

원통 내 수평 보텍스 링의 거동

서용권* · 여창호*

(2003년 11월 29일 접수, 2004년 4월 8일 심사완료)

Movement of a Horizontal Vortex Ring in a Circular Cylinder

Yong Kweon Suh and Chang Ho Yeo

Key Words: Vortex Ring(보텍스 링), Circular Cylinder(원통), Axi-Symmetric Flow(축대칭 유동), Free Surface(자유표면), ICCG Method(ICCG 법), Inertial Oscillation(관성진동)

Abstract

In this paper, we report the numerical and experimental solutions of the axi-symmetric flows in the axial plane driven by an impingement of fluid from the bottom wall of a circular cylinder. We managed to visualize successfully the flow pattern shown on the vertical plane through the container axis. The numerical results are shown to compare well with the experimental results for the case of infinity Rossby number. The satisfactory agreement between the two results was possible when in the numerics the free surface was treated as a solid wall so that a no-slip condition was applied on the surface. The numerical solutions reveal that inertial oscillation plays an important role at small Rossby numbers, or at a larger background rotation.

1. 서론

회전유동에 대한 기초연구는 지구상의 해양유동, 기상 유동 등 지구의 회전이 중요한 인자로 작용하는 큰 스케일의 유체 유동해석에 매우 중요한 역할을 한다. 또한, 펌프, 터빈 등과 같은 회전유동체 기계 내부의 유동해석 및 설계에도 매우 중요하게 사용된다.

회전유동은 회전의 효과가 충분히 큰 경우 회전축에 대한 직각 단면(일반적으로 수평 단면)에서의 유동이 축방향 위치와 거의 무관하게 일정하다는 Taylor-Proudman 이론이 성립하기 때문에 용기의 바닥 또는 자유표면에서의 Ekman 분출 모델만 잘 사용한다면 2차원 해석으로서 실제유

동을 매우 잘 재생할 수 있다. 그리하여 최근에는 이에 대한 연구가 활발히 진행 중에 있다.

이 같은 일련의 연구결과들을 보면 Verzicco^(1~3)는 회전의 영향으로 유동장에 관성진동이 발생함을 언급하였고, 원통 좌표계를 사용한 수치해석의 방법에 있어서 지배방정식에 생기는 특이성을 해결하고자 유한체적법(FVM)을 사용하고 엇갈림 격자계를 채용한다면 중심 축에서의 특이성은 피할 수 있다고 보고하였다.

Akselvoll & Moin⁽⁴⁾은 중심축 부근에서 원주방향으로 격자가 너무 조밀해 전체적인 계산과정에서 생기는 불안정성은 원주방향으로 암시적 방법(implicit method)을 채택하면 극복할 수 있다고 보고하였다.

본 연구는 회전유동에 대한 기초연구로서 회전하고 있는 액체 중에 바닥으로부터 수평 보텍스(vortex tube가 수평으로 놓여져 있다는 의미)를 회전축방향으로 쏘아 올렸을 때 그 보텍스의 거동이 회전의 효과에 따라 어떻게 달라지는지를 분석하고자 하는 것이다. 이러한 기본연구는

† 책임저자, 회원, 동아대학교 기계공학과

E-mail : yksuh@daunet.donga.ac.kr

TEL : (051)200-7648 FAX : (051)200-7656

* 동아대학교 대학원 기계공학과

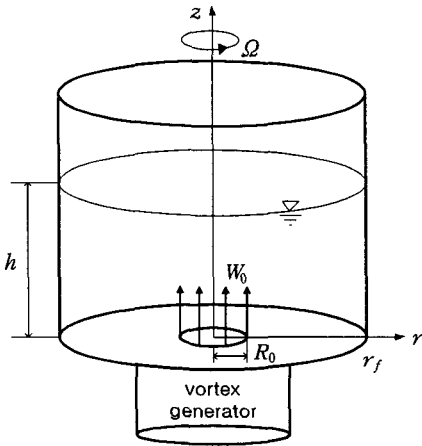


Fig. 1 Dimensionless coordinates and the vortex generator on the bottom wall

Ekman 분출 모델의 개발에 중요한 밑거름이 될 것으로 보인다.

2. 수치해석

2.1 지배방정식과 경계조건

본 연구의 유동모델은 Fig. 1에서 도시한 바와 같으며, 여기서는 축대칭 유동에 국한한다.

본 유동에 대한 무차원 지배방정식은 원주방향 무차원 와도 ζ 를 도입함으로써 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + \frac{2u}{\epsilon} \\ = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{u\zeta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial z} - \frac{2}{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial z} \\ = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) - \frac{\zeta}{r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \psi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r\zeta \quad (3)$$

여기서, 모든 변수는 무차원이다. 보텍스가 분사되는 바닥 노즐의 반경을 R_0 , 분출속도를 W_0 , 중심축의 회전각속도를 Ω 라 할 때, 시간은 R_0/W_0 로써 무차원화 하였으며, 공간좌표는 R_0 로, 속도는 W_0 로, 압력은 $\rho W_0 R_0 \Omega$ 로 각각 무차원

화한 것이다. 그리고, t 는 무차원 시간, (r, z) 는 축 단면상에서의 반경방향 및 축방향의 무차원 공간좌표, u, v, w 는 반경방향, 원주방향, 축방향 무차원 유속, ζ 는

$$\zeta = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

로 정의되는 원주방향 무차원 와도, ψ 는

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5)$$

로 정의되는 무차원 축대칭 유동함수이다. 그리고 파라미터 Re 와 ϵ 은 각각 레이놀즈 수와 로스비 수로서

$$Re = \frac{W_0 R_0}{\nu}, \quad \epsilon = \frac{W_0}{R_0 \Omega} \quad (6)$$

이다. 본 유동모델에서 나타나는 또 다른 무차원 파라미터는

$$h = \frac{H}{R_0}, \quad r_f = \frac{R_f}{R_0} \quad (7)$$

로서 각각 무차원 수심, 무차원 원통반경이다. 여기서 H 는 실제수심, R_f 는 원통의 실제반경이다.

경계조건은 보텍스 생성기의 노즐 입구를 제외한 바닥과 벽면에서는 비침투조건(impermeable condition)과 점착조건(no-slip condition)을 적용하였고, 자유표면에서는 경우에 따라 무응력조건(no-stress condition)과 점착조건을 병행하여 적용하였다.

2.2 수치해석 방법

지배방정식을 수치해석하기 위해 r 및 z 방향 공간을 등 간격으로 분할하고 미지의 변수 v, ζ 및 ψ 가 모두 한 점에서 정의되는 collocation grid를 채용한다.

지배방정식 및 경계조건들을 2차 order의 정밀도를 갖는 차분법으로 차분화 한다. 차분화된 산술식에 대해 와도 방정식은 시간적으로 정밀도가 높고 수치적으로 안정한 4계 Runge-Kutta법을 사용하여 적분한다. 그리고 유동함수 방정식은 추후 병렬계산을 염두에 두어 ICCG(Incomplete Cholesky Conjugate Gradient)방법으로 처리한다. 단, 주어진 시점에서의 유동함수의 초기치는 각

격자점에서

$$\psi^{(n+1)} = 2\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)} \quad (8)$$

의 외삽법을 적용함으로써 수렴을 가속시킨다. 단, 이 외삽법은 초기 유동장의 급격한 변동이 어느 정도 지난 시점(본 연구에서는 $t \geq 10\Delta t$ 의 시간영역)에서 적용하도록 한다.

수치해석의 결과와 실험결과와의 비교를 위해 바닥의 제트에 포함된 입자들이 시간과 더불어 어떻게 분산되는지를 수치적으로 추적한다. 이를 위해 제트가 분출되는 시간동안 제트노즐 출구 즉, $r \leq 1, z = 0$ 의 평면에서 r 방향으로 일정한 간격으로 100개의 입자들을 Δt_p 의 시간 간격마다 추가하여 내 보낸다. 각 입자의 임의의 시간 t 에서의 좌표 (r_p, z_p) 는 입자의 운동 방정식

$$\frac{dr_p}{dt} = u_p, \quad \frac{dz_p}{dt} = w_p \quad (9)$$

을 Euler법으로 풀어서 구한다. 단, 입자의 속도 u_p, w_p 는 유동장 내 각 격자점에서 얻어진 속도 성분으로부터 내삽법(Interpolation)의 원리에 의해 구한다. 수치해석은 회전효과가 없는 경우에는 $Re=1000, \epsilon=\infty, r_f=h=3$ 와 $Re=750, \epsilon=\infty, r_f=5, h=7.2$ 에 대하여 수치해석 하였으며, 회전효과가 있는 경우는 $Re=1000, r_f=h=4$ 일 때 $\epsilon=4.8$ 과 $\epsilon=3$ 에 대하여 수치해석 하였다. 무차원 시간(t)은 보텍스의 거동에 따라 10~40으로 조절하여 계산하였다.

3. 실험 장치 및 방법

3.1 실험장치

Fig. 2는 보텍스 링의 유동가시화를 위한 실험장치이다. 주 실험장치는 직경 25cm의 원통 용기와 그것을 둘러싼 직사각형 용기, 그리고 이들 하부에 부착된 보텍스 생성장치(vortex generator)로 구성된다. 원통 형태의 보텍스 생성장치의 상부에는 가시화용 원통 용기가 바로 연결되어 있고 그 사이에는 직경 5cm의 구멍이 뚫려져 있어 노즐의 역할을 한다. 보텍스 생성장치에 유입되는 가시화용 유체는 형광염료와 물을 혼합한 것으로 보텍스 생성장치의 하부 구멍으로 유입된다. 유입된 제트가 직접 노즐을 통해 상부의 가

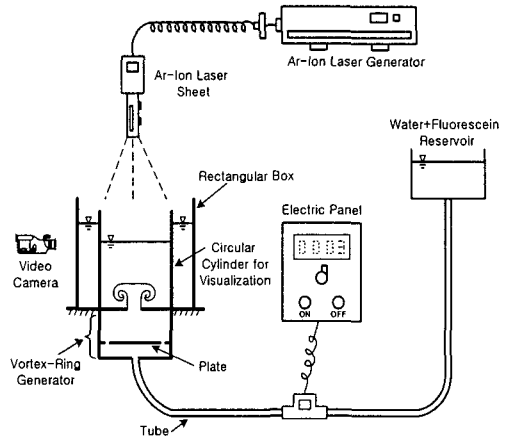


Fig. 2 Experimental apparatus for visualization of vortex ring

시화용 용기에 분출되는 것을 막기 위해 보텍스 생성장치의 하부에는 간막이를 설치하였으며 가장자리에 8개의 구멍을 뚫어 형광액의 출입을 자유롭게 하였다. 가시화용 형광액은 내경 0.8cm의 비닐 튜브를 통해 별도의 상부수조로부터 자연낙하의 원리에 의해 공급되도록 하였다. 연결 튜브의 중간에 차폐용(on-off) 전자밸브를 설치하여 일정한 시간동안만 형광액이 공급되도록 하였다.

3.2 실험방법

본 실험은 상부수조에서 형광염료(Fluorescein)를 혼합하는 것으로부터 시작된다. 만들어진 형광액은 연결 튜브를 통해 보텍스 생성장치로 공급된다. 공급되는 형광액의 유량을 정하기 위해, 원하는 상부수조의 높이에서 별도의 실험을 수행하여 수회에 걸쳐 유량을 측정하였으며, Moody 선도에 의한 관 마찰 계산을 통해 그 타당성을 확인하였다. 상부 수조의 높이 1m 정도에서는 개략적으로 3cm/s의 유속이 노즐로부터 만들어진 다. 수위가 노즐 위치까지 도달하였을 때 밸브를 닫고 노즐의 상부를 얇고 무거운 원판으로 막은 상태에서 가시화용 원통에 물을 주입한다. 촬영시 굴절효과를 없애기 위해 사각형 용기에도 물을 채운다. 원통 용기에 물을 채운 후 1시간 이상 대기한다. 이와 같이 오랜 시간 대기하는 이유는 가시화용 원통 용기에 형성된 유동을 잠재우고 상부 원통과 하부 원통의 액체의 온도가 서

로 같아지도록 하기 위해서이다. 상부와 하부 원통의 온도가 서로 다르면(하부의 온도가 더 낮다면) 밀도차에 따른 중력의 영향으로 상승하던 보텍스 링이 어느 지점에서 다시 하강하는 형상이 발견되었다. 그리고 레이저 광은 미리 오랫동안 비추어 두면 부분적으로 레이저 광을 받은 물이 자연대류 현상을 일으켜 물의 온도를 상승시키기 때문에 촬영 직전에 비추도록 하였다. 시간이 지나면 노즐을 막은 원판을 조심스레 치우고 약 5분 정도 뒤에 레이저 광을 비춘다. 그리고 3초동안 밸브를 열어 형광 액이 노즐을 통해 공급되도록 하고 보텍스 링의 거동을 녹화한다.

실험에서 사용된 각각의 조건들을 무차원화시켜 나타내면 다음과 같다; $Re=750$, $\epsilon=\infty$, $r_f=5$, $h=7.2$

4. 회전효과에 따른 수치해석 결과

본 연구의 초기 코드 개발과정에서 ICCG법의 성능을 비교 검증하기 위해 동일한 유동 파라미터에 대해 SOR법을 병행하여 적용하였다. 이 때, 사용된 파라미터는 다음과 같다;

$$Re=1000, \quad \epsilon=\infty, \quad r_f=h=3, \quad I \times J=301 \times 301, \\ t_0=1, \quad t_{end}=10, \quad \Delta t=0.005$$

위 조건에서 ICCG법은 SOR법에 비해 약 2배 정도로 계산시간이 절약된다. 다음에 나오는 결과들은 대부분 ICCG법을 적용하여 구한 결과들이다.

또한 해의 격자계에의 의존성을 조사하기 위해

$$Re=1000, \quad \epsilon=5, \quad r_f=h=2, \quad t_0=1, \\ t_{end}=10, \quad \Delta t=0.01$$

의 조건에서 격자계를 $I \times J=51 \times 51$, 101×101 , 201×201 의 세 가지로 바꾸어 수치해석 결과를 분석하였다. 이로부터 격자 간격은 $Re=1000$ 에서 $\Delta r=\Delta z=0.02$ 정도를 취하는 것이 타당함을 알 수 있었다. 그리고 보텍스의 활동범위에 따라 r_f 와 h 를 달리하였기 때문에 I 와 J 도 달라진다.

Fig. 3은 $Re=1000$, $\epsilon=\infty$ (회전효과가 0인 조건), $r_f=h=3$, $I \times J=301 \times 301$, $t_0=1$, $t_{end}=10$,

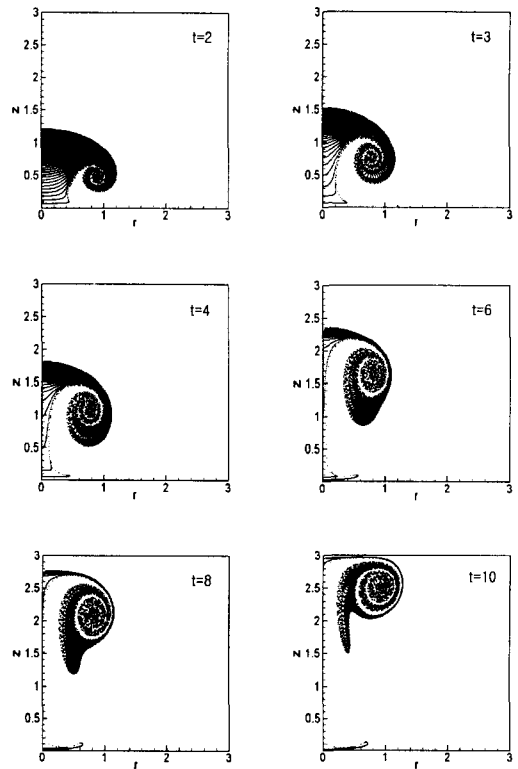


Fig. 3 Vortex ring ejected in the interval $0 \leq t \leq 1$ from the orifice on the bottom wall at $Re=1000$, $I \times J=301 \times 301$ and $\Delta t=0.001$ obtained by the SOR method with SOR factor 1.98

$\Delta t=0.001$ 의 조건에서 SOR법으로 구한 유동해를 입자의 분산으로 나타낸 것이다. 초기에 하부 벽면의 노즐 모서리($r=1, z=0$) 근처에서 서서히 상승하는 보텍스 링의 구조를 보면 뚜렷한 롤업(roll-up) 현상을 볼 수 있고, 특히 노즐에서 분출된 유체(검은 입자로 표시된 부분)의 줄기 사이사이에 주위의 유체가 흡입(entrainment)되는 현상을 파악할 수 있다. 또한 $t=8$ 부터는 링의 아래쪽으로 길쭉한 꼬리 모양의 입자들이 링의 이동을 따라가지 못하고 처지는 것도 발견할 수 있다. 이러한 꼬리 모양은 보텍스 링의 초기 거동에서 늘 관찰되고 있는 모양이다. $t=10$ 이후는 보텍스 링이 상부 자유표면을 따라 우측 구석으로 이동하는 형태를 보인다. 그러다가 우측 구

석부근에 오면 거의 정체되는 양상을 보인다.

Fig. 4는 회전효과가 있는 조건에서 수치해석한 결과로서 $Re=1000$, $\epsilon=4.8$, $r_f=h=4$, $I \times J=401 \times 401$, $t_0=2$, $t_{end}=20$, $\Delta t=0.01$ 에 대한 것이다. 이 계산에 소요된 시간은 PC에서 실시간으로 약 2시간이었다. 결과는 $t=7$ 까지는 회전효과 없는 경우와 유사하나 그 후는 상당히 다른 양상을 보인다. 전체적으로 크게 보았을 때 링은 측면 벽 쪽으로 이동하지 못하고 $r \leq 2$ 의 영역에 머무른다. 세부적으로 보면, $t=10$ 에서 링의 하단 부 입자들은 중심에 있는 정체영역에 흡수되고 링의 선단은 이전보다 더 빠른 거동과 변화를 거쳐 결국 2개의 링(pair)으로 나누어진

($t=19$ 때의 모양). 한편 중심부의 입자들은 처음에는 링과 더불어 위로 이동하지만 $t=12$ 이후부터는 빠른 동작으로 다시 아래로 내려온다. 노즐 출구 부근에서도 Fig. 3에서는 입자들이 거의 없으나 Fig. 4에서는 상당한 양이 모여 있다. 이는 보텍스 링의 분출 이후 회전의 영향으로 유동장에 관성진동(inertial oscillation)이 발생하였음을 입증하는 것이다.

Fig. 5는 회전효과가 약간 더 증가된 경우로서 $\epsilon=3$ 에 대한 결과이다. Fig. 4와는 달리 링의 선두부가 두 개의 링으로 나누어지지 않고 상부로지그-재그 모양으로 이동하기만 한다. 또한 링의 선두 부와 하부를 연결하는 기둥 모양은 관성진동의 영향으로 반경방향으로 흔들리는 모양이 된

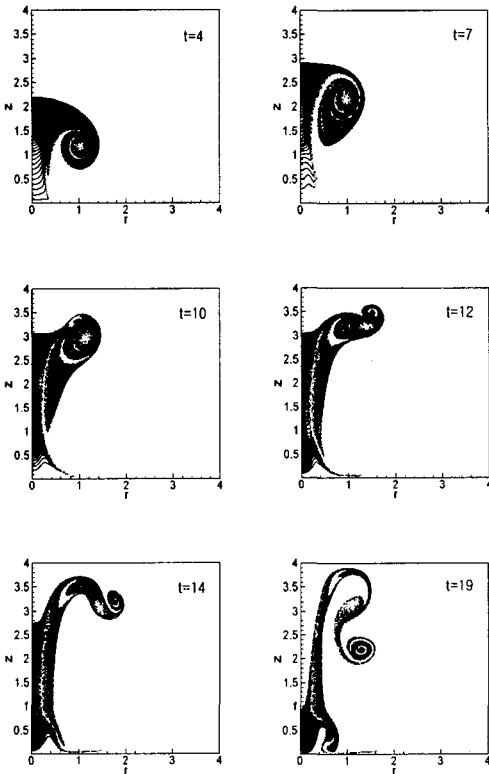


Fig. 4 Vortex ring ejected in the interval $0 \leq t \leq 2$ from the orifice on the bottom wall at $Re=1000$, $I \times J=401 \times 401$ and $\Delta t=0.01$ obtained by the D-ILU CG method with the Rossby number $\epsilon=4.8$

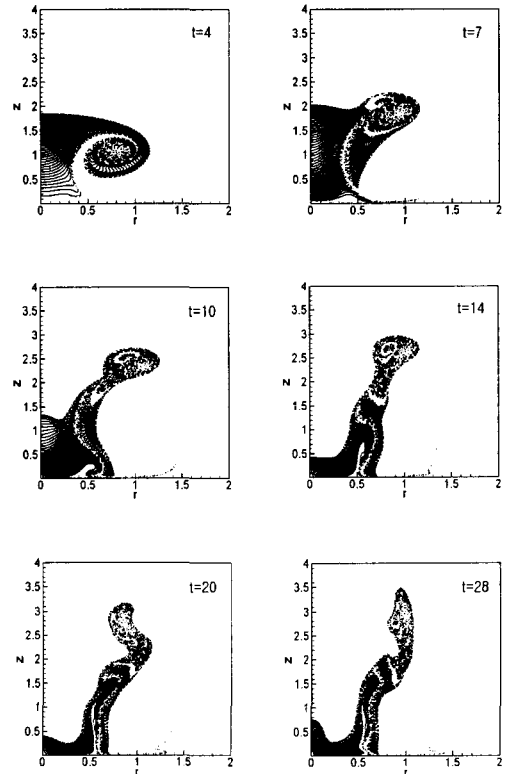


Fig. 5 Vortex ring ejected in the interval $0 \leq t \leq 1.2$ from the orifice on the bottom wall at $Re=1000$, $I \times J=251 \times 501$ and $\Delta t=0.01$ obtained by the D-ILU CG method with the Rossby number $\epsilon=3$

다. 회전효과가 더욱 증가하면 상부로 이동하는 입자의 수가 더욱 작아지고 링과 하부를 연결하는 기동도 더욱 가늘어진다. 결국 $\epsilon=1$ 에서는 입자들이 거의 $r \leq 1, z \leq 2$ 의 영역 내에 갇혀 제자리에서 진동하는 양상을 보인다. 이는 회전효과의 증대로 인해 수직방향의 유동이 억압되고 또한 절대 각 운동량(absolute angular momentum)이 매우 큰 측면 벽 쪽으로 유체 입자들이 진출하기가 어려워졌기 때문이다.

5. 회전효과가 없는 상태에서 실험결과와의 비교

Fig. 6은 회전효과가 없는 상태에서의 실험결과로서 노즐 출구에서의 유속은 3cm/s이며 수심은 18cm이고 노즐로부터의 분사시간은 3s로서,

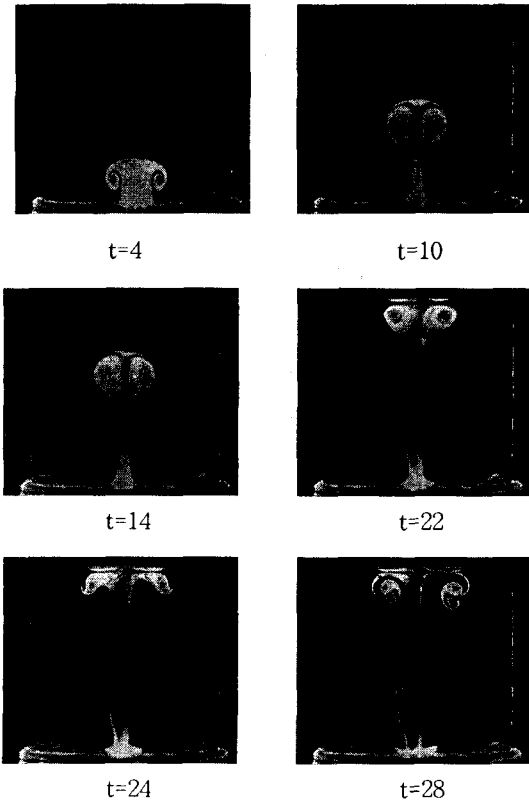


Fig. 6 Flow-visualization result for the dynamics of a vortex ring at $Re=750, \epsilon=\infty, r_f=5, h=7.2$ and $t_0=3.6$

무차원 파라미터로 한다면 $Re=750, \epsilon=\infty, r_f=5, h=7.2, t_0=3.6$ 에 대한 것이다. 보텍스는 $t=18$ 근처의 시점에서 상부 자유표면에 도달한다. 표면에 도달하기까지는 앞에서와 같은 보텍스의 말림 현상이 뚜렷이 포착되고 있으며 꼬리가 쳐지는 현상도 역시 잘 포착되었다. 그러나 특이한 현상은 보텍스 링이 자유표면에 도달하고 나서부터는 의외로 두 개의 보텍스 링으로 분기된다는 점이다. 이것은 자유표면에서의 전단응력이 강하게 작용하고 있음을 의미하며 자유표면에서의 전단응력을 자유표면의 특성(표면장력, 탄성 등)과 어떠한 형태로든지 연관지어야 함을 의미한다.

실험결과와의 비교를 위해, $Re=750, \epsilon=\infty, r_f=5, h=7.2, I \times J=201 \times 361, t_0=3.6, t_{end}=40$,

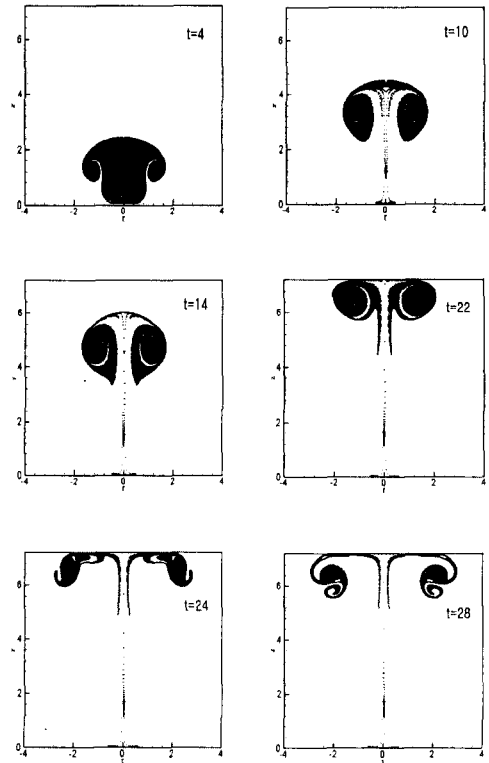


Fig. 7 Numerical-simulation result for the dynamics of a vortex ring at $Re=750, \epsilon=\infty, r_f=5, h=7.2$ and $I \times J=201 \times 361, t_0=3.6, t_{end}=40$ and $\Delta t=0.005$

$\Delta t = 0.005$ 의 파라미터 조건에서 구한 수치해석 결과가 Fig. 7이다. 이것은 자유표면에서 점착조건을 적용하여 구한 것으로서 이것을 실험결과인 Fig. 6과 비교하면 전반적으로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 한편 자유표면에서 무응력조건을 적용하면 $t = 24$ 이후 관찰되는 보텍스 링의 분기는 나타나지 않고 실험결과와 상당한 차이를 보인다. 이는 자유표면에서의 경계조건이 전체적인 수치해석 결과에 매우 큰 영향을 미친다는 것을 의미한다. 실제로 자유표면에서의 조건은 표면의 오염도에 민감하게 반응한다. 매우 세심한 주의를 기울이지 않으면 자유표면을 청정하게 유지한다는 것이 불가능하며, 이에 따라 진정한 의미의 무응력조건을 실제적으로 실현하기 힘든 조건으로 보인다.

6. 결 론

- (1) 수치해석 결과는 초기 보텍스 링의 말림 현상을 잘 보여주고 있다.
- (2) 회전효과가 없는 경우, 수치해석 결과는 보텍스 링의 하부 물질이 아래로 처지는 현상을 잘 재현하였다.
- (3) 회전효과가 있는 경우, 보텍스 링의 거동이 더 복잡해지며 경우에 따라서는 링의 선단이 두 개의 보텍스 링으로 나누어지는 현상이 발생하였다.
- (4) 더욱 높은 회전효과에서는 관성진동의 영향으로 보텍스 링의 전체 모양이 반경방향으로 진동하는 모양을 보이며 중심부에 있는 유체도 상하로 진동하는 양상을 보인다.

(5) 회전효과가 없는 상태에서 레이놀즈 수 750에 대한 가시화 실험을 성공리에 수행하였으며, 실험결과는 수치해석 결과와 잘 일치하였다.

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2002-041-D00080)

참고문헌

- (1) Verzicco, R., Olandi, P., Eisenga, A. H. M., Van Heijst, G. J. F. and Carnevale, G. F., 1996, "Dynamics of a Vortex Ring in a Rotating Fluid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 364, pp. 215~239.
- (2) Verzicco, R., Eisenga, A. H. M. and Van Heijst, G. J. F., 1998, "Dynamics of a Vortex Ring Moving Perpendicular to the Axis of a Rotating Fluid," *J. Fluid Mech.*, Vol. 354, pp. 69~100.
- (3) Verzicco, R. and Olandi, P., 1996, "A Finite-Difference Scheme for Three-Dimensional Incompressible Flows in Cylindrical Coordinates," *J. Comput. Phys.*, Vol. 123, pp. 402~414.
- (4) Akselvoll, K. and Moin, P., 1996, "An Efficient Method for Temporal Interation of the Navier-Stokes Equations in Confined Axisymmetric Geometries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 454~463.
- (5) Rambod, E., Gharib, M. and Shariff, K., 1998, "A Universal Time Scale for Vortex Ring Formation," *J. Fluid Mech.*, Vol. 360, pp. 121~140.