

철도여객수요예측을 위한 Holt-Winters모형의 초기값 설정방법 비교

An Empirical Comparison among Initialization Methods of Holt-Winters Model for Railway Passenger Demand Forecast

최태성¹ · 김성호²

Tae-Sung Choi · Seong-Ho Kim

Abstract

Railway passenger demand forecasts may be used directly, or as inputs to other optimization models use them to produce estimates of other activities. The optimization models require demand forecasts at the most detailed level. In this environment exponential smoothing forecasting methods such as Holt-Winters are appropriate because it is simple and inexpensive in terms of computation. There are several initialization methods for Holt-Winters Model. The purpose of this paper is to compare the initialization methods for Holt-Winters model.

Keywords : Passenger Demand Forecast(여객수요예측), Holt-Winters Model(홀트윈터스모형), Initialization Method(초기값설정방법), Nonlinear Optimization(비선형최적화)

1. 서론

최근 세계 각국의 철도운영기관들은 인적·물적 자원을 효율적 활용하여 이윤을 극대화하기 위한 다양한 노력을 기울이고 있다. 철도수송서비스의 생산계획에서 최적화 모형(optimization models)을 활용하는 철도운영기관들이 늘어나고 있는 것은 이러한 노력의 한 경향을 잘 보여주는 증거라 할 수 있다.

철도수송서비스에 대한 생산계획 수립은 철도운영기관이 보유하고 있는 자원을 최적으로 활용하여 철도수송서비스에 대한 수요를 충족시키기 위한 계획을 수립하는 것이다. 따라서 이러한 계획수립에는 수요예측이 당연히 선행되어야 한다. 본 논문에서는 일일 철도여객수요의 예측 문제에 관하여 논의하고자 한다.

철도수송서비스의 생산계획에서는 상세한 수준의 수요 예측치가 필요하다. 특히 열차의 좌석용량결정문제는 OD (Origin-Destination), 열차종, 객실등급 등의 속성이 고려

된 매우 상세한 수준의 수요예측치가 입력자료로 사용된다 (여기서 OD는 출발역(origin station)과 도착역(destination station)의 순서쌍을 의미한다). 우리나라에서 운영되고 있는 역의 수는 420개(2000년 1월 1일 기준으로 보통역의 수는 420개)이며 따라서 이론적으로 이용가능한 OD의 수는 $175,980(=420 \times (420-1))$ 개이다. 이중 실제로 여객들이 이용하는 OD의 수를 조사해보면 약 5,000개로 나타난다(1998년 2월 1일부터 1998년 9월 30일까지 8개월간의 수송실적 자료를 분석한 결과 1명 이상이 이용한 OD는 약 8,700개이고 100명 이상 이용한 OD는 약 5,000개임). 즉 OD 속성만 고려하는 경우라도 5,000개의 시계열(series)에 대한 예측치를 구해야 한다. 이러한 조건에서는 계산복잡성이 다른 방법에 비해 상대적으로 낮고 자료저장용량을 적게 요구하는 지수평활법(exponential smoothing methods)이 적합하다.

Brown[1,2], Holt[3], Winters[4] 등의 연구이후, 직관적으로 이해하기 쉽고 계산복잡성이 상대적으로 적다는 장점을 가진 지수평활법은 많은 분야에서 예측모형으로 활용되어왔다(지수평활법에 관한 자세한 내용은 Gardner[5]를 참조할 수 있음). 시계열 자료에 추세성분이나 계절성분이 없

1 인하대학교 경영대학 경영학부 교수

2 정회원, 인하대학교 경영대학 경영학부 조교수

다면 이동평균법(moving average method) 또는 단순지수평활법(simple exponential smoothing method)이 적합하다. 시계열 자료가 선형의 추세성분을 가지고 있다면 Holt모형이 적합하다(이동평균법, 단순지수평활법, Holt모형 등에 대한 자세한 내용은 Makridakis et al.[6]를 참조할 수 있음). Fig. 1은 OD가 서울→부산이며 열차종은 새마을호, 객실등급은 일반실인 경우 1998. 2. 1부터 1998. 4. 4까지의 여객수요 시계열 자료를 그림으로 나타낸 것이다. 이 그림을 살펴보면 일정한 시간(여기서는 7일)을 간격으로 하며 반복적으로 나타나는 패턴 즉 계절성분(seasonality)이 나타나 있음을 알 수 있다. 철도여객수요의 경우와 같이 계절성분을 가지고 있는 시계열자료에는 Holt모형에서 계절성분을 직접적으로 고려할 수 있도록 확장된 Holt-Winters모형이 적합하다.

Holt-Winters모형에서는 평균수준(level), 추세성분(trend), 계절성분(seasonality) 등이 재귀적으로 갱신되는 관계로 설정되어 있어 초기값(initial values)이 결정되어야 한다. Winters[4], Granger and Newbold[7], Larraneta et al.[8], Makridakis et al.[6] 등은 각각 Holt-Winters모형의 평균수준(level), 추세성분(trend), 계절성분(seasonality) 등에 대한 초기값 결정방법을 제시한 바 있다. 초기값 결정방법에 따라 Holt-Winters모형의 예측오차가 달라질 수 있다. 따라서 초기값 결정방법에 따른 Holt-Winters모형의 예측오차를 비교할 필요가 있다. 본 논문의 목적은 Holt-Winters모형을 적용하여 철도여객수요를 예측하는 상황에서 기존에 제시된 초기값 결정방법을 실제자료를 기초로 비교해 보고자 하는 것이다.

2. Holt-Winters모형

Holt-Winters모형은 평균수준(level), 추세성분(trend), 계

절성분(seasonality) 등에 대한 평활방정식으로 구성되어 있다. 이 모형은 Holt모형[3]에 계절성분을 다루기 위한 평활방정식이 추가되어 있으며 계절성분을 표현하는 방식에 따라 승법모형(multiplicative model)과 가법모형(additive model)으로 구별된다. 승법모형은 평균수준과 추세성분을 더한 결과에 계절성분을 곱하여 이를 예측값으로 한다. 가법모형은 평균수준과 추세성분을 더한 결과에 계절성분을 더하여 이를 예측값으로 한다. Fig. 1에 나타난 것과 같은 형태의 계절성분은 승법모형과 가법모형으로 모두 표현할 수 있으며 본 논문에서는 승법모형만을 논의대상으로 한다.

Holt-Winters승법모형은 다음과 같은 방정식들로 나타낼 수 있다.

$$L_t = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

$$S_t = \gamma \frac{Y_t}{L_t} + (1-\gamma)S_{t-s}$$

$$F_{t+m} = (L_t + b_t m)S_{t-s+m}$$

여기서

- Y_t = 시점 t 에서 관찰된 시계열의 값
- L_t = 시점 t 에서 시계열의 평균수준
- b_t = 시점 t 에서 시계열의 추세성분
- S_t = 시점 t 에서 시계열의 계절성분
- F_{t+m} = 시점 t 에서 예측한 시점 $t+m$ 의 예측값
- s = 계절성분의 길이(예를 들어 일주일일을 구성하는 曜日의 수, 일년을 구성하는 月の 수)
- α, β, γ = 평활모수

앞에서 나타낸 Holt-Winters모형은 m 기간차이를 두고

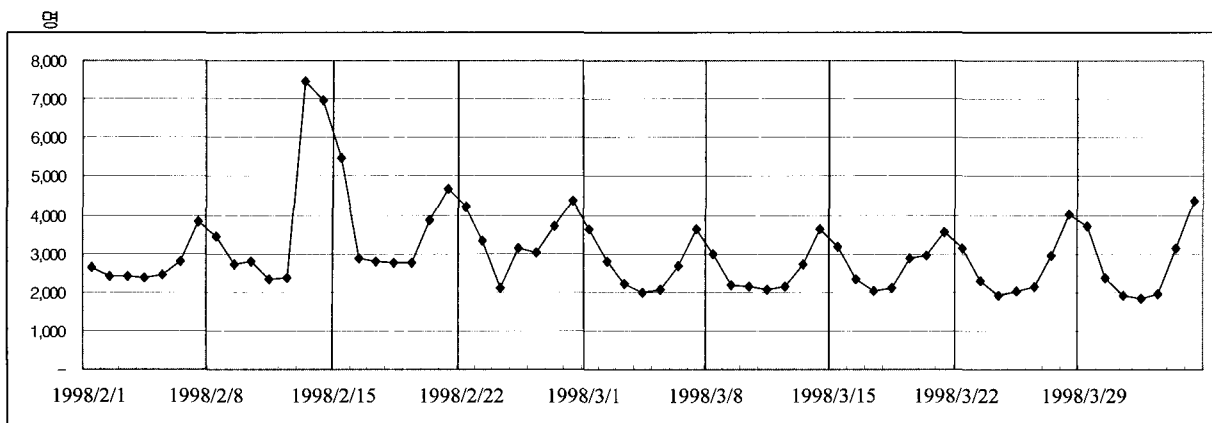


Fig. 1. 서울→부산, 새마을호, 일반실의 여객수요

예측값을 계산하는 모형이다. 본 논문에서는 1기간차이를 두고 예측값을 계산하는 경우를 가정한다. 즉 $m = 1$ 을 가정한다.

Holt-Winters모형을 적용하기 위해서는 평활모수(smoothing parameters) α , β , γ 의 값을 사전에 설정해 두어야 한다. 평활모수의 값은 예측오차를 최소화하는 값이 가장 바람직하다. 평활모수의 값을 설정하기 위해 전통적으로 사용되어온 방법은 몇 개의 값(예를 들면, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9)에 대해서 예측오차를 계산한 후 이중 가장 적은 예측오차를 나타내는 값을 평활모수로 사용하는 격자검색(grid search)법이다. 최근 컴퓨터 성능의 발전으로 비선형최적화문제(nonlinear optimization problem)의 해를 구해서 그 값을 평활모수로 사용할 수 있다.

예측오차를 측정하는 수단은 평균제곱오차(mean squared errors: MSE), 평균제곱오차의 제곱근(root mean squared errors: RMSE), 평균절대오차(mean absolute errors: MAE), 평균절대비율오차(mean absolute percentage errors: MAPE) 등 다양하다(예측오차 측정수단에 대한 구체적인 내용은 Makridakis et al.[6]을 참조할 수 있음). 본 논문에서는 여러 OD에 대해서 Holt-Winters모형의 초기값 설정방법을 비교하고자 하며 따라서 여객수요량의 크기에 관계없이 상대적인 예측오차의 비교가 가능한 MAPE를 사용한다.

MAPE를 최소화시키는 평활모수 α , β , γ 의 값을 구하기 위한 비선형최적화문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Minimize } \frac{1}{w \cdot s} \sum_{i=1}^w \sum_{t=1}^s \left| \frac{Y_{t,i} - F_{t,i}}{Y_{t,i}} \times 100 \right|$$

$$\{ \alpha, \beta, \gamma \}$$

$$\text{subject to } \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]^3$$

여기서

- w = 수집한 자료에 포함된 총 주의 수를 의미함
- s = 계절성분의 길이(예를 들어 일주일을 구성하는 曜日の 수, 일년을 구성하는 月の 수)를 의미함
- $Y_{t,i}$ = i 번째 주의 t 번째 요일의 시계열 관측값
- $F_{t,i}$ = i 번째 주의 t 번째 요일의 시계열 예측값

위의 비선형최적화문제는 Microsoft[®] Excel에 포함된 Solver를 이용하여 풀 수 있다.

3. Holt-Winters모형의 초기값 설정방법

Winters[4]는 $w' \times s$ 개의 관찰값을 사용하여 초기값을 설정하는 다음과 같은 방법을 제시하였다.

$$L_0 = \bar{Y}_{(1)}$$

$$b_0 = \frac{\bar{Y}_{(w')} - \bar{Y}_{(1)}}{(w' - 1)s}$$

$$S'_{t,i} = \frac{Y_t}{\bar{Y}_{(i)} - \left(\frac{s+1}{2} - t\right)b_0}$$

$$i = 1, 2, \dots, w', \quad t = 1, 2, \dots, s$$

$$S'_t = \frac{1}{w'} \sum_{i=1}^{w'} S'_{t,i}$$

$$S_{t-s} = s \frac{S'_t}{\sum_{t=1}^s S'_t}, \quad t = 1, 2, \dots, s$$

여기서

- w' = 평활모수 추정에 사용되는 週의 수
- $\bar{Y}_{(i)}$ = i 번째 주에서 계산된 여객수요의 산술평균을 의미함

Granger and Newbold[7]는 첫 번째 주의 관찰값을 사용하여 초기값을 설정하는 다음과 같은 방법을 제시하였다.

$$L_0 = \bar{Y}_{(1)}$$

$$b_0 = 0$$

$$S_{t-s} = \frac{Y_t}{\bar{Y}_{(1)}}, \quad t = 1, 2, \dots, s$$

Larraneta et al.[8]는 Winters의 초기값 결정방법을 변형한 다음과 같은 방법을 제시하였다.

$$b_0 = \frac{\bar{Y}_{(2)} - \bar{Y}_{(1)}}{s}$$

$$L_0 = \bar{Y}_{(1)} - \frac{s+1}{2} b_0$$

$$S'_{t,i} = \frac{Y_t}{\bar{Y}_{(i)} - \left(\frac{s+1}{2} - t\right)b_0}$$

$$i = 1, 2, \quad t = 1, 2, \dots, s$$

$$S_{t-s} = s \frac{0.5(S'_{t,1} + S'_{t,2})}{\sum_{t=1}^s 0.5(S'_{t,1} + S'_{t,2})}$$

$$t = 1, 2, \dots, s$$

Makridakis et al.[6]는 Granger and Newbold의 방법에서 추세성분의 초기값 결정방법을 변형한 다음과 같은 방법을 소개하였다.

$$L_0 = \bar{Y}_{(1)}$$

$$b_0 = \frac{\bar{Y}_{(2)} - \bar{Y}_{(1)}}{s}$$

$$S_{t-s} = \frac{Y_t}{\bar{Y}_{(1)}}, t = 1, 2, \dots, s$$

4. 실증적 비교

여기서는 Holt-Winters모형으로 철도여객수요를 예측할 때 초기값결정에 사용할 수 있는 4가지 방법을 실제자료를 이용하여 비교해본다. 자료는 14개 OD(자료에 포함된 OD는 1) 광주->서울, 2) 대전->서울, 3) 대전->영등포, 4) 동대구->부산, 5) 동대구->서울, 6) 부산->동대구, 7) 부산->서울, 8) 서울->광주, 9) 서울->대전, 10) 서울->부산, 11) 서울->전주, 12) 영등포->대전, 13) 전주->서울, 14) 천안->서울 등임), 2개 열차종(새마을, 무궁화), 일반실의 34週간의 일일여객수이다. 34週간의 자료(1998.2.1 ~ 1998.9.26)중 1週부터 20週까지의 20週간 자료는 평활모수를 추정하는데 사용하였고, 나머지 21週부터 34週까지의 14週간 자료는 예측오차를 측정하는데 사용하였다.

Table 1은 평활모수 추정표본과 예측오차 측정표본에서 계산된 MAPE의 평균 및 표준편차를 나타낸 것이다. 예를 들어 Winters의 방법으로 초기값을 결정하여 Holt-Winters모형을 적용하였을 때 평활모수 추정표본에 계산된 MAPE의 평균값은 13.42이고 그 표준편차는 4.49이다. 평활모수 추정표본에서 계산된 MAPE는 Holt-Winters모형이 자료를 설명하는 정도를 나타낸다. 예측오차 측정표본에서 계산된 MAPE는 Holt-Winters모형의 예측능력을 나타낸다.

Table 2는 각 방법의 MAPE에 대한 평균차이검증 결과이다. 예를 들어, Winters의 방법(X1)과 Larraneta의 방법(X2)간의 MAPE에 대한 평균차이는 -0.96이며 t값은 -6.15이고

Table 1. MAPE의 평균 및 표준편차

	초기값 결정방법			
	Winters의 방법	Larraneta의 방법	Granger and Newbold의 방법	Makridakis의 방법
평활모수 추정표본	13.42 (4.49)	14.38 (4.82)	13.59 (4.57)	14.21 (4.73)
예측오차 측정표본	12.52 (4.23)	12.67 (4.37)	12.45 (4.21)	12.65 (4.25)

표에 나타난 숫자는 MAPE의 평균, ()안의 숫자는 MAPE의 표준편차를 의미함

Table 2. MAPE에 대한 평균차이검증

	대응	대응차				t값	자유도	유의확률	
		평균	표준편차	평균의 표준오차	차이의 95% 신뢰구간				
					하한				상한
평활모수 추정표본	X1-X2	-0.96	0.82	0.16	-1.27	-0.64	-6.15	27	0.00
	X1-X3	-0.17	0.32	0.06	-0.29	-0.04	-2.79	27	0.01
	X1-X4	-0.79	0.49	0.09	-0.98	-0.60	-8.49	27	0.00
	X2-X3	0.79	0.96	0.18	0.42	1.16	4.36	27	0.00
	X2-X4	0.17	0.59	0.11	-0.06	0.39	1.50	27	0.14
예측오차 측정표본	X1-X2	-0.15	0.98	0.18	-0.53	0.23	-0.82	27	0.42
	X1-X3	0.06	0.42	0.08	-0.10	0.23	0.81	27	0.43
	X1-X4	-0.14	1.05	0.20	-0.54	0.27	-0.68	27	0.50
	X2-X3	0.22	0.75	0.14	-0.07	0.51	1.53	27	0.14
	X2-X4	0.02	0.47	0.09	-0.17	0.20	0.19	27	0.85
X3-X4	-0.20	0.83	0.16	-0.52	0.12	-1.27	27	0.21	

X1 : Winters방법의 MAPE평균

X2 : Larraneta의 방법의 MAPE평균

X3 : Granger and Newbold의 방법의 MAPE평균

X4 : Makridakis의 방법의 MAPE평균을 의미함

유의확률은 0.00이다. 유의수준(significance level)을 0.01로 설정할 경우 두 방법의 MAPE의 평균은 통계적으로 다르다고 할 수 있다.

Table 2를 살펴보면 평활모수 추정표본의 경우 Larraneta의 방법(X2)과 Makridakis의 방법(X4)간의 차를 제외하면 모두 유의수준 0.01에서 통계적으로 다르다고 할 수 있다. 즉, 초기값 결정방법에 따른 Holt-Winters모형의 자료설명 능력은 「Winters의 방법 > Granger and Newbold의 방법 > Makridakis의 방법 = Larraneta의 방법」이라고 할 수 있다. 여기서 >는 왼쪽 방법이 우월함을 나타내고, =은 두 방법의 차이가 없음을 의미한다.

Table 2에서 예측오차 측정표본의 경우를 살펴보면 유의수준 0.01에서 초기값 결정방법에 따른 Holt-Winters모형의 예측능력이 차이가 없음을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 Holt-Winters모형을 적용하여 철도여객수요를 예측할 때 사용할 수 있는 4가지 초기값 결정방법 (Winters의 방법, Larraneta의 방법, Granger and Newbold의 방법, Makridakis의 방법)을 실제자료를 사용하여 비교

하였다. 자료는 14개 OD, 2개 열차종의 28개, 34주간 시계열 자료를 사용하였다.

비교결과 자료설명능력관점에서는 Winters의 방법이 가장 우월하고 그 다음으로 Granger and Newbold의 방법이 우월한 것으로 나타났다. Makridakis의 방법과 Larraneta의 방법이 자료설명능력관점에서 가장 뒤떨어지는 것으로 나타났으며 이들 두 방법간에는 차이가 없는 것으로 나타났다. 예측능력관점에서는 4가지 방법간의 우열이 나타나지 않았다.

본 논문에서 얻은 결과가 Holt-Winters모형을 사용하여 예측을 수행할 때 초기값 설정방법을 선택함에 있어서 유용한 정보를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

참고 문헌

1. Brown, R.G. (1959), *Statistical Forecasting for Inventory Control*, New York: McGraw-Hill.
2. Brown, R.G. (1962), *Smoothing, Forecasting, and Prediction of Discrete Time Series*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
3. Holt, C.C. (1957), *Forecasting Seasonals and Trends by Exponentially Weighted Moving Averages*, Pittsburgh, Penn.: Carnegie Institute of Technology.
4. Winters, P.R. (1960), "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages", *Management Science*, Vol.6, pp.324-342.
5. Gardner Jr., E.S. (1985), "Exponential Smoothing: The State of the Art", *Journal of Forecasting*, Vol.4, No.1, pp.1-28.
6. Makridakis, S., S.C. Wheelwright, and R.J. Hyndman (1998), *Forecasting: Methods and Application* 3rd Edition, New York: John Wiley & Sons, Inc.
7. Granger, C.W.J., and P. Newbold (1986), *Forecasting Economic Times Series*, New York: Academic Press.
8. Larraneta, J.C. et al. (1988), *Métodos modernos de gestión de la producción*, Alianza Universidad, Textos.