가 지각적 활동을 통해 변화하는 양들로 인식되었다. 도구를 관찰하는 지각적 활동에 기반 한 사고는 변화하는 양들의 관계를 추론하는 인지적 활동을 유도하였음을 입증하고 있다.

나. 상황모델 개발단계

이 단계에서 학생들은 변화하는 양들 사이의 관계에 대한 가설을 세운 후에 조작할 수학적 대상을 측정을 기록하고 기록한 데이터로부터 패턴을 발견하게 된다. 다음은 추가 움직이는 모양을 보면서 추의 높이 변화에 대한 가설을 세우는 단계에서 이루어진 대화이다.

연구자: 추의 움직임에 따라 높이 변화가 일정하게 높아지고 낮아질까? 그동안 우리가 변화를 많이 배웠잖아.
학생A: (추를 다시 움직여보는 활동을 반복한다) 팍 줄다가 천천히 줄어요(학생 C가 추를 움직이면서 변화를 관찰한다. 한참의 시간이 지난 후에)
학생C: 맞아요.
학생B: (추를 움직여보면서 변화를 관찰하나 답이 없다)

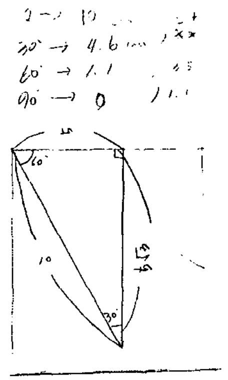
학생A가 지각적 활동을 통해 시작점에서 추를 놓을 때 처음에는 높이가 빨리 줄어들면서 땅에 가까워지다가 차츰 천천히 가까워진다는 것을 예측하였다. 그 후에 학생 C가 타인의 활동을 모니터하면서 자신이 직접 활동주체로서 활동을 제어함에 따라 변화상황을 이해하고 상황모델을 개발하였다. 활동 주체의 지각적 활동과 타인의 활동을 모니터하고 자신의 활동을 제어하는 메타인지적 활동은 각에 대한 높이 변화라는 상황모델을 개발하는 인지적 활동을 유도하였음을 입증하고 있다. 다음은 각의 변화에 따라 추 높이 변화를 측정하기 위해 추가 움직이는 모양을 부채꼴로 모델화하는 활동에서 이루어진 대화이다.

연구자: 각의 변화에 따라 높이를 측정할 수 있지. 우리의 가설대로 높이가 빨리 줄다가 천천히 줄어드는지를 실험해보자(학생들은 추를 움직이면서 높이를 측정할 방법을 생각한다. 추가 공간에서 진동하므로 각과 높이를 측정할 방법을 고안하는 것이 필요하다) 추의 움직임은 어떤 모양이 되니?
학생C: (추의 움직임을 손으로 그려보면서)부채

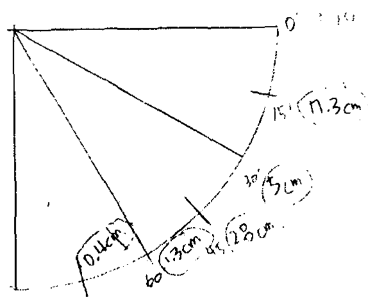
꼴이 그려져요.
학생A: (추를 움직여보면서) 맞아요. 이런 모양요(손으로 반원을 그린다)
(학생들은 추의 움직임을 나타내는 그림인 부채꼴을 종이에 그린다)

학생C가 추의 움직임을 손으로 그려보는 지각적 활동을 조직하면서 추의 움직임을 나타내는 그림인 부채꼴이 비형식적인 상황모델로서 개발되었다. 학생A가 손으로 반원을 그리는 활동은 추가 움직이는 자취를 반원으로 이해하고 있음을 반영한 것이다. 학생들에게 추의 회전 중심은 원의 중심으로, 실의 길이는 반지름으로 개념화되어 추의 자취가 부채꼴로 그려지게 된 것이다. 이는 곧, 추라는 도구의 물리적 성질과 부채꼴의 수학적 성질이 통합되어 학생들에게 인식되었음을 입증하고 있다. 추의 자취를 그린 비형식적인 그림인 부채꼴은 학생들이 추를 움직이는 지각적 활동을 조직하면서 개발된 상황모델로서 후에 각에 따라 높이의 변화를 추론하기 위한 모델로 개발되게 된다. 다음은 자신의 비형식적인 부채꼴에서 각 변화에 따른 추높이 변화를 측정하는 활동에서 이루어진 대화이다.

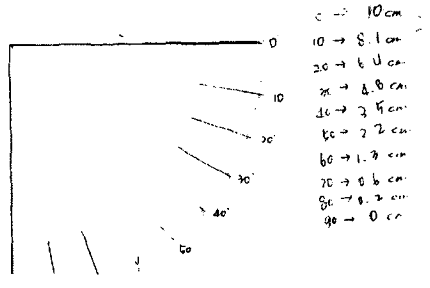
(학생들은 측정할 높이의 시작점을 정하는데 어려움을 가진다. 학생 A는 추의 움직임을 고려하는 듯 자신이 그린 부채꼴의 호를 손으로 왕복해보면서 한참 생각하고 학생 B와 C는 A의 활동을 살핀다)
학생A: 여기서 여기까지요(손으로 측정할 높이를 지적한다).
학생C: 아. 여기서 여기요(학생A를 관찰한 후에 자신이 그린 부채꼴에서 높이를 측정할 위치를 자로 표시한다)
학생B: (학생C가 표시한 높이를 보면서 측정한다)
(학생들 모두 추의 움직임을 나타내는 그림인 부채꼴을 그리고 실의 높이가 10cm일 때부터 시작해 각을 변화시키면서 그때마다 높이를 자로 측정해 기록하였다)
학생C: 각은?
학생B: 30도씩 해. 나는 45도씩 할까보다(학생A는 30도 씩, B는 15도 씩, C는 10도 씩 각을 변화시키면서 높이를 측정한다)
연구자: 점점 어떻게 변하니?
학생A: (측정한 데이터를 보면서)조금씩 변화해요



[그림 Ⅳ-1] 학생A가 진자운동을 그린 상황모델



[그림 Ⅳ-2] 학생B가 진자운동을 그린 상황모델



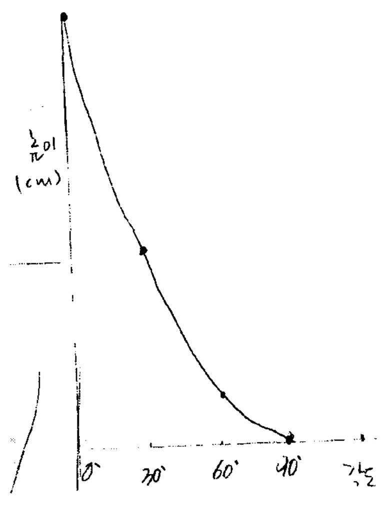
[그림 Ⅳ-3] 학생C가 진자운동을 그린 상황모델

학생들은 자신이 그린 부채꼴을 보면서 추의 높이를 측정할 위치를 고려하였다. 공간상에서 결정되는 높이를 2차원 그림 위에서 어떻게 표현할지를 쉽게 결정하지 못하고 있는 것이다. 이 단계에서 지각된 세계와 인지적 세계의 상호연결성이 구성될 필요성이 발생한다. 학생A가 자신이 그린 부채꼴을 손으로 이동해 보면서 측정할 위치를 찾았다. 학생A의 활동을 모니터하면서 학생들은 각자 다른 각도로 부채꼴을 분할하며 높이를 측정하기로 결정하였다. 이 때 [그림 Ⅳ-1], [그림 Ⅳ-2], [그림 Ⅳ-3]와 같이 학생들이 개발한 상황모델인 부채꼴은 추의 움직이는 자취를 표현한 구체적인 실체로서 학생들에게 개념화된다는 것을 입증하고 있다. 이 대화는 자신이 직접 주체로서 활동을 제어하면서 이해한 상황을 반영해 모델을 개발하였음을 보여주고 있다. 또한 높이를 측정한 기록에서 조금씩 변한다고 설명한 것은 각과 높이를 측정한 데이터는 단순한 기록이기보다는 변화관계를 예측하기 위한 사고도구가 되었음을 입증하고 있다. 지각적 활동과 인지적 활동의 상호작용을 통해 측정한 높이의 변화는 전 단계에서 세운 가설과 일치하여 점점 조금씩 감소한다는 것을 발견하게 도왔다. 또한 높이를 측정할 위치를 찾기 위해 학생 A를 관찰하는 행동은 곧, 자신의 활동을 제어하기 위해 타인의 활동을 모니터 하는 메타인지적 활동으로서 이러한 메타인지적 활동이 모델개발에 영향을 주었음을 입증하는 것이다. 이 단계에서 측정기능이 발생목표로서 실현화되었고, 추라는 물리적 도구의 움직임이 부채꼴이라는 상황모델의 개발을 유도하였다. 또한 부채꼴은 각도가 분할되면서 높이가 측정되는 수학적 대상으로서 인지적 기능을 하였다. 위 대화는 활동의 조직화와 모델의 발달은 상호작용하면서 서로의 발달을 촉진하고, 실세계 탐구와 상황모델 개발은 서로 순환적으로 발달한다는 것을 잘 반영하고 있다. 또한 도구와의 상호작용을 통해 측정데이터를 기록한 상황모델에서 각과 높이의 변화를 추론하기 위한 모델로 발달하였음을 입증하고 있다.

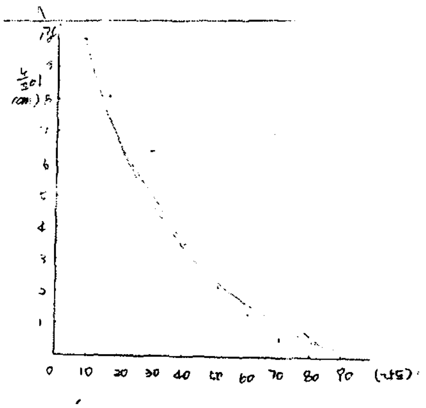
다. 수학모델 개발 단계

학생들은 상황모델을 사고의 대상으로 하여 각과 추높이의 변화관계그래프를 그린다. 다음은 자신이 그린 그래프를 보면서 그래프를 해석하는 단계에서 이루어진 대화이다.

(학생들은 서로의 그래프를 관찰한다)
연구자: 직선으로 그렸니 곡선으로 그렸니?
학생A: 곡선 요(제일 먼저 그래프를 그린 후에 학생B와 C가 그래프를 그리는 것을 살핀다)
연구자: 왜?
학생A: 좁게 하면 곡선이 되요.
연구자: 그렇지. 이 그래프에서 변화를 보자.
학생C: 처음에는 천천히 줄어들어요.
학생B: 7.3, 5, 2.8요. 줄어들어요.
학생B: 조금만 줄어들어요.



[그림Ⅳ-4] 학생A의 높이와 각의 변화그래프



[그림Ⅳ-5] 학생C의 높이와 각의 변화그래프

[그림 Ⅳ-4], [그림 Ⅳ-5]와 같이 학생들은 자신이 측정한 데이터로부터 각의 변화에 따른 높이의 변화그래프를 그렸다. 각의 변화 간격을 세 학생 모두 다르게 했지만 높이의 변화 양은 점점 줄어든다는 것에는 모두 동의하였다. 이는 그래프, 기울기 변화율은 실세계 탐구, 상황모델에서 나온 변화관계와 일치한다는 것을 이해하게 되었음을 반영하고 있다. 상황 이해, 실험, 데이터발생, 그래프 그리기 사이에서 반복되는 지각적, 인지적, 메타인지적 활동은 서로의 발달을 촉진하고 각각이 분리된 활동이라기보다 하나의 실체로서 융합되는 환경을 제공한다는 것을 잘 반영하고 있다. 학생들은 이 활동과제를 하기 전에 비커를 가지고 부피와 높이의 변화관계를 찾는 활동과제를 하였다. 비커를 가진 활동과제에서 측정 간격을 좁히면 데이터가 곡선으로 연결될 수 있다는 발견을 했으므로 이 활동과제에서는 데이터를 모두 곡선으로 연결하였다. 추를 움직이는 활동을 조직하면서 발생한 비형식적인 상황모델인 부채꼴의 수학적 성질이 이해되어 각을 분할하고 높이를 측정하는 활동을 통해 각과 높이의 데이터를 얻었다. 그 후에 변화관계를 추론하여 각과 높이의 변화관계 그래프를 그리게 되었고, 이 그래프로부터 변화율이 활동을 조직하는 과정에서 이해한 변화하는 양의 관계와 연결시키게 되었다. 즉, 물리적 상황에서 유도한 변화하는 양의 관계와 수학적 실체인 변화율이 서로 연결되어 개념화되었다. 추의 이동각이 변화함에 따라 높이도 변한다는 물리적 성질에 대한 이해와 상황모델인 부채꼴의 각의 변화에 따른 높이 변화가 상호작용하여 이해됨에 따라 그래프에서 변화율을 추론하게 되었음을 보여주고 있다. 다음은 추높이와 추가 이동한 거리의 차이를 이해하고 각과 이동 거리의 관계그래프를 그리는 과정에서 이루어진 대화이다.

연구자: 그럼 진자가 이렇게 움직일 때 움직인 거리는 어떻게 변하니? 높이와 거리의 차이를 알겠니? 진자가 움직인 거리는 무엇을 의미하니?
학생A: 추가 지나간 거요.
학생C: 이렇게요(손으로 호를 그린다)
연구자: 그렇지 추가 지나간 거리는 높이하고 차이가 있지. 추가 지나친 거리는 어떻게 변할 것 같니? 저번에 각에 따라 높이가 점점 조금씩 변화하는 것을 보았지. 각에 따라 거리는 어떻게 변할까?
학생A, C: (자신이 그린 부채꼴을 다시 본다)일정하게요.
연구자: 그렇지. 이 자취가 뭐니?
학생C: 원이요.
연구자: 그렇지. 각이 일정하게 움직이면 이 지나간 거리가?
학생A: 똑같아요.
학생C: 네. 거리는 똑같아요. 똑같이 증가해요.
연구자: 그렇지. 추가 이동함에 따라서 거리는 계속 일정하게 증가하지. 그러면 이제 각과 추가 움직인 거리와의 그래프를 그려봐(학생들은 상황모델개발 단계에서 측정한 데이터를 보면서 각의 이동에 따라 호의 길이를 계산하여 각과 이동거리의 관계그래프를 그린다) 이 그래프에서 기울기가 어떠니?
학생A, B: 일정해요.

학생C: 네. 일정하게 올라가요.
연구자: 기울기의 의미가 무엇이니?
학생A: 각에 대한 거리의 변화요.
연구자: 그렇지. 각의 변화에 대한 거리의 변화지. 기울기를 구해봐(각자 그린 그래프의 기울기를 계산한다. 서로의 기울기를 비교하면서 각의 이동 변화를 다르게 하였지만 그래프의 기울기는 모두 일치한다는 것을 이해하게 된다.)

진자가 움직이는 거리를 추가 지나간 것이라는 학생A의 설명에서 진자의 위치를 나타내는 높이와 진자가 움직인 거리가 다르다는 것을 이해하고 있음을 알 수 있다. 그리고 학생C는 추의 자취를 손으로 그리면서 그 자취가 추가 움직인 거리라고 설명하였다. 이는 곧, 지각적 활동이 인지적 활동을 가능하게 하였음을 입증하고 있다. 추가 움직인 거리와 각의 변화를 알기 위해 학생A와 C는 자신이 그린 상황모델인 부채꼴을 보면서 각이 일정하게 변하면 거리도 일정하게 변한다고 설명하였다. 거리 개념을 이해하기 위해 추의 움직임을 손으로 표현하면서 설명하는 것은 학생들에게 거리와 높이라는 개념은 추상적 개념이기 전에 추가 움직이는 자취의 길이와 추가 땅에서 얼마의 위치에 있는지를 나타내는 구체적이고 실제적인 의미를 담고 있음으로 해석할 수 있다. 학생들은 지각적 활동을 함으로써 추의 자취가 원의 일부분이 된다는 인지적 개념화가 일어난 것이다. 추를 움직이는 지각적 활동과 호의 성질을 이해하는 인지적 활동의 조화를 통해 각이 일정하게 변할 때 호의 길이도 일정하게 변한다는 것을 발견하게 되었다. 학생들은 상황모델로부터 각과 호의 길이를 계산하고 관계그래프를 그렸다. 각의 변화를 모두 다르게 하였지만 각의 변화에 따라 호의 길이가 변화하므로 자신들이 그린 그래프에서 기울기는 모두 일정하다는 것을 이해하였다. 학생A는 기울기의 의미를 각에 대한 거리의 변화로 잘 설명하였다. 위 대화는 각과 거리의 관계를 찾는 새로운 활동목표가 생김으로써의 자신의 활동을 반성하고 재조직하는 메타인지 활동을 유발하고 이를 통해 새 목표, 새 계획, 새 실험, 새 모델이 발생되었음을 보여주고 있다.

라. 모델적용 단계

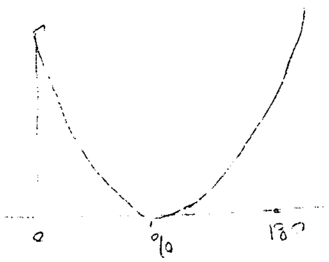
이 단계에서 학생들은 그래프의 기울기의 의미를 상황에 대한 이해와 연결하게 된다. 다음은 기울기의 의미를 해석하는 단계에서 이루어진 대화의 일부분이다.

연구자: 그럼 이 선분의 기울기의 의미는 뭐니?
학생들: (답이 없다)
학생A:(자신이 그린 그래프를 본다) 음. 각에 대해 높이의 변화요.
연구자: 점점 어떻게 변하니?
학생A, C: 조금씩 변화해요.

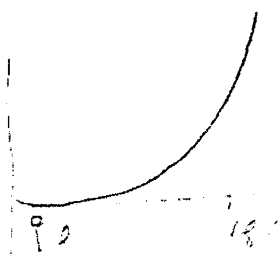
각의 변화에 따라 높이의 변화를 이해했음에도 불구하고 학생들은 답을 하지 못했다. 한참만에 학생A가 자신이 그린 그래프를 보며 각에 대해서 높이의 변화라고 답을 하였다. 측정을 통해 이해한 두 변화하는 양의 관계를 고려한 것이다. 이 때 그래프의 기울기는 수학적 실체라기보다 두 변화하는 양의 관계를 표현하고 있는 구체적 실체로서 개념화되었음을 알 수 있다. 학생들은 그래프를 보면서 기울기가 조금씩 변한다는 것을 이해하였다. 기울기의 의미를 이해하기 위해 자신이 그린 수학모델을 검토하는 메타인지적 활동은 지각적 활동에서 두 양의 변화관계를 구체적으로 경험한 후에 인지적 활동에서 개념화하는 과정을 촉진하였음을 반영하고 있다. 이 단계에서 학생들에게 구체적 실체로서 변화하는 양의 관계와 수학적 실체로서 기울기가 통합된 하나의 실체가 되었음을 알 수 있다. 상황이해, 상황모델에서 두

변화하는 양이 서로 관계하는 패턴을 이해하게 될 때 그래프에서 기울기의 의미를 알게 되었다. 다음은 추의 이동 각이 90도를 넘을 때 추의 각과 높이 변화그래프를 그리기 위해 토론하는 과정이다. 도구를 사용한 측정활동 없이 앞 단계의 활동을 사고의 대상으로 하여 일반화 가능한 모델을 개발하게 하는 것이 활동 목표이다.

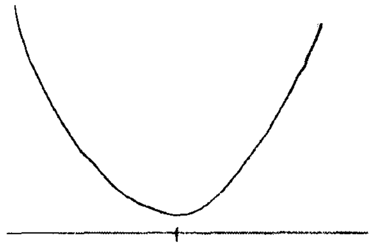
연구자: 지금 90도 까지 측정했지. 그럼 90도를 넘으면 어떤 그래프가 나올까?
(학생들 모두 자신이 그린 그래프를 보고 생각한다. 학생C는 추 움직임을 손으로 그려보며)
학생C: 이거하고 똑같이 이렇게요(90도까지의 그래프와 대칭인 그래프를 그린다)
연구자: 자 이 그래프에서 변화를 보자.
학생C: 처음에는 천천히 늘어요.
연구자: 다음에는?
학생A, B: 더 늘어요.



[그림 Ⅳ-7]학생A의 높이와 각의 변화그래프
(일반화 가능한 모델)



[그림 Ⅳ-8]학생C의 높이와 각의 변화그래프
(일반화 가능한 모델)



[그림 Ⅳ-9] 학생B의 높이와 각의 변화그래프
(일반화 가능한 모델)

연구자: 이 두 그래프(학생 A와 학생 B의 그래프) 사이의 차이가 무얼까?
학생A: (다른 학생들이 그린 그래프를 관찰한다)여기요(90도인 지점을 손으로 가리킨다)
연구자: 90도까지 실험에서 각이 90도 일 때 높이가 얼마니?
학생C: 0요
연구자: 그럼 각이 180도 까지 추가 움직이려면 90도 일 때 높이를 어떻게 해서 실험해야 할까?(학생들 모두 답이 없다. 학생A가 추를 다시 움직여보고 다른 학생들이 학생A의 활동을 관찰한다)
학생들: 떠요(추가 진동하기 위해서는 90도 일 때 땅에서 약간 위의 위치에 추가 있어야 한다는 것을 이해한다)

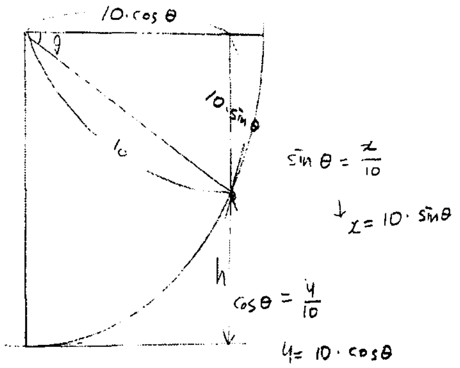
[그림 Ⅳ-8]과 같이 학생C는 추 움직임을 손으로 그려보며 90도에서 180도까지 추가 움직일 때 각에 따른 높이의 변화그래프를 그렸다. 앞 단계에서 인식한 변화관계를 반영하여 대칭인 그래프를 그렸다. 다른 학생들도 앞의 활동에서 자신이 그린 수학모델을 보면서 [그림 Ⅳ-7], [그림 Ⅳ-9]와 같이 90도에서 180도까지 추가 움직일 때 각에 따른 높이의 변화그래프를 그렸다. 이는 곧, 자신이 개발한 수학모델을 사고의 대상으로 하여 일반화 된 모델에 대해 사고하는 메타인지적 활동이 각과 높이의 변화를 나타내는 일반화 가능한 모델을 개발하게 도왔음을 잘 보여주고 있는 것이다. 앞 단계에서

지각적, 인지적 활동을 통해 자신이 만든 모델을 사고 대상으로 하여 90도에서 180도까지에서 각과 높이의 관계를 인식한 것이다. 지각적인 활동 경험은 활동 상황이 제거된 후에도 수학모델의 개발을 촉진하는 요인으로 작용한다는 것을 알 수 있다.

앞 단계에서 학생들은 모두 0도부터 90도까지 추의 움직임을 관찰했을 때 실의 길이인 10cm 높이에서 추가 움직이기 시작하는 것으로 가정해 90도 이동시 높이를 0으로 하여 그래프를 그렸다. 이 그래프를 참조로 했으므로 [그림 Ⅳ-7]], [그림 Ⅳ-9]와 같이 학생 A와 C는 90도에서 180도까지 그래프를 그릴 때 90도에서의 높이를 0으로 하였다. 학생 B만이 [그림 Ⅳ-8]과 같이 90도에서 높이가 0이 아니게 그렸다. 그래프의 차이를 묻자 학생A가 90도 지점에서 높이에 차이가 있다고 답을 하지만 각이 180도까지 추가 움직이려면 90도 일 때 높이를 어떻게 해서 실험해야 할지를 발견하지 못하였다. 학생A가 추를 다시 움직여보는 활동을 하고 이러한 활동을 관찰하면서 학생들은 추가 진동하기 위해서는 90도 일 때 땅에서 약간 위의 위치에 추가 있어야 한다는 실제적인 상황에 대한 이해를 하게 되었다. 이는 지각적인 활동과 자신의 활동을 반성해 보는 메타인지적 활동은 90도 일 때 높이가 0이 아니라는 수학적 개념을 이해하는 인지적 활동을 유도하였음을 보여주고 있는 것이다. 땅에서 실의 길이보다 좀 더 높은 위치에서 시작해야 추가 왕복운동을 할 수 있으므로 이러한 실제적인 상황에 대한 고려는 관계그래프의 변화를 유도한 것이다. 상황에 대한 이해를 토대로 하여 실세계 환경에서 활동 주체로서 활동 목표의 성취를 위해 활동을 제어함으로써 모델을 변형하고 발달을 유도하는 것이다. 두 그래프의 차이를 발견하기 위한 새로운 활동목표가 생김으로써 자신의 활동을 재조직하면서 이 목표를 성취하기 위해 다시 활동을 재검토하게 되었다. 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용과 반복되는 활동 조직화는 모델을 발달하도록 하였음을 입증해 주고 있다. 또한 일반화 가능한 그래프는 추 운동을 표현한 구체적 실체임과 동시에 그래프라는 추상적 실체로서 개념화되었다. 측정을 하지 않고 각과 높이의 그래프를 그리는 것은 물리적 상황을 정신적으로 개념화하여 사고도구로서 모델을 개발함을 의미한다.

이 활동과제를 하기 전에 2차시에 걸쳐서 행한 경사판에서 미끄러져 이동한 거리에 영향을 주는 요인을 발견하는 활동과제에서 삼각함수 성질을 학습하였다. 그러므로 이 과제에서는 추의 움직임을 그린 상황모델에서 높이를 측정하지 않고 각이 30, 45, 60도일 때 삼각함수의 성질을 사용해 추 높이를 구하여 실험에서 얻은 측정데이터와 일치하는지를 비교하였다. 그 후에 각의 변화에 따른 높이의 일반화 가능한 대수식을 유도하게 하였다. 전 단계에서 개발한 수학모델을 참조로 하여 도구 조작 활동 없이 내적 활동의 수단으로서 사고과정을 중재하는 도구를 가지고 새로운 일반화 가능한 모델을 개발하는 것이 목표였다. 학생들은 삼각함수의 성질을 사용하여 [그림Ⅳ-10]과 같은 일반화 가능한 모델을 그렸다. 이 모델로부터 추의 높이가 $h=10-10\sin\theta$ 라는 일반화 된 대수식, 즉, 각의 변화에 따른 추 높이를 나타내는 추의 운동방정식을 구했다. 다음에는 회전열차의 높이와 각의 변화를 모델링 하는 활동을 2차시에 걸쳐 행함으로써 삼각함수그래프를 학습하였다. 그 후에 다시 이 활동과제에서 추 운동 방정식인 $10-10\sin\theta$의 그래프를 그렸다. 학생들은 먼저, $\sin\theta$그래프를 그리고 x 축으로 대칭이동 한 후, 다시 y축으로 10만큼 평행이동하여 $10-10\sin\theta$그래프를 그렸다. 이 그래프는

앞 활동단계에서 각과 높이를 측정하여 그린 그래프와 일치함을 발견하게 되었다.



[그림 Ⅳ-10] 학생들이 개발한 각과 높이의 관계식 (일반화 가능한 모델)

2. 논의

이 절에서는 사례연구를 분석한 결과를 기반으로 하여 모델링 활동에서 지각적인 활동, 인지적인 활동, 메타인지적 활동의 상호작용으로 모델을 개발하는 과정을 분석하고자 한다. 실세계 탐구 단계에서 학생들은 경험에 기반하여 바이킹 높이가 주기적으로 변한다는 사실을 발견하였다. 또한 바이킹을 모델화 한 추를 손으로 움직여보는 지각적 활동을 통해 추가 어떻게 이동하는지를 관찰하였다. 자신이 활동주체가 되어 지각적 활동으로 추의 높이가 감소하다가 다시 증가하는 주기운동을 하는 것을 발견하였다. 그 후에 추의 높이 변화에 영향을 주는 여러 가지 변수를 고려하게 되고 한 변수인 각의 변화에 따라 다른 변수인 높이의 변화가 조작할 대상임을 이해하였다. 즉, 상황의 핵심 요소를 상황화 된 비형식적인 전략으로 모델화 하는 것이다. 활동 주체로서 물리적 도구를 조작하는 지각적 활동은 자신의 경험을 기반으로 한 이해와 통합하여 변화하는 양 사이의 관계를 추론하는 인지적 활동으로 발달하였다.

상황모델 개발 단계에서 학생들은 추를 움직이는 지각적 활동에 대한 이해를 토대로 높이가 처음에는 많이 감소하다가 차츰 조금 씩 감소한다는 가설을 세우고 실험계획을 세웠다. 추의 움직임을 표현한 그림인 부채꼴이 학생들의 비형식적인 상황모델로서 개발되어 이는 곧 수학모델을 개발하기 위한 자원으로서 역할을 하게 되었다. 추를 움직이는 지각적 활동은 추의 물리적 성질인 실의 길이가 반지름으로, 추의 회전 중심이 원의 중심으로 개념화 되었다. 또한 추의 자취가 비형식적인 부채꼴 그림으로 그려진 후에 형식적인 부채꼴 개념으로 발달하였다. 부채꼴은 추가 움직이는 맥락과 연결되었으며, 추의 이동 각의 변화에 따른 높이 변화를 인식하여 부채꼴의 각의 분할에 따른 높이 변화를 측정하게 되었다. 이는 곧, 모델링 활동에서 지각된 세계와 수학적 세계 사이의 일관성이 유도된다는 Gravemeijer(2002)의 주장을 잘 입증하고 있는 것이다. 학생들은 상황모델에서 각의 변화에 따른 높이를 측정해 데이터를 얻고 높이의 변화가 가설과 일치함을 발견하였다. 상황모델에 대한 이해가 실세계 탐구단계에서 물리적인 도구를 조작하는 지각적 활동을 반성하고 타인의 활동을 모니터함에 따라 개발되었다. 이 단계에서 측정 기능이 활동 목표로서 실현화되고 추라는 물리적 도구의 움직임이 부채꼴이라는 상황모델의 개발을 유도하였고 부채꼴은 각도가 분할되면서 높이가 측정되는 수학적 대상으로서 인지적 기능을 하게 되었다.

도구와의 상호작용을 통해 측정데이터를 기록한 상황모델에서 각과 높이의 변화를 추론하기 위한 모델로 발달하였다. 도구에 대한 지식과 각과 높이의 변화데이터인 상황모델에서 이해한 변수사이의 관계에 대한 지식이 결합

되어 수학모델로 발달하게 되었다. 이 단계에서 학생들이 보여준 활동은 활동 주체로서 학생들은 목표 성취를 위해 활동을 제어하고 환경과 상호작용하면서 문제해결 과정을 제어한다는 Lave(1988)의 주장을 잘 반영하고 있다.

수학모델 개발 단계에서 학생들은 상황모델을 사고의 대상으로 하여 각과 높이의 관계그래프를 그렸다. 그래프에서 기울기가 차츰 작아지는 선분으로 연결되는 것을 통해 높이의 변화율이 차츰 감소한다는 것을 이해하였다. 또한 지각적 활동을 참조로 하여 거리 개념과 높이 개념의 차이를 이해하게 되고 각의 변화에 따른 거리 변화를 고려하게 되었다. 학생들은 상황모델을 기반으로 하여 각과 이동 거리를 계산하고 이동거리와 각의 변화 관계그래프에서 기울기가 일정하다는 것의 의미를 인식하였다. 수학모델인 그래프의 기울기가 일정하다는 것이 의미하는 것이 각의 변화에 따른 길이의 변화에서 유도되었기 때문이다. 외적인 지각적 활동과 내적인 인지적 활동의 통합으로 상황모델과 수학모델이 개발된 것이다. 이는 곧, 활동의 재조직에서 모델과 모델화 된 상황과의 연결을 통하여 형식 수학과 경험수학 사이의 이분법이 나타나지 않는다는 Gravemeijer (2002)의 견해를 잘 반영하고 있는 것이다. 도구를 조작하는 지각적 활동에서 이해한 변화하는 양 사이의 관계와 인지적 활동에서 개념화한 기울기 개념이 연결된 것이다. 결국, 도구를 조작하는 활동은 함수관계 인식을 돕고 그래프라는 수학모델을 개발하게 돕는 인지적 기능을 하였음을 보여주고 있다. 학생들에게 상황모델을 사고 대상으로 하여 발생한 수학모델인 그래프는 수학적 기호임과 동시에 현상을 표현하는 도구로서 인식되었다. 즉, 그래프가 참조한 현상과 수학적 기호로서의 그래프는 하나의 실체로서 학생들에게 인식된 것이다.

모델적용 단계에서 학생들은 그래프의 기울기의 의미와 각에 대한 높이의 변화를 연결시켰다. 이는 상황적 정보와 수학적 관계가 모델에 상호연결되어 조직되었음을 반영하고 있는 것이다. 수학모델과 상황의 연결성을 통해 그래프는 추상적 모델이라기보다 상황의 의미를 가진 구체적 실체로 역할을 한 것이다. 전 단계의 활동을 반성하고 검토하는 메타인지적 활동으로 180도까지 각이 이동할 때 진자의 높이 변화를 나타내는 그래프를 그림으로써 그 후에 여러 가지 상황에 적용가능하고 일반화 가능한 모델이 개발되었다. 90도에서 추의 높이를 실제적으로 고려하여 상황적 정보를 얻었고, 그래프에서 각이 90도일 때 높이가 0이 아닌 점으로 표현되는 수학적 관계와 상황적 정보가 연결되어 조직됨으로써 추가 180도까지 움직일 때 각과 높이의 변화관계를 표현하는 일반화 가능한 모델을 제시하게 되었다. 지각적인 활동 경험과 일반화 가능한 모델 개발이라는 활동 목표 사이를 상호 구성적으로 관련지음으로써 실제적 환경에서 활동하는 활동 주체의 인지적 기능이 활성화 되었다. 활동에서 얻은 그래프와 삼각함수 그래프에 대한 이해를 토대로 그린 일반화 된 그래프가 일치하는 것을 이해하였다. 이 때 삼각함수 그래프는 수학적 실체라기보다는 주기운동을 하는 추의 움직임을 모델화 한 구체적인 상황의 의미를 내포하고 있는 대상으로 역할을 한 것이다. 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 조직화 과정에서 그래프 기능이 전이되었다. 수학적 실체로서 그래프는 그래프가 참조한 상황과 융합되어 하나의 실체로 개념화되었다. 추의 움직임은 물리적 실체에서 각이 분할되는 부채꼴인 수학적 대상으로 변화하였으며, 독립변수로 표현된 각에 따라 높이가 종속변수로 표현된 일반화 가능한 대수식과 그래프를 개발하였다. 학생들은 지각

적 활동에서 유도한 실험을 참조로 하여 일반화 가능한 모델을 개발한 것이다. 추의 운동을 표현한 일반화 된 모델은 실제적인 상황에 구현되어 있는 수학적 관계와 의미를 인식하게 함과 동시에 변수의 수학적 관계를 표현하여 다른 상황에 적용 가능한 추의 운동방정식으로서 기능하게 되었다. 조직 활동으로서 모델링은 실제와 모델을 분리된 실체로 보지 않는다는 Gravemeijer(2002)의 견해를 잘 반영하고 있는 것이다.

비형식적 수학 활동이 형식적 수학활동으로 발달되어 형식수학과 비형식적 수학이 구분되지 않게 되고, 모델은 형식적인 수학과 경험수학의 다리 역할을 하게 되었다고 볼 수 있다.

이상에서 논의한 지각적, 인지적, 메타인지적 활동으로 모델이 개발되는 과정을 <표 Ⅳ-1>과 같이 정리해 볼 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구에서는 모델링 과정을 네 단계로 구분하고, 각 단계에서 학생들의 활동을 세 가지 활동 유형- 지각적 활동, 인지적 활동, 메타인지적 활동-으로 구분하였다. 그 후에 이 세 가지 활동의 상호작용으로 모델을 개발하는 과정

<표 Ⅳ-1> 모델링 활동에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용

활동유형	구체적 활동							
지각적 활동	추를 움직이는 활동	추의 이동 자취 관찰	추 높이와 각 측정	추 높이와 추가 이동한 거리의 차이 관찰	추 운동시 각과 거리 변화 관찰		90도일 때 추 높이 관찰	
인지적 활동	추의 높이 변화에대해 사고, 각과 높이의 변화에 대해 추론	추의 자취를 표현한 부채꼴 그리기	각과 높이의 변화 관계 추론, 변화관계 그래프 그리기	각과 거리의 관계 식 구하기	각과 거리의 관계 그래프 그리기	각과 높이의 그래프에서 기울기 해석	90도 일 때 높이가 0이 아닌 그래프 그리기	각과 높이의 일반화된 대수식과 그래프 그리기
메타인지적 활동	자신의 경험을 사고 대상으로 하여 상황에 대한 이해	타인의 활동을 모니터함으로써 자신의 활동을 제어 (추 자취를 표현한 부채꼴 모니터)	타인의 활동을 모니터함으로써 자신의 활동을 제어 (추높이 측정 방법 모니터, 서로의 그래프 관찰)	거리와 높이의 차이를 발견하기 위해 추를 움직이는 활동 반성	각과 거리의 관계에 대한 서로의 사고를 모니터, 그래프 기울기 비교	기울기의 의미를 수학모델과 상황모델에 대한 사고를 기반으로 이해	180도까지 그래프를 그리기 위해 추를 움직이는 활동 반성, 타인 그래프 모니터	측정 활동을 사고의 대상으로 함, 도구조작 활동의 내면화

을 사례연구 방법으로 조사하였다.

실세계 탐구 단계에서 학생들은 추를 손으로 움직여보는 지각적 활동으로 추의 높이가 감소하다가 다시 증가하는 주기운동을 하는 것을 이해하였다. 물리적 도구를 조작하는 지각적 활동은 자신의 경험을 기반으로 한 이해와 통합하여 변화하는 양 사이의 관계를 추론하는 인지적 활동으로 발달하였다. 상황모델 개발 단계에서 학생들은 추를 움직이는 지각적 활동에 기반하여 추의 자취를 비형식적인 부채꼴 그림으로 그린 후에 형식적인 부채꼴 개념을 구성하였다. 이 상황모델로부터 높이와 각의 변화데이터를 얻고 변화패턴을 인식하게 되었다. 지각적 활동을 반성하고 타인의 활동을 모니터 함에 따라 상황모델을 이해하게 되었다. 수학모델 개발 단계에서 학생들은 상황모델을 사고의 대상으로 하여 각과 높이의 관계그래프를 그리고 높이의 변화율이 차츰 감소한다는 것을 이해하였다. 또한 지각적 활동을 참조로 하여 거리 개념과 높이 개념의 차이를 이해하게 되고 각의 변화에 따른 진자의 거리 변화를 고려하게 되었다. 외적인 지각적 활동과 내적인 인지적 활동의 통합으로 상황모델과 수학모델이 개발된 것이다. 또한 타인의 그래프와의 차이를 이해하기 위해 자신이 그래프를 그리는 과정을 다시 반성해보는 메타인지적 활동이 유발되었다. 모델적용 단계에서 전 단계의 활동을 반성하고 검토하는 메타인지적 활동의 도움으로 180도까지 각이 이동할 때 진자의 높이 변화를 나타내는 일반화 가능한 모델을 개발하였다. 지각적인 활동 경험과 일반화 가능한 모델 개발이라는 활동 목표 사이를 상호 구성적으로 관련 지움으로써 실제적 환경에서 활동하는 활동 주체의 인지적 기능이 활성화되었다.

본 연구로부터 모델링 활동 각 단계는 순환적으로 구성되므로 한 단계에서 모순이 발견되면 전 단계의 활동을 다시 검토하며 제어하는 메타인지적 사고를 활성화시킴을 알 수 있었다. 또한 실세계 환경에서 수학적 환경으로 변화하면서 자신의 활동을 재조직하게 되고, 이러한 활동을 재조직함으로써 모델을 개발하게 되었다. 활동조직화 단계는 순환적으로 조직되므로 학생들이 만든 비형식적인 상황모델과 수학적 모델에 대한 조작도 서로 병치되어 상호적으로 구성되면서 함께 발달하였다. 결국, 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 순환적 조직화를 통해 상황모델, 수학모델, 일반화 가능한 모델이 개발되었다. 본 연구로부터 모델링 활동은 물리적 세계에서의 지각적인 활동 경험과 추상적인 수학 활동을 연결함으로써 추상적인 수학 지식을 학생들이 이해하기 쉽게 지도할 수 있는 방법이라는 시사점을 얻을 수 있었다.

참고문헌

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 171-195). Kluwer Academic Publishers.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for

Research in Mathematics Education, 34(2), 110-136.

Gravemeijer, K. (1997). Instructional design for reform in mathematics education. In M. Beishuizen, K. Gravemeijer, & E. van Lieshout (Eds.), *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 13-34). Utrect: CD-β Press..

Gravemeijer, K. (2002). Preamble: from model to modeling. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Kluwer Academic Publishers.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Greer, B. (1997). Modeling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293-307.

Hines, E. (2002). Developing the concept of linear function: one student's experiences with dynamic physical models. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 337-361.

Izsak, A. (2000). Inscribing the winch: Mechanism by which students develop knowledge structures for representing physical world with algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 9*(1), 31-74.

Izsak, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and development of modeling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 191-227.

Keller, C., & Keller, J. D. (1993). Thinking and acting with iron. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Uderstanding practice* (pp. 125-143). New York: Cambridge University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life.* New York: Cambridge University Press.

Lave, J. (1993). The practice of learning. In S. Chaiklin & J. Lave (Eds.), *Understanding practice* (pp. 3-32). New York: Cambridge University Press.

Lehrer, R., Schauble, L., Carpenter, S., & Penner, D. (2000). The innerrelated development of inscriptions and conceptual understanding. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communication in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp.325-360). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lehrer, R., & Pritchard, C. (2002). Symbolizing space into being. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 59-86). Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R., & Carmona, G. (2003). Piagetian conceptual system and models for mathematizing everyday experience. In H. M. Doerr & R. Lesh (Eds), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on problem solving, learning, and teaching* (pp. 71-97). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communication in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp.361-384). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nemirovsky, R., & Monk, S. (2000). "If you look at it the other way...": An exploration into the nature of symbolizing. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communication in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 177-221). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and Instruction, 16*(2), 119-172.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Everyday word problem has a solution-The social rationality of mathematical modeling in the elementary schools. *Learning and Instruction, 7*(4), 309-327.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematics classroom: Reflection and constructions. In F. Seeger, J. Voigt, & V. Werschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp.308-343). England: Cambridge University Press.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics,* 54, 9-35.

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary schools: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 577-601.

Wertsch, J. V., Minick, N., & Arns, F. J. (1984). The creation of context in joint problem-solving. In B. Rogoff & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition: Its development in social context* (pp. 151-171). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have same difficulties? *Learning and Instruction, 7*(4), 329-338.

An Analysis of the Interaction of Perceptive, Cognitive, and Metacognitive Activities on the Middleschool Students' Modeling Activity

Shin, Eun Ju (Ewha womans university, Graduate school)
Lee, Chong Hee (Ewha womans university)

In this article, we classify the middleschool students' mathematical modeling activities with three types as following: perceptive activity, cognitive activity, and metacognitive activity. And we research model development process through the interaction of perceptive, cognitive, and metacognitive activities. We report three results of our case study as following: First, students understanded the context of the modeling tasks on the base of their own experience and constructed the tasks with perceptive activity operating tool.

Second, students developed various models with reorganizing cognitive activity which think and reason about perceptive activity-based model. Third, students were able to create generalizable and reusable models through metacognitive activities. This study revealed that the possible contribution of modeling activity as following: Students are able to understand abstractive mathematical knowledge as connecting between realistic activity and abstractive activity.

* key words: mathematical modeling(수학적 모델링), perceptive activity(지각적 활동), cognitive activity(인지적 활동). metacognitive activity(메타인지적 활동).

논문접수 : 2004. 4. 28
심사완료 : 2004. 6. 9