

기저 함수의 대칭성을 이용한 저니키 모멘트의 효율적인 계산 방법

(An Efficient Computation Method of Zernike Moments Using Symmetric Properties of the Basis Function)

황 선 규 [†] 김 희 율 ^{**}
(Sun-Kyoo Hwang) (Whoi-Yul Kim)

요 약 저니키 모멘트(Zernike moment)는 영상의 표현 능력이 뛰어나기 때문에 객체 인식 또는 내용 기반 영상 검색 시스템에서 많이 사용되었으나, 정의식이 복잡하기 때문에 많은 연산량을 필요로 하는 단점이 있다. 저니키 모멘트를 빠르게 계산하는 기존의 방법들은 주로 1차원 실수 방식 다항식을 빠르게 계산하는 방법에 중점을 두었다. 본 논문에서는 저니키 복소 기저 함수의 대칭성을 유도하여 저니키 기저 함수를 빠르게 계산하고 입력 영상으로부터 저니키 모멘트를 효율적으로 추출하는 방법을 제안한다. 제안하는 방법은 저니키 기저 함수 계산에 필요한 연산량을 기존 방법의 약 20%로 줄이고, 저니키 모멘트 추출에 필요한 곱셈 연산을 25%로 감소시킨다. 또한, 저니키 모멘트를 특징 벡터로 이용하는 시스템 구현 시 필요한 메모리 요구량도 기존 방법의 25%만을 필요로 한다. 제안하는 방법은 회전 모멘트, 의사 저니키 모멘트, ART(Angular Radial Transform) 등의 계산에도 같은 방식으로 적용될 수 있다.

키워드 : 저니키 모멘트, Zernike moment, 대칭성, 빠른 계산법, ART

Abstract A set of Zernike moments has been successfully used for object recognition or content-based image retrieval systems. Real time applications using Zernike moments, however, have been limited due to its complicated definition. Conventional methods to compute Zernike moments fast have focused mainly on the radial components of the moments. In this paper, utilizing symmetric/anti-symmetric properties of Zernike basis functions, we propose a fast and efficient method for Zernike moments. By reducing the number of operations to one quarter of the conventional methods in the proposed method, the computation time to generate Zernike basis functions was reduced to about 20% compared with conventional methods. In addition, the amount of memory required for efficient computation of the moments is also reduced to a quarter. We also showed that the algorithm can be extended to compute the similar classes of rotational moments, such as pseudo-Zernike moments, and ART descriptors in same manner.

Key words : Zernike moments, symmetry, anti-symmetry, fast method, ART

1. 서 론

모멘트는 영상의 특징을 수치적으로 표현하는 방법 중의 하나이다[1]. 특히 2차원 영상으로부터 추출된 저니키 모멘트는 영상의 표현 능력이 뛰어나고 회전에 불변한 특성을 가지고 있기 때문에 패턴 인식 시스템 또는 내용 기반 영상 검색 시스템에서 특징 벡터로써 널리 사용되었다[2-4]. Teh에 의하면 저니키 모멘트는 기

하(geometrical) 모멘트, 리젠드리(Legendre) 모멘트, 의사 저니키(pseudo-Zernike) 모멘트, 회전(rotational) 모멘트, 복소(complex) 모멘트 등에 비하여 잡음에 대한 강인성, 정보의 중복성, 패턴 표현 능력에 있어서 훨씬 뛰어난 성능을 가지고 있다[5]. 일반적으로 저니키 모멘트는 1차원 실수 방식 다항식으로부터 구해진 2차원 복소 기저 함수에 입력 영상을 투영시켜서 구하게 된다. 그러나, 저니키 모멘트는 정의식이 복잡하기 때문에 연산 시간이 오래 걸리는 단점이 있다.

이러한 단점을 보완하기 위하여 저니키 모멘트를 빠르게 계산하는 방법들이 다수 연구 되었다. Mukundan은 경계선 적분(contour integration) 방법과 사각형-원

[†] 비 회 원 : 한양대학교 전자통신전파공학과
kkokkal@vision.hanyang.ac.kr

^{**} 종신회원 : 한양대학교 전자전기공학부 교수
wykim@hanyang.ac.kr

논문접수 : 2003년 5월 7일
심사완료 : 2004년 2월 12일

형 변환(square-to-circular transformation) 방법을 제안하였다[6]. 그러나, 경계선 적분 방법은 이진 영상에만 적용 가능하고, 사각형-원형 변환은 부정확한 저니키 모멘트를 생성한다. Belkasim은 저니키 방사 다항식을 확장하여 중복된 연산을 일부 제거함으로써 속도 향상을 이루었다[7]. 그러나, 이 방법은 실수 방사 다항식에 여전히 계승(factorial) 연산이 다수 존재하기 때문에 많은 속도 향상을 기대하기 어렵다. Prata, Kintner, Chong은 1차원 저니키 실수 방사 다항식의 재귀적 관계를 유도하여 계승 연산을 줄이는 방법을 제안하였다[8-10]. 이 중 Chong이 제안한 *q*-recursive 방법은 Belkasim, Prata, Kintner의 방법과 비교하여 가장 좋은 연산 능력을 나타내며, 특히 특정 차수의 저니키 모멘트만을 구하는데 유리한 장점을 가지고 있다. 그러나, 이러한 방법들은 모두 1차원 저니키 다항식을 빠르게 구하는 방법으로써, 2차원 저니키 기저 함수의 생성과 입력 영상으로부터 저니키 모멘트 추출에 필요한 연산은 고려하고 있지 않다. 1차원 저니키 실수 방사 다항식으로부터 2차원 저니키 복소 기저 함수를 생성하기 위해서는 다수의 삼각함수와 곱셈 연산을 필요로 하기 때문에 이 부분에 대한 연산량 감소 또한 필요하다.

본 논문에서는 2차원 저니키 모멘트 기저 함수의 대칭성을 유도하고, 이를 이용하여 저니키 모멘트를 빠르고 효율적으로 계산하는 방법을 제안한다. 저니키 모멘트의 기저 함수는 2차원 직교 좌표계 상에서 *x*축, *y*축, 원점, 그리고 직선 *y=x*에 대하여 특정한 대칭성을 가지고 있기 때문에 이를 이용하면 1사분면에 해당하는 저니키 모멘트 기저 함수만을 계산함으로써 2, 3, 4사분면 상의 기저 함수 값을 구할 수 있다. 이러한 대칭성을 효과적으로 이용함으로써 입력 영상으로부터 저니키 모멘트를 계산하는데 필요한 곱셈 연산을 최소화하는 방법 또한 제시한다. 제안하는 방법을 사용하여 실제 영상 검색 시스템을 구현할 경우, 저니키 기저 함수를 저장하는데 필요한 메모리 요구량을 기존의 방법의 25% 만을 사용하여 구현할 수 있다. 이러한 대칭성을 이용한 빠른 계산 방법은 회전 모멘트, 의사 저니키 모멘트, 그리고 ART(Angular Radial Transform) 등의 계산에도 같은 방식으로 적용될 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 저니키 모멘트에 대한 상세한 설명과 저니키 모멘트를 빠르게 계산하는 기존의 방법들에 대한 설명을 한다. 3장에서는 저니키 모멘트 기저 함수의 대칭 특성을 유도하고, 4장에서는 유도된 대칭성을 이용하여 빠르고 효율적으로 저니키 모멘트를 계산하는 방법을 제시한다. 5장에서는 실험 결과를 제시하고, 6장에서 결론을 내린다.

2. 저니키 모멘트

2.1 저니키 모멘트의 정의와 특징

차수(order)가 *n*이고 반복수(repetition)가 *m*인 저니키 기저 함수 $V_{nm}(x,y)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$V_{nm}(x,y) = V_{nm}(\rho, \theta) = R_{nm}(\rho) \exp(jm\theta) \quad (1)$$

여기서 *n*은 0 또는 양의 정수이고, *m*은 $n - |m| = (\text{짝수})$ 와 $|m| \leq n$ 을 만족하는 정수이다. ρ 는 원점에서 점 (*x, y*)까지의 거리이며, $0 \leq \rho \leq 1$ 의 범위에서 유효하다. θ 는 점 (*x, y*)가 *x*축과 이루는 각의 크기를 나타낸다.

저니키 실수 방사 다항식, $R_{nm}(\rho)$,은 다음과 같이 정의된다.

$$R_{nm}(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \binom{n+|m|}{2-s} \binom{n-|m|}{2-s}} \rho^{n-2s} \quad (2)$$

위 식은 $R_{n,-m}(\rho) = R_{nm}(\rho)$ 을 만족한다. 그림 1은 차수가 0에서 5까지 변할 때, 반복수가 0 또는 1인 저니키 실수 방사 다항식의 모양을 보여준다.

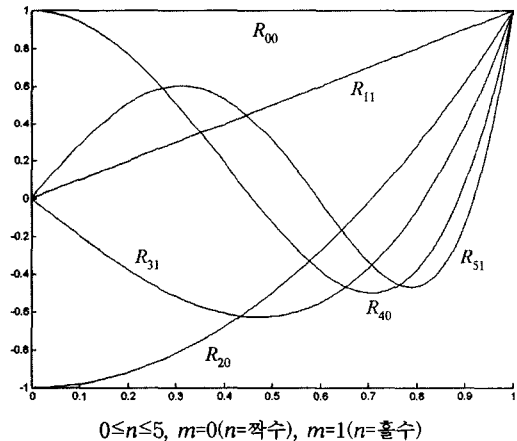


그림 1 차수가 0~5 사이인 저니키 실수 방사 다항식의 예

저니키 기저 함수 $V_{nm}(x,y)$ 는 $x^2 + y^2 \leq 1$ 인 단위원 안에서 직교하는 성질을 가지며 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} V_{nm}^*(x,y) V_{pq}(x,y) dx dy = \begin{cases} \frac{\pi}{n+1} & \text{if } n=p, m=q \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

기저 함수의 직교성은 각각의 모멘트간에 정보의 중복이 없음을 의미한다. 이러한 특징은 차수가 다른 저니키 모멘트는 영상의 고유한 특징을 반영함을 나타내고, 적은 개수의 저니키 모멘트로 영상의 특징을 효과적으로 표현할 수 있음을 의미한다.

차수가 n 이고 반복수가 m 인 저니키 모멘트 Z_{nm} 은 다음과 같이 정의된다.

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x,y) V_{nm}^*(x,y) dx dy \quad (4)$$

여기서 *는 복소 공액을 나타낸다. 본질적으로 저니키 모멘트는 입력 영상의 저니키 기저 함수로의 투영으로 간주할 수 있다.

실제 입력 영상에 대하여 저니키 모멘트를 구하기 위해서는 영상을 원점을 중심으로 하는 단위원 크기로 정규화해야 한다. 이산 영상에 대하여 저니키 모멘트를 구하기 위해서, 다음과 같이 저니키 모멘트 식을 근사화할 수 있다[10].

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \sum_x \sum_y f(x,y) V_{nm}^*(x,y) \quad x^2 + y^2 \leq 1 \quad (5)$$

2.2 q-recursive 방법

저니키 모멘트는 그 정의식이 복잡하기 때문에 대용량 영상 검색 시스템에서 사용되기에는 제약이 있었다. 그러므로 저니키 모멘트를 빠르게 계산하는 방법들에 대한 연구가 다수 진행되었다. 그 중에서 Chong은 [10]에서 q-recursive 방법을 제안하였다.

q-recursive 방법은 저니키 방식 다항식 $R_{nm}(\rho)$ 을 $R_{n,m-2}(\rho)$ 와 $R_{n,m-4}(\rho)$ 의 조합으로 표현함으로써 중복되는 연산을 제거하였다.

$$R_{n,m-4}(\rho) = H_1 R_{nm}(\rho) + (H_2 + H_3 / \rho^2) R_{n,m-2}(\rho) \quad (6)$$

여기서 계수 H_1, H_2, H_3 각각은 다음과 같이 정의된다.

$$H_1 = \frac{m(m-1)}{2} - mH_2 + \frac{H_3(n+m+2)(n-m)}{8}$$

$$H_2 = \frac{H_3(n+m)(n-m+2)}{4(m-1)} + (m-2)$$

$$H_3 = \frac{-4(m-2)(m-3)}{(n+m-2)(n-m+4)}$$

Chong에 의하면 q-recursive 방법은 기존의 저니키 모멘트를 빠르게 계산하는 방법인 Belkasim, Prata, Kintner 등의 방법에 비하여 가장 빠르게 저니키 방식 다항식을 구한다. 또한, q-recursive 방법은 특정 차수의 저니키 모멘트만을 구하는 경우에 유리하다는 장점이 있다.

그러나, Chong의 방법은 오직 저니키 방식 다항식만을 빠르게 하는 방법이라고 할 수 있다. 저니키 모멘트를 구하기 위해서는 저니키 방식 다항식을 빠르게 구하는 것도 중요하지만, 이로부터 2차원 저니키 복소 기저 함수의 생성과 입력 영상과의 투영 연산을 통하여 저니키 모멘트 값을 빠르게 추출하는 것 또한 중요하다. 그러므로, 다음 장에서는 저니키 복소 기저 함수의 특성에 대하여 분석하고, 4장에서는 이를 이용하여 저니키 모멘

트를 빠르게 계산하는 방법을 소개한다.

3. 저니키 기저 함수의 대칭성

1사분면에 위치한 점 $P(a, b)$ 에 대하여 x 축, y 축, 원점, 그리고 직선 $y=x$ 에 대한 대칭점의 좌표를 그림 2에 나타내었다.

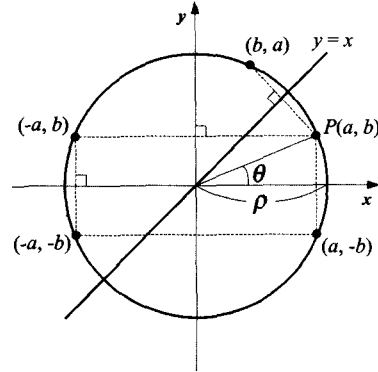


그림 2 직각 좌표계 상에서 점 $P(a, b)$ 의 대칭점 좌표

이들 대칭점들은 모두 원점과의 거리 ρ 가 동일하다. 점 $P(a, b)$ 가 x 축과 이루는 각(위상)을 θ 라고 할 때, 각 대칭점들이 x 축과 이루는 각을 π 와 θ 를 이용하여 표현할 수 있고, 이를 표 1에 정리하였다.

표 1 점 $P(a, b)$ 의 대칭점에서의 위상

대칭축	좌표	$\tan^{-1}(y/x)$
$y=x$	(b, a)	$\frac{\pi}{2} - \theta$
x 축	$(a, -b)$	$-\theta$
y 축	$(-a, b)$	$\pi - \theta$
원점	$(-a, -b)$	$\pi + \theta$

차수가 n 이고 반복수가 m 인 저니키 모멘트의 기저 함수는 복소 평면에서 정의되므로, 이를 실수부와 허수부로 나누면 다음과 같다.

$$V_{nm}(x, y) = VR_{nm}(x, y) + jVI_{nm}(x, y)$$

$$\begin{cases} VR_{nm}(x, y) = R_{nm}(\rho) \cos(m\theta) \\ VI_{nm}(x, y) = R_{nm}(\rho) \sin(m\theta) \end{cases} \quad (7)$$

여기서 $j = \sqrt{-1}$ 이고, $VR_{nm}(x, y)$ 과 $VI_{nm}(x, y)$ 는 각각 $V_{nm}(x, y)$ 의 실수부와 허수부를 나타낸다.

표 1에서 제시한 대칭점들은 모두 동일한 ρ 값을 가지므로 $R_{nm}(\rho)$ 또한 동일하다. 즉, 표 1에 존재하는 점들의 저니키 기저 함수의 값은 $\cos(m\theta)$ 와 $\sin(m\theta)$ 에 의해 다르게 나타난다. 여기서 $\cos(\cdot)$ 과 $\sin(\cdot)$ 함수는 2π 를 주기로 갖는 주기 함수로써, 표 1에서 제시한 대

칭점의 위상에 대하여 특정한 대칭적 성질을 갖는다. 본 논문에서는 이러한 대칭성을 $m = 2k$ 인 경우와 $m = 2k+1$ 인 경우로 나누어 그 특성을 살펴본다.

3.1 $m = 2k(k = 0, 1, 2, \dots)$ 인 경우의 대칭성

$m = 2k$ 인 경우, 1사분면에 위치한 점 (x, y) 에서의 저니키 기저 함수의 실수부와 허수부는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} VR_{nm}(x, y) &= R_{nm}(\rho) \cos(2k\theta) \\ VI_{nm}(x, y) &= R_{nm}(\rho) \sin(2k\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 점 (x, y) 대신에 표 1에서 제시한 대칭점들을 대입할 경우, 각 대칭점에서의 저니키 기저 함수의 값은 위의 식을 이용하여 표현할 수 있다. 예를 들어, y 축에 대하여 대칭인 점 $(-x, y)$ 의 경우, $R_{nm}(\rho)$ 은 동일하고, 삼각함수 부분만 다르게 나타난다. 기저 함수의 실수부는 $\cos(2k\pi - 2k\theta) = \cos(2k\theta)$ 으로 변환할 수 있고, 허수부는 $\sin(2k\pi - 2k\theta) = -\sin(2k\theta)$ 으로 변환된다. 이와 같은 방식으로 표 1에 제시된 x 축, y 축, 원점에 대한 대칭점에서의 저니키 기저 함수의 계산식을 식 (8)의 형태로 전개하면 식 (9)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} VR_{nm}(-x, y) &= VR_{nm}(x, y) \\ VI_{nm}(-x, y) &= -VI_{nm}(x, y) \\ VR_{nm}(-x, -y) &= VR_{nm}(x, y) \\ VI_{nm}(-x, -y) &= VI_{nm}(x, y) \\ VR_{nm}(x, -y) &= VR_{nm}(x, y) \\ VI_{nm}(x, -y) &= -VI_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

$m = 2k$ 인 경우의 저니키 모멘트 기저 함수 일부를 그림 3에 2차원 영상의 형태로 나타내었다. 각각의 영상은 저니키 기저 함수가 가질 수 있는 값의 범위 $[-1, +1]$

을 그레이스케일 영상이 가지는 값의 범위 $[0, 255]$ 로 맵핑하여 생성하였다. 각각의 영상에서 단위원 이외의 부분은 저니키 기저 함수에서 고려하지 않는 부분이므로 $V_{nm}(x, y) = 0$ 으로 설정하였다. 그림을 통하여 저니키 기저 함수의 x 축, y 축, 원점에 대한 대칭성을 확인할 수 있다.

$m = 2k$ 인 경우 직선 $y = x$ 에 대한 대칭적인 성질을 추가로 찾을 수 있다. 그림 3에서 확인할 수 있듯이, $m = 2(2k) = 4k$ 인 경우는

$$\begin{aligned} VR_{nm}(y, x) &= VR_{nm}(x, y) \\ VI_{nm}(y, x) &= -VI_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (10)$$

을 만족하고, $m = 2(2k + 1) = 4k + 2$ 인 경우는

$$\begin{aligned} VR_{nm}(y, x) &= -VR_{nm}(x, y) \\ VI_{nm}(y, x) &= VI_{nm}(x, y) \end{aligned} \quad (11)$$

와 같은 특성을 나타낸다.

그러므로, $m = 2k$ 인 경우, 저니키 기저 함수의 위상 θ 가 0° 에서 45° 인 영역만 공식대로 구하고, 나머지 영역은 대칭성을 이용하여 빠르게 구할 수 있다. 즉, $m = 2k$ 인 경우, 제안하는 방법은 기존의 방법에 비하여 $1/8$ 의 연산만으로 저니키 기저 함수 전체를 구할 수 있다.

3.2 $m = 2k + 1(k = 0, 1, 2, \dots)$ 인 경우

$m = 2k + 1$ 인 경우, 점 (x, y) 에서의 저니키 기저 함수의 실수부와 허수부는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} VR_{nm}(x, y) &= R_{nm}(\rho) \cos(2k\theta + \theta) \\ VI_{nm}(x, y) &= R_{nm}(\rho) \sin(2k\theta + \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 점 (x, y) 대신에 표 1에서 제시한 대칭점들을 대입할 경우, $\cos(\cdot)$ 함수와 $\sin(\cdot)$ 함수의 주기적 성질로

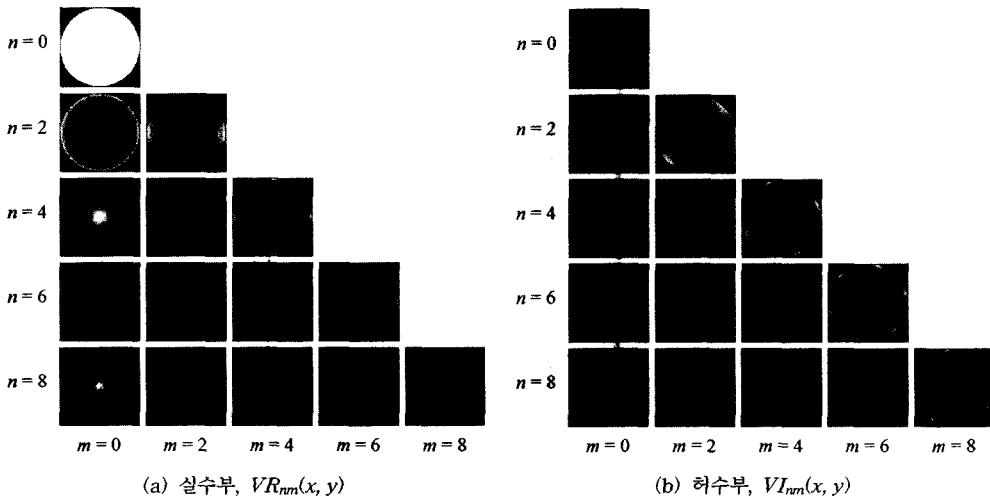


그림 3 $m = 2k$ 인 경우의 저니키 기저 함수의 예

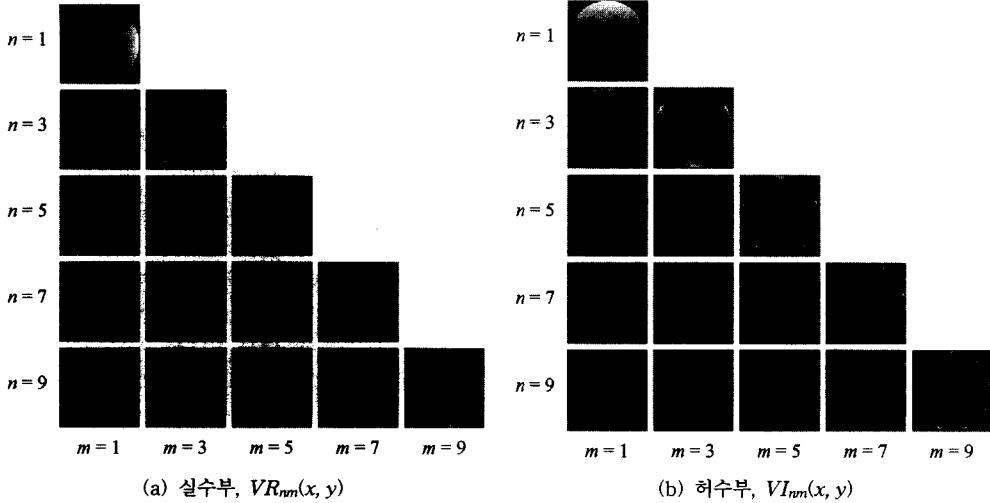


그림 4 $m = 2k + 1$ 인 경우의 저니키 기저 함수의 예

인하여 식 (13)과 같은 형태로 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 VR_{nm}(-x, y) &= -VR_{nm}(x, y) \\
 VI_{nm}(-x, y) &= VI_{nm}(x, y) \\
 VR_{nm}(-x, -y) &= -VR_{nm}(x, y) \\
 VI_{nm}(-x, -y) &= -VI_{nm}(x, y) \\
 VR_{nm}(x, -y) &= VR_{nm}(x, y) \\
 VI_{nm}(x, -y) &= -VI_{nm}(x, y)
 \end{aligned} \quad (13)$$

그림 4는 $m = 2k + 1$ 인 경우의 저니키 모멘트 기저 함수를 2차원 이미지의 형태로 나타낸 것이다. 그림 3과 마찬가지로 저니키 기저 함수의 값의 범위 $[-1, +1]$ 를 그레이스케일 범위 $[0, 255]$ 로 매핑하여 나타내었고, 일정한 형태의 대칭성을 발견할 수 있다.

$m = 2k + 1$ 인 경우는 $y = x$ 에 대한 대칭성을 찾을 수 없다. 그러므로, $m = 2k + 1$ 인 경우에는 저니키 기저 함수의 위상 θ 가 0° 에서 90° 인 영역만 공식대로 구하고, 나머지 영역은 대칭성을 이용하여 빠르게 구할 수 있다. 즉, 1/4의 연산만으로 전체 저니키 기저 함수를 구할 수 있다.

3.3 연산량 감소

$m = 2k$ 인 경우, 공식에 의해 저니키 기저 함수를 구하는 영역은 1/8로 감소하고, $m = 2k + 1$ 인 경우는 1/4 영역으로 감소한다. 나머지 영역은 모두 식 (9)와 (13)의 대칭성을 이용하여 구할 수 있다. 그러므로, 차수 0부터 임의의 홀수 차수까지 저니키 기저 함수를 구하는 경우 기존 방법의 $3/16 \approx 18.75\%$ 의 영역에 대한 연산만으로 전체 저니키 기저 함수를 구할 수 있다.

4. 빠르고 효율적인 저니키 모멘트 계산

3장에서 저니키 모멘트 기저 함수 정의식으로부터 대

칭성을 유도하고 실제 그림을 통하여 대칭성을 확인하였다. 이 장에서는 이러한 대칭성을 이용하여 입력 영상에서 저니키 모멘트를 빠르고 효율적으로 추출하는 방법에 대하여 설명한다.

4.1 대칭성을 이용한 저니키 모멘트 계산

입력된 영상으로부터 저니키 모멘트를 구하는 과정은 실제로 정규화된 영상을 저니키 기저 함수에 투영하여 그 값을 구하는 과정이다. 기존의 방법에서는 1~4사분면에 존재하는 모든 픽셀에 대하여 저니키 기저 함수와 곱하는 과정이 필요하다. 그러나, 3장에서 제시한 대칭성을 이용하면 2, 3, 4사분면의 저니키 기저 함수의 값은 1사분면에 위치한 저니키 기저 함수의 값으로부터 구할 수 있다. 이 절에서는 1사분면의 저니키 기저 함수를 이용하여 입력 영상에서 정확한 저니키 모멘트를 추출하는 방법에 대하여 기술한다.

식 (4)의 저니키 모멘트 정의식은 다음과 같이 복소수 형태로 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Z_{nm} &= \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(x, y) [VR_{nm}(x, y) - jVI_{nm}(x, y)] dx dy \\
 &= \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [VR_{nm}(x, y)f(x, y) - jVI_{nm}(x, y)f(x, y)] dx dy \quad (14)
 \end{aligned}$$

3장에서 기술한 바와 같이, $VR_{nm}(x, y)$ 과 $VI_{nm}(x, y)$ 은 반복수 m 이 짝수 또는 홀수인 경우 특정한 대칭성을 갖는다. $m = 2k$ 인 경우, 식 (9)에 기술되어있는 대칭성을 이용하여 위의 식 (14)을 다음과 같은 형태로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$Z_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \begin{bmatrix} \{f(x, y) + f(-x, y) + f(-x, -y) + f(x, -y)\} VR_{nm}(x, y) \\ - \{f(x, y) - f(-x, y) + f(-x, -y) - f(x, -y)\} VI_{nm}(x, y) \end{bmatrix} dx dy \quad (15)$$

이와 마찬가지로, $m = 2k + 1$ 인 경우, 식 (13)에 기술

된 대칭성을 이용하여 식 (14)을 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$Z_m = \frac{n+1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left[\begin{aligned} & \{f(x,y) - f(-x,y) - f(-x,-y) + f(x,-y)\} V_{R_m}(x,y) \\ & - \{f(x,y) + f(-x,y) - f(-x,-y) - f(x,-x)\} V_{I_m}(x,y) \end{aligned} \right] dx dy \quad (16)$$

식 (15)와 (16)에서 적분 구간의 변화를 주목해야한다. 식 (15)과 (16)를 이용하여 저니키 기저 함수를 계산할 경우, 식 (14)에 비하여 덧셈 연산은 동일한 상황에서 곱셈 연산의 횟수가 25%로 감소하는 것을 볼 수 있다. 제안하는 방법을 이용하여 저니키 모멘트를 구하는 방법을 그림 5에 도식화하였다.

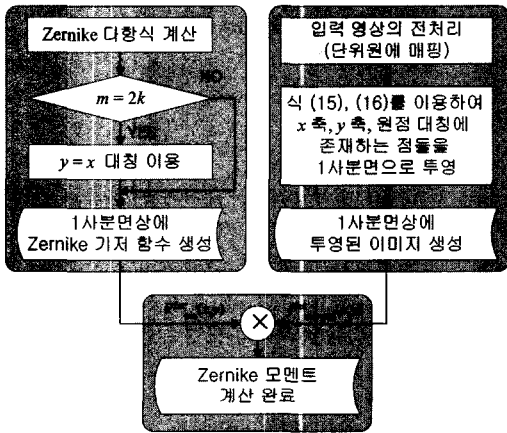


그림 5 제안하는 빠른 저니키 모멘트 계산 방법

4.2 메모리 요구량

Kim은 실용적인 패턴 인식 시스템을 구축하기 위하여 저니키 기저 함수를 2개의 테이블에 저장하는 방법을 사용하였다[11]. 여러 개의 영상에 대하여 저니키 모멘트를 구하는 경우, 맨 처음 한번만 저니키 모멘트 기저 함수를 계산하여 이를 테이블에 저장하고, 나머지 영상에 대해서는 테이블에 저장된 값을 사용하는 방법이다. 그러나, 저니키 모멘트를 차수 12까지 구하는 경우 모두 49개 형태의 저니키 기저 함수를 구해야 하며, 테이블의 크기는 단위원을 양자화한 크기가 클 수록 많은 메모리를 사용하게 된다. 저니키 모멘트의 보다 높은 차수까지 구하는 경우, 메모리의 요구량은 더욱 커지게 되

고, 또한 실수부와 허수부를 따로 저장해야하기 때문에 저사양 시스템에서는 큰 부담이 된다.

본 논문에서 제안하는 방법을 사용할 경우, 그림 5에서 도식화한 것과 같이, 2차원 저니키 기저 함수의 1사분면에 해당하는 값만을 사용하여 입력 영상으로부터 저니키 모멘트를 구할 수 있다. 그러므로, 실용적인 시스템에서 저니키 기저 함수의 값을 테이블에 저장하여 사용할 경우, 시스템 구현에 필요한 메모리를 기존 방법의 25%로 감소시킬 수 있으므로, 저사양을 요구하는 시스템에서도 원활하게 동작할 수 있다.

4.3 회전 모멘트, 의사 저니키, ART 계산에 응용

회전 모멘트와 의사 저니키 모멘트, ART 는 모두 회전 불변의 특징을 가지고 있다[1,13]. 특히 Kim[13]이 정의한 ART는 cos과 sin 함수로 이루어진 실수 방사다항식을 이용하여 패턴의 모양을 기술하는데 탁월한 성능을 나타내며, 현재 MPEG-7의 영역 기반 모양 기술자(Region-based shape descriptor) 부분의 표준으로 선정되었기 때문에, 앞으로 많은 활용을 예상할 수 있다. ART는 모두 다수의 삼각함수 연산과 곱셈 연산을 포함하고 있으나, 아직까지 빠른 계산 알고리즘이 발표되어있지 않다.

이들은 기저 함수 정의식에 모두 회전 불변 특성을 위한 exp(jmθ)항을 갖고 있기 때문에 3장에서 설명한 2차원 기저 함수의 대칭성을 그대로 따른다. 따라서, 방사다항식이 구해진 상태에서 본 장에서 제안한 빠른 계산 알고리즘을 그대로 적용하여 의사 저니키와 ART를 빠르게 계산할 수 있다.

5. 실험 결과

제안한 방법의 성능을 평가하기 위하여 정의식에 의한 방법, q-recursive 방법, 그리고 본 논문에서 제안한 방법을 각각 사용하여 저니키 모멘트를 생성하고 그 시간을 측정해보았다. 이 때, 영상의 크기는 101×101 크기의 그레이스케일 영상을 사용하였다. q-recursive 방법은 저니키 모멘트 계산의 전체 과정에서 오직 저니키 방사다항식을 빠르게 계산하는 방법이고, 제안하는 방법은 저니키 방사다항식으로부터 저니키 기저 함수와 저니키 모멘트를 생성하는 방법이므로 이를 따로 나누

표 2 제안한 방법과 q-recursive 방법의 연산 시간 비교 (단위: 초)

	q-recursive 제안한 방법			
	1.142	1.094	0.214	0.204
	3.808	3.612	0.770	0.707
	8.175	7.737	1.664	1.506
	14.243	13.402	3.066	2.675

어 시간을 계산하였다. 실험은 Pentium III 800MHz인 PC에서 이루어졌으며, 그 결과를 표 2에 나타내었다.

표 2는 입력 영상에 대하여 차수가 0부터 지정된 차수까지의 모든 저니키 모멘트를 모두 구하는데 걸린 시간을 나타낸다. 실험 결과 제안한 방법을 사용하여 저니키 모멘트를 계산하였을 경우, 평균적으로 약 20%의 연산 시간을 필요로 하였다. 그러나, q -recursive 방법만을 사용하였을 경우에는 거의 시간 단축의 효과를 찾을 수 없었다. 제안하는 방법과 q -recursive 방법을 같이 사용하는 경우 정의식에 의한 방법의 약 18%의 연산만으로 정확한 저니키 모멘트를 생성할 수 있었다.

6. 결론

본 논문에서는 빠르고 효율적인 저니키 모멘트 계산 방법을 제안하였다. 제안한 방법은 1차원 저니키 방사 다항식으로부터 2차원 저니키 기저 함수를 빠르게 생성하는 방법과 입력 영상으로부터 빠르고 효율적으로 저니키 모멘트를 구하는 방법을 포함한다. 본 논문에서는 저니키 기저 함수의 대칭성을 유도하였고, 이를 이용하여 중복되는 계산을 제거함으로써 저니키 모멘트 생성에 필요한 연산 속도를 획기적으로 감소시켰다. 또한 시스템 구현에 필요한 메모리 요구량을 줄임과 동시에 곱셈 연산 횟수를 줄이는 매우 효율적인 방법을 제안하였다.

제안하는 방법은 정의식이 유사한 의사 저니키 모멘트 또는 최근 MPEG-7에서 채택된 영역 기반 모양 기술자인 ART에도 적용될 수 있다. 특히 ART 계산에 제안하는 기술이 사용될 경우, 저사양을 요구하는 모바일 등의 시스템에서의 내용 기반 검색을 구현할 수 있는 환경을 제공할 것으로 예상된다.

참고 문헌

[1] R. J. Prokop and A. P. Reeves, "A survey of moment-based techniques for unoccluded object representation and recognition," *Graphical Models and Image Processing*, vol. 54, no. 5, sep. pp. 438-460, 1992.

[2] A. Khotanzard and Y. H. Hong, "Invariant image recognition by Zernike moments," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, no. 5, pp. 489-497, May 1990.

[3] M. Teague, "Image analysis via the general theory of moments," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 70, pp. 920-930, Aug. 1980.

[4] Y. S. Kim and W. Y. Kim, "Content-based trademark retrieval system using visually salient feature," *Journal of Image and Vision Computing*,

vol. 16, pp. 931-939, Aug. 1998.

[5] C. H. Teh and R. T. Chin, "On image analysis by the method of moments," *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 10, no. 4, pp. 496-513, July 1988.

[6] R. Mukundan and K. R. Ramakrishnan, "Fast computation of Legendre and Zernike moments," *Pattern Recognition*, vol. 28, no. 9, pp. 1433-1441, 1995.

[7] S. O. Belkasim, "Efficient algorithm for fast computation of Zernike moments," *IEEE 39th Midwest symposium on Circuits and Systems*, vol. 3, pp. 1401-1404, 1996.

[8] A. Prata, W. V. T. Rusche, "Algorithm for computation of Zernike polynomials expansion coefficients," *Applied Optics*, vol. 28, pp. 749-754, 1989.

[9] E. C. Kintner, "On the mathematical properties of the Zernike polynomials," *Optica Acta*, vol. 23, no. 8, pp. 679-680, 1976.

[10] C. W. Chong, P. Raveendran and R. Mukundan, "A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments," *Pattern Recognition*, vol. 36, no. 3, pp. 731-742, 2003.

[11] W. Y. Kim and Po Yuan, "A practical pattern recognition system for translation, scale and rotation invariance," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, 1994.

[12] M. Taegue, "Calculation of Irradiance Moments," *Applied Optics*, vol. 19, no. 8, pp. 1353-1356, 1980.

[13] W. Y. Kim and Y. S. Kim, "A new region-based shape descriptor: The ART (Angular Radial Transform) Descriptor," *ISO/IEC MPEG99/M5472*, Maui, Dec. 1999.



황 선 규
1997년 한양대학교 전자공학과 학사. 1999년 한양대학교 대학원 전자통신전파공학과 석사. 1999년~현재 한양대학교 대학원 전자통신전파공학과 박사과정 재학중 관심분야는 영상 처리 및 인식, 객체 분할.



김 희 울
1980년 한양대학교 전자공학과 학사. 1983년 Pennsylvania State University 전자공학과 석사. 1989년 Purdue University 전자공학과 박사. 1989년~1994년 University of Texas 조교수. 1994년~현재 한양대학교 전자전기공학부 교수. 관심분야는 컴퓨터 비전, 머신 비전, 내용기반 영상 검색, MPEG-7.