

확장유한요소법을 이용한 임의의 불연속면 처리기법

Arbitrary Discontinuities in Finite Elements

Ted Belytschko, Nicolas Moes, Suji Usui and Chandu Parimi

Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, 2145 Sheridan Road Evanston, IL 60208, U.S.A.



지 광 습*

*한국어 번역 · 고려대학교 사회환경시스템공학과 조교수

유한요소법의 테두리 내에서, 함수 자체 및 그 미분에서 발생하는 임의의 불연속면을 처리할 수 있고, 또 불연속면의 교차 및 분기를 다루는 기법을 제시하였다. 불연속면을 근사하기 위해 거리함수를 이용하였고, 불연속면의 전이는 레벨셋 함수를 이용하여 표현하였다. 이산화된 방정식을 유도하기 위해 표준 갈라켄법을 이용하였다. 수치해석 예로서, 균열성장, 회전축 베어링, 비부착 함입, 암반의 절리를 대상으로 하였다. 본 논문은 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2001년 50호 pp. 993-1013에 발표된 논문이다.

1. 개 론

본 논문에서는 기 발표된 유한요소법의 불연속 처리기법(Belytschko and Black 1999; Moes *et al.*, 1999; Daux, Moes *et al.*, 2000; Sukumar, Chopp *et al.*, 2000)을 통합 및 확장시켜서, 불연속면이 유한요소법의 요소망과는 완전히 독립적이게 되었다. 즉, 불연속면이 요소를 임의의 방식으로 관통할 수 있다. 본 기법은 고체화를 포함한 모든 상변화, 균열, 암반의 전단파나 절리 등, 불연속면의 전이에 관한 문제들에 특별히 유용하다. 그리고, 공학에서 발생하는 볼트, 연결상세 등 비일상적 문제를 모델하는 데에도 적절히 사용될 수 있으며 계면의 활동만을 모델하기 위해 특별히 개발된 요소를 사용할 필요가 전혀 없다.

불연속면을 근사하기 위한 본 논문의 방법은 (Belytschko and Black 1999; Moes *et al.*, 1999)에 기초하고 있다. 본 논문에서는 본 기법을 유한요소법에 적용하는 것에 대해

기술하고 있지만, EFG (Belytschko, Lu *et al.*, 1994)와 같은 무요소법 (meshless method)에도 공히 적용할 수 있다.

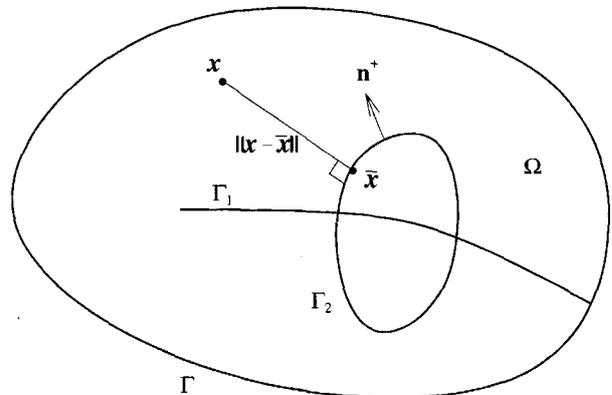


그림 1 두 불연속면에 대한 용어

불연속을 포함하는 요소개발에 관해서 여러 연구 (Oliver 1995; Armero and Garikipati 1996; Oliver 1996; Duarte *et al.*, 2001)가 진행된 바 있다. 이들 기법과 비교할 때, 본 기법에서는 비적합성 조건을 고려할 필요가 없고, 불연속면의 선단이 요소 내부에 존재할 수 있다는 점에서 기존연구들과 크게 구별된다. 전술한 연구중 (Duarte, Hamzeh *et al.*, 2001)의 기법은 불연속면의 모델에 관한 또 다른 방법으로 평가 받을 수 있을 것으로 사료된다.

본 기법에서는 불연속면은 거리함수 (signed distance function) 를 사용하여 정의된다. 거리함수를 사용하는 것

이 반드시 필요한 것은 아니지만 레벨셋 기법을 사용하는 것은 천이하는 불연속면을 모델링하는 측면에서 특히 유용한 점을 가지고 있다 (Sethian 1999). 레벨셋 기법을 유한요소법에 사용한 다른 예는 (Rao *et al.*, 2000; Stolarska *et al.*, 2001)을 들 수 있다.

불연속면을 유한요소에 포함시키는 전술한 기법들은 불연속면의 존재 때문에 요소망을 그 불연속면에 맞추어야 하는 필요성을 제거한다는 점에서 크게 주목 받고 있다. 또한 불연속면이 성장함에 수반되는 요소 재구성 또한 필요 없게 된다. 삼각형 요소나 삼차원 4면체 요소를 이용한 요소 재구성은 상당히 빠르고 안정적이기 때문에, 많은 경우에 이들 요소를 이용한 요소망 재구성이 심각한 고려 없이 이용되곤 한다. 하지만 요소 재구성은 그에 따른 비용뿐만 아니라, 시각화 및 후처리, 불연속면의 성장에 따른 특정 지점의 응력변화 추적 등의 문제를 초래하기 때문에, 요소망 재구성이 없는 기법을 사용하는 것이 더 나은 접근법이라고 생각된다.

2. 불연속 함수의 근사

2.1 함수 자체의 불연속성

그림 1에 있는 경계 Γ 를 가지는 영역 Ω 을 예를 들자. 이 영역의 스칼라 변수 $u(\mathbf{x})$ 를 근사하면서 본 기법을 기술하겠지만 벡터 변수를 사용할 때도 꼭 같은 접근법으로 쉽게 확장 적용이 가능하다.

변수 $u(\mathbf{x})$ 에 해당하는 불연속면은 Γ_α 로 나타내었다. 여기서, $\alpha = 1, \dots, m$ 이며, m 은 불연속면의 총수를 나타낸다. 우선, 근사함수 자체가 불연속면 Γ_α 에서 불연속인 근사함수를 도입한다. 여기서 요소는 불연속면의 위치나 모양과는 완전히 독립적이다. 절점 I 의 형상함수를 $N_I(\mathbf{x})$ 로 나타내고 해당 절점 값을 u_I 라 한다.

전술한 근사법은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) [u_I + a_I \phi_I(\mathbf{x})] = \sum_I \psi_I(\mathbf{x}, a_I, u_I) \quad (1)$$

여기서 u_I 는 절점 값, a_I 는 확장함수 (enrichment function) $\phi_I(\mathbf{x})$ 에 해당하는 첨가된 자유도를 의미한다. 확장함수가 절점에 따라 변하기 때문에 종종 식 (1)의 맨 오른쪽 표현을 쓴다 (역자 주: 더 적합한 표현은 (Zi *et al.*, 2004)에서 찾아볼 수 있다.). 식 (1)은 단위분할 (partition of unity) (Melenk and Babuska 1996)개념의 응용이다 (역자 주: (Zi and Belytschko 2003) 참조).

기타 다른 기법을 이용하여 표면을 나타낼 수도 있지만, 다음과 같이 정의되는 거리함수 $f_\alpha(\mathbf{x})$ 를 사용하면 불연속면 Γ_α 를 편리하게 표현할 수 있다.

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \min_{\bar{\mathbf{x}} \in \Gamma_\alpha} \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \text{sign}(\mathbf{n}' \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})) \quad (2)$$

여서 $\bar{\mathbf{x}}$ 는 불연속면 Γ_α 상의 한 점이고, \mathbf{n}' 는 그 점에서 양의 방향으로 향하는 단위 벡터이다. 잘 알려진 바와 같이 점 $\bar{\mathbf{x}}$ 는 \mathbf{x} 의 Γ_α 에 대한 가장 가까운 투영을 의미하는데 매끄러운 표면에 대해서는 그 정사영이 된다. 식 (2)의 각 요소는 그림 1에서 찾아 볼 수 있다. 그 거리함수 또한 유한요소법이나 무요소법을 사용하여 나타낼 수 있으며, 유한요소법을 사용할 때, 이는

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_I f_{\alpha I} N_I(\mathbf{x}) \quad (3)$$

여기서 $N_I(\mathbf{x})$ 는 형상함수이다. 형상함수가 표준 C^0 유한요소 형상함수이면 불연속면도 부분적으로 미분가능한 C^0 함수가 된다. 해를 구하기 위한 근사법이 유한요소법일지라도, 만약 더 매끄러운 불연속면이 요구될 시는 무요소법 (Belytschko *et al.*, 1994)에서 기술된 이동최소자승법을 사용할 수도 있다. 식 (3)을 이용하면 불연속면을 거리함수의 절점 값들로만 이용하여 표현할 수 있다.

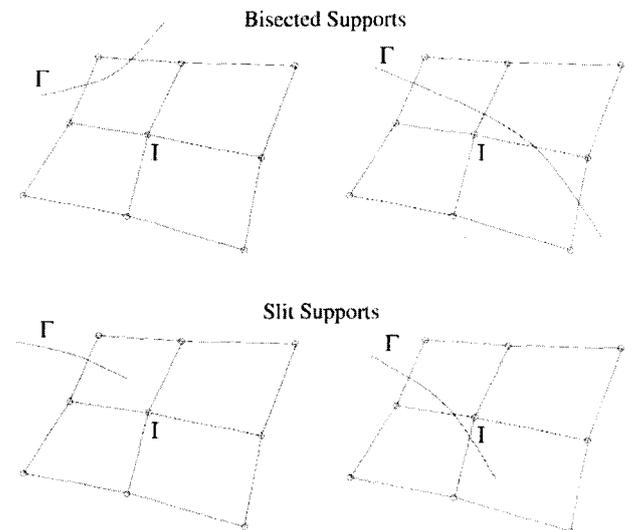


그림 2 양분 및 절개된 지지 (support)

절점 I 의 근사는 형상함수 $N_I(\mathbf{x})$ 의 지지 (support: 즉, 형상함수 N_I 가 영이 아닌 영역)가 양분되었는지, 아니면 불연속면의 끝이 지지 내에 위치하는지에 달렸다. 이 두 경우가 그림 2에 묘사되었다. $N_I(\mathbf{x})$ 의 지지는 일반적으로 절점 I 를 공유하는 모든 요소의 영역에 해당한다. 어떤 요

소의 지지가 양분되었을 경우 양분지라 하고 불연속면이 지지에 부분적으로 포함되었을 경우 절개지라 정의한다.

양분지에서, 불연속을 표현하는 확장함수는 다음과 같다.

$$\phi_I(\mathbf{x}) = H(f_\alpha(\mathbf{x})) \quad (4)$$

여기서 $H(x)$ 는 계단함수이고

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

식 (4)와 (1)을 비교할 때, ψ_I 는

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x})(u_I + a_I H(f_\alpha(\mathbf{x}))) \quad (6)$$

식 (6)에 따르면 곡선 $f_\alpha(\mathbf{x})=0$ 을 따라 계단형 함수를 추가하게 된다. 계수 a_I 는 이산화된 식에서 추가된 자유도(확장변수: enrichment parameters)이고 이에 따라 형상 함수 $N_I(\mathbf{x})$ 지지내의 불연속량이 결정된다.

식 (6)은 선별된 구간에 적용된 계단함수로도 해석할 수 있는데, $N_I(\mathbf{x})$ 가 그 선별함수(window function)가 된다. 선별함수가 사용되기 때문에 임의의 확장함수가 도입되더라도 이산화된 식은 빈약도(sparsity)를 가지게 된다.

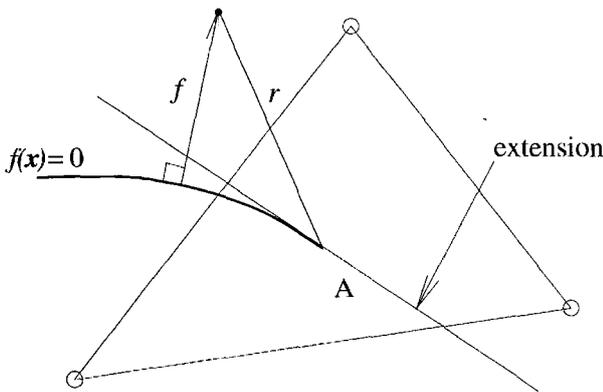


그림 3 균열끝 확장함수와 관련된 용어

절개지지에 대해서는 다음과 같은 근사를 할 수 있다.

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \left(u_I + \sum_{\beta} a_{I\beta} b_{\beta}(\mathbf{x}) \right) \quad (7)$$

여기서 $b_{\beta}(\mathbf{x})$ 는 불연속면(또는 선) 끝단 주변을 모델하는 가지함수(branch function)이다. 가지함수도 불연속면의 모양을 모델하는 함수이다. 가령 예를 들어 그림 3과 같은 불연속면을 생각해 보자. 불연속면을 그 끝단 너머로

연장한다고 가정할 때, 그 연장면은 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla f_\alpha \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_A) = 0 \quad (8)$$

이 가상의 연장면을 이용하여 전술한 거리함수를 계산한다.

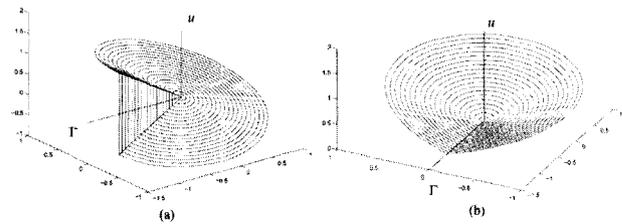


그림 4 함수 및 그 미분의 불연속성 분기

가지함수 또한 거리함수와 다음 식으로 정의되는 각 θ 를 이용하여 계산된다.

$$\theta(\mathbf{x}) = \tan^{-1} \left(\frac{f(\mathbf{x})}{r} \right), \quad -\pi < \theta < \pi \quad (9)$$

각 θ 를 불연속면 $f(x)=0$ 이용하여 계산하기 때문에 식 (9)를 통해 불연속면이 곡선일 경우나 부분 선분일 경우도 모델이 가능하다.

그림 3과 같이 가지함수 $b_{\beta}(x)$ 는 점 A의 반경과 각 θ 를 이용하여 정의할 수 있다. 일반적으로 불연속 끝단을 모델하기 위해서는 하나 이상의 가지함수가 필요하다. 예를 들면 다음과 같은 확장함수가 사용될 수 있다.

$$b_i(\mathbf{x}) = \left[r \sin \frac{\theta}{2}, r^2 \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (10)$$

이 중 선형 가지함수, 즉, 식 (4)의 첫번째가 그림 4(a)에 도시되었다. 그림과 같이 이 함수는 불연속면 Γ_0 에서 불연속이며, Γ_0 를 제외하고는 연속적으로 거동하는 함수이다. 선형탄성파괴역학의 해를 이용한 다음과 같은 함수가

$$b_i(\mathbf{x}) = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] \quad (11)$$

(Belytschko and Black 1999)에서 가지함수로 사용되었다. 식 (11)의 함수 중 첫째 항만 가지함수이고, 나머지는 탄성파괴역학 문제의 정도를 증가시키는 역할을 한다. 선형파괴역학의 균열단부의 변위변화도와 같은 \sqrt{r} 이 식 (11)에 사용되었다. 식 (11)은 선형탄성균열끝의 점근해이므로, 선형파괴역학 문제와 유사한 문제에서 탁월하게 거동한다.

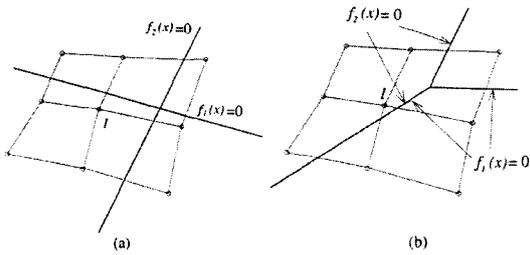


그림 5 절점 I와 관련된 불연속; (a) 교차 불연속, (b) 분기 불연속

2.2 교차 불연속

그림 5(a)와 같이 둘 이상의 불연속면이 요소의 지지를 교차하여 존재하는 경우의 확장함수는 (Daux *et al.*, 2000)에 의해 연구된 바 있다. 이 형태의 불연속에 대한 근사함수는 다음과 같다.

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \{ u_I + a_{I1} H[f_1(\mathbf{x})] + a_{I2} H[f_2(\mathbf{x})] + a_{I3} H[f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x})] \} \quad (12)$$

그러므로 지지내에 불연속면이 교차된 경우 3 개의 추가적인 자유도가 필요하다. 이들 함수는 서로 선형 독립이며, 유한요소법의 형상함수와도 전적으로 독립된 함수이다. 위 식 (12)는 (Daux *et al.*, 2000)의 식과는 다른 형태로서 더 함축적이고 쉽게 구현할 수 있는 형식을 지니고 있다.

또 다른 중요한 예는 그림 5(b)와 같은 분기 불연속이다. 이와 같은 불연속은 균열의 동적 성장에서 찾아볼 수 있다 (역자참조: Belytschko *et al.*, 2003). 교차 불연속은 식 (12)의 감차형태로 나타낼 수 있다. 지지 내에 분기 불연속이 존재하는 경우의 근사는

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \{ u_I + a_{I1} H[f_1(\mathbf{x})] + a_{I2} H[f_2(\mathbf{x})] \} \quad (13)$$

여기서, 확장함수는 두 개의 선형독립함수로 이루어져 있다. 이외에도 적절한 확장함수를 추가하여 불연속면의 교차점에서 발생하는 특이점을 나타내는 것도 물론 가능하다.

2.3 함수의 미분에서 발생하는 불연속

해의 일계 미분에서 발생하는 불연속 또한 매우 중요히 다루어 져야 하는 부분이다. 이러한 불연속은 다른 재료들의 계면이나 같은 재료라 할지라도 재료의 상이 바뀔 때 발생하게 된다. Austenite-Martensite 경계면이나 물과 얼음의 경계면 등이 그 예로 제시될 수 있다. 수학적인 관

점에서 볼 때, 지배 미분방정식의 계수가 급격히 변화하면, 그 해의 일계 미분에서 반드시 불연속면이 존재하게 된다. 이런 류의 불연속은 요소경계를 그 불연속면에 맞추어서 요소망을 구성하는 방법을 통해 표준 유한요소법으로도 쉽게 다룰 수 있다. 하지만 만약 불연속면이 시간의 변화와 함께 움직이게 되면, 요소망의 재구성이 반드시 필요하게 된다. 아래에 주어진 근사를 이용하면 요소망과는 전적으로 무관하게 불연속면 (2차 문제에서는 불연속선)을 다룰 수 있다. 해의 1계 미분에 불연속면이 존재하고 지지가 불연속면에 의해 관통되었을 경우 다음과 같은 근사를 통해 모델한다 (Krongauz and Belytschko 1998).

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \{ u_I + a_{I1} |f_\alpha(\mathbf{x})| \} \quad (14)$$

여기서 $|\cdot|$ 는 절대값 기호이다. 식 (14)의 확장함수는 거리함수의 절대값에 다름 아니다.

만약 불연속면이 지지를 관통하지 않고 지지 내에 그 단부가 위치하는 경우의 근사는

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \left\{ u_I + \sum_{\alpha} a_{I\alpha} b_{I\alpha}^D(\mathbf{x}_I) \right\} \quad (15)$$

여기서 $b_{I\alpha}^D(\mathbf{x}_I)$ 는 가지함수이고 다음과 같다.

$$b_{I\alpha}^D(\mathbf{x}_I) = \left[r \cos \frac{\theta}{2}, r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (16)$$

식 (16)의 첫째 함수는 그림 4b에 도시되었다. 불연속면을 제외하고는 모든 부분에서 미분이 가능함을 그림에서 알 수 있다.

미분에 존재하는 불연속면이 교차하는 경우에는 식 (12, 13)과 꼭 같은 절차를 사용한다. 예를 들면, 지지 내에 두 개의 불연속면이 존재하고 이들이 해당 지지를 관통할 때, 다음과 같은 근사를 사용한다.

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \{ u_I + a_{I1} |f_1(\mathbf{x}_I)| + a_{I2} |f_2(\mathbf{x}_I)| + a_{I3} |f_1(\mathbf{x}_I)| |f_2(\mathbf{x}_I)| \} \quad (17)$$

분기하는 불연속은 다음과 같이 해결할 수 있다.

$$\psi_I(\mathbf{x}, u_I, a_I) = N_I(\mathbf{x}) \{ u_I + a_{I1} |f_1(\mathbf{x}_I)| + a_{I2} |f_2(\mathbf{x}_I)| \} \quad (18)$$

2.4 벡터함수 및 계면 접선방향의 불연속

앞서 기술된 기법은 벡터함수의 경우에도 쉽게 적용 가

능하다. 예를 들면, 변위벡터에 존재하는 거리함수 $f(\mathbf{x})$ 를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{u}_I + \mathbf{a}_I H(f(\mathbf{x}))) \quad (19)$$

여기서 \mathbf{a}_I 는 \mathbf{u}_I 와 같은 차원을 같은 열 행렬이다.

만약 벡터함수의 한 성분에만 불연속이 존재할 때도 거리함수를 이용하여 간단히 표현할 수 있는데, 본 기법은 전단파나 압축력 때문에 단혀진 균열의 접선방향 불연속을 모델할 때도 사용할 수 있다. 불연속면의 단위벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{e}_n = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \quad (20)$$

원래 거리함수의 기울기는 단위량이지만, 컴퓨터에서 발생할 수 있는 오차를 줄이기 위해 식 (20)과 같은 표현을 사용한다. 불연속면의 접선면은 식 (20)의 \mathbf{e}_n 에 수직인 임의의 두 벡터에 의해 정의된다.

2차원 문제에서 발생하는 접선방향의 불연속은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{u}_I + a_I \mathbf{e}_t(\mathbf{x}) H(f(\mathbf{x}))) \quad (21)$$

여기서 $\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_n$ 는 접선방향 단위벡터이다. 이 경우에 단지 하나의 추가 자유도만 필요로 한다.

2.6 전역-국소 (Global-Local) 모델과의 비교

전술한 기법은 잘 알려진 전역-국소법의 일반화로 해석될 수 있다. 단위분할법(partition of unity method)에서는 전역근사에 선별함수를 곱하여 전역함수의 근사특성을 높이고, 해당 이산식의 빈약도를 높였다. 표준적인 전역-국소법에서 어떤 전역근사함수 $g(\mathbf{x})$ 를 이용했을 때, 근사 해 $u(\mathbf{x})$ 는 다음과 같다.

$$u(\mathbf{x}) = ag(\mathbf{x}) + \sum_I N_I(\mathbf{x})u_I \quad (22)$$

단위분할법에서는

$$u(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x})(u_I + a_I g(\mathbf{x})) \quad (23)$$

이 두 식을 비교해보면 본 기법에서는 전역함수 $g(\mathbf{x})$ 가 정해진 $N_I(\mathbf{x})$ 의 영역 내로만 국한됨을 알 수 있다. 더욱이 이 함수의 도입이 꼭 필요한 경우에만 이 전역함수를 선별적으로 도입하는 것이 가능하다. 또, a_I 가 특정 절점에서

사라지도록 해도 매끄러운 함수를 얻을 수 있다.

식 (22)와 (23)의 비교를 통해 다음과 같은 주요 차이점을 발견할 수 있다.

1. 전역-국소법에는 전역함수 때문에 결과적으로 빈약도를 기대할 수가 없다. 한편 식 (23)에서는 그 함수가 선별함수와 곱해져서 국소화 되기 때문에, 빈약도를 떨어뜨리지 않는다.
2. 식 (23)의 변수 a_I 는 절점마다 다를 수 있기 때문에, 전반적으로 해의 정도를 향상시킨다. 반면, 시스템의 자유도는 증가된다.
3. 단위분할법에서는 확장함수가 필요로 하는 곳에만 선별적으로 도입될 수 있다.

3. 라플라스 방정식의 약형(weak form)

내부에 불연속면이 존재하는 문제에 대한 약형 지배방정식을 간단히 얻어 보기 위해, 일단 영역 Ω 의 내부와 경계 Γ 에 불연속성을 가지고 있는 라플라스 방정식을 고려한다. 그 강형 지배방정식은

$$\nabla \cdot (\alpha(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) = 0 \text{ on } \Omega \quad (24)$$

$$\llbracket \alpha(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket \equiv \alpha^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \alpha^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^- \text{ on } \Gamma_D \quad (25)$$

$$u(\mathbf{x})_{,N} = \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \Gamma_F^+ \text{ and } \Gamma_F^- \quad (26)$$

$$\alpha(\mathbf{x}) u(\mathbf{x})_{,N} \cdot \mathbf{n} = h \text{ on } \Gamma_h \quad (27)$$

$$u = g \text{ on } \Gamma_g \quad (28)$$

여기서 \mathbf{n} 은 불연속면의 단위 방향벡터, +와 - 첨자는 불연속면으로 나뉘어진 양편을 의미한다. $\alpha(\mathbf{x})$ 는 C^{-1} 함수이다. 이 문제의 해는 Γ_c 에서 불연속면이 존재하고 해의 미분은 Γ_D 에서 불연속면이 있다. 표준 유한요소법에서 모든 요소간의 경계가 Γ_D 에 해당된다는 점에 유의해야 한다.

그러므로 시험함수(trial function)와 시험함수(test function)를 취하는 공간의 수학적 정의는 다음과 같다.

$$\mathcal{U} = \left\{ u(\mathbf{x}) \mid u(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_1, u(\mathbf{x}) = g \text{ on } \Gamma_u, \right. \\ \left. u(\mathbf{x}) \text{ discontinuous on } \Gamma_F \right\} \quad (29)$$

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \delta u(\mathbf{x}) \mid \delta u(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}_1, \delta u(\mathbf{x}) = g \text{ on } \Gamma_u, \right. \\ \left. \delta u(\mathbf{x}) \text{ discontinuous on } \Gamma_F \right\} \quad (30)$$

약형은 $u \in \mathcal{U}$ 의 공간에서 정의되어야 하며, 다음을 만족해야 한다.

$$\int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \alpha \nabla u d\Omega - \int_{\Gamma_h} \delta u h d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u \in \mathcal{U}_0 \quad (31)$$

다음은 위의 식이 식 (24)와 모든 계면과 자연경계 (natural or Neumann boundary) 조건을 포함하고 있음을 보이도록 한다. 식 (31)의 첫째 항을 부분적분하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \alpha \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} [\nabla(\delta u \alpha \nabla u) - \delta u \nabla \cdot (\alpha \nabla u)] d\Omega \quad (32)$$

가우스 정리에 의해 식 (32)의 오른쪽 첫번째 항은

$$\int_{\Omega} \nabla(\delta u \alpha \nabla u) d\Omega = \int_{\Gamma_h} (\delta u \alpha \nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_F \cup \Gamma_D} (\delta u^+ \alpha^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \delta u^- \alpha^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-) d\Gamma \quad (33)$$

시험함수의 정의에 따라 Γ_D 상에서 $\delta u^+ = \delta u^-$ 이므로 식 (33)의 두 번째 항은 $\delta u \llbracket \alpha u_{,N} \rrbracket$ 이 된다. 식 (33)을 (32)에 대입하고 또 순서대로 (31)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$-\int_{\Omega} \delta u \nabla \cdot (\alpha \nabla u) d\Omega + \int_{\Gamma_h} \delta u (\alpha u_{,N} - h) d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \delta u \llbracket \alpha u_{,N} \rrbracket d\Gamma + \int_{\Gamma_F} (\delta u^+ \alpha^+ \nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \delta u^- \alpha^- \nabla u^- \cdot \mathbf{n}^-) d\Gamma = 0 \quad (34)$$

식 (24), (25), (27)은 위 식의 선행 삼항으로부터 얻을 수 있다. δu 는 Γ_F 상에서 불연속이고 δu^+ 와 δu^- 는 임의로 취할 수 있다. 이로부터

$$\nabla u^+ \cdot \mathbf{n}^+ = u_{,N}^+ = 0 \quad \text{on } \Gamma_F \quad (35)$$

$$\nabla u^- \cdot \mathbf{n}^- = u_{,N}^- = 0 \quad \text{on } \Gamma_F \quad (36)$$

그러므로 식 (24)부터 (28)에 이르는 강형 지배방정식은 약형 지배방정식 (31)에 모두 포함되어 있다. 따라서, 전술된 불연속 자체를 포함하는 근사는 이러한 류의 문제에 효과적으로 적용될 수 있다.

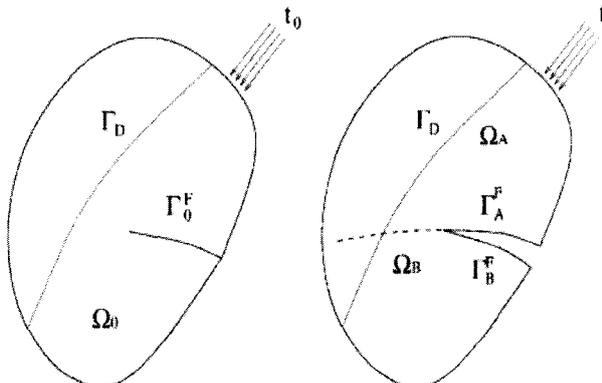


그림 6 기준영역 및 현재영역의 절개면 Γ_F^0

4. 불연속 운동의 약형

(역자주: motion을 운동으로 번역하였음.)

이번 장에서는 고체역학에서 운동이나 혹은 운동의 미분에 불연속성이 존재하는 경우의 평형방정식의 약형을 제시한다. 이와 같은 문제에서 강형 지배방정식은 평형방정식과 하중경계조건 이외에도 계면의 불연속 조건을 갖는다. 기준 영역을 Ω_0 으로 하는 영역 Ω 을 고려해 보자. 이 영역 Ω 은 기준영역을 기준으로 이 영역의 모든 점에 단위 부피당 $\rho_0 \mathbf{b}$ 의 힘이 작용하고 그 경계조건에 t_0 가 작용한다. 이 영역의 공칭응력을 \mathbf{P} 라고 운동의 변화도를 \mathbf{F} 라 하자. 이 운동은 다음과 같은 사상(mapping)으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad (37)$$

이 사상은 일대 일이어야 하고, 일련의 불연속면을 제외하고는 매끄러우며, 미분가능하여야 한다. 미분의 불연속은 서로 다른 재료의 접촉면에서 생긴다. 운동 자체의 불연속은 균열이나 전단띠에서 생기게 된다. 불연속이 존재하면 영역이 나뉘어지게 되고, 이 때문에 그 거동에 흥미있는 점이 생기게 된다. 그림 6에는 균열이 존재하는 영역을 그 기준 영역과 같이 도시하였다. 균열 때문에 현재 영역에서는 표면이 둘로 쪼개지게 되는데, 기준영역에서 한 점이었던 것이 현재영역의 불연속 면에서는 두 점으로 된다. 기준영역에서 균열은 두 개의 서로 합치하는 표면인 반면 현재영역에서는 간격이 존재하는 두 개의 불일치하는 표면이 된다. 그러므로 불연속면에서 사상은 일대일이 될 수 없으며, 한 점이 두 점으로 변하는 사상이 되어야 한다.

운동 자체의 불연속과 그 미분의 불연속과 은 각각 Γ_A^f 와 Γ_B^f 에서 발생한다. 기호표기를 단순하게 하기 위해, 하나의 불연속만을 고려하겠다. 그러면 Γ_A^f 는 Γ_A^f 와 Γ_B^f 로 구분해서 쓸 수 있다. Γ_A^f 를 중심으로 일어나는 운동은 접촉하고 있는 두 영역의 운동과 마찬가지로 때문에, Γ_A^f 상에 위치한 점들의 운동은 다소 복잡한 조건에 놓이게 된다 (Belytschko *et al.*, 2000). 이 조건을 구현하기 위해 Γ_A^f 를 연장하여 해당 영역을 둘로 나눈다. 접촉면의 불통과조건(impenetrability condition)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{if } \mathbf{X} \in \Gamma_{0A}^f \text{ then } \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \notin \Omega_B, \\ \text{if } \mathbf{X} \in \Gamma_{0B}^f \text{ then } \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \notin \Omega_A \end{aligned} \quad (38)$$

위 식은 균열을 기준으로 해서 어떤 한편에 존재하는 점은 다른 편으로 움직여 갈 수 없는 불통과조건을 기술하고

있다. 균열이 전개됨에 따라 Γ_0^f 의 성질도 변하게 된다. 만약 간격이 생기게 되면, 즉 균열이 열리면, Γ 는 하중조건이 기술된 두 개의 면이 된다.

여기서 흥미있는 점은 Γ_0^f 는 변형이 진행됨에 따라 형성되고 역사상을 통해 정의되는 면이기 때문에 변형 전에는 알려져 있지 않다는 점이다. 그러므로 $f(x, \tau) = 0$ 로 기술된 시간 τ 에서 불연속 $\Gamma^f(\tau)$ 은 변형 전에는 $f(\Phi^{-1}(x, \tau), \tau) = 0$ 로 표현되는 지점에 위치하게 된다. 이 함수를 실제로 얻기는 쉽지 않으나, 계산상 사용되는 예가 없기 때문에 사실상 필요가 없는 개념적인 표현이다.

식 (38)을 직접 적용하기는 어려우므로, 균열이 처음에는 서로 접촉상태이고 균열면을 따라 발생할 수 있는 전단 변형이 작다고 가정한다. 그러면, 균열면의 상대변위는 다음과 같이 주어진다.

$$g_N \equiv [\mathbf{u}_N] = \mathbf{u}^A \cdot \mathbf{n}^A + \mathbf{u}^B \cdot \mathbf{n}^B \leq 0 \quad (39)$$

위 식은 근사식이며, 초기에 서로 접촉상태의 균열이 열릴 때 만 사용될 수 있다. 균열이 접촉상태에 있을 때 접촉면은 마찰이 없는 상태라고 가정하였다. 이러한 운동의 강형 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_j} + \rho_0 b_i = 0 \text{ in } \Omega_0 \quad (40)$$

$$n_j^0 P_{ji} = \bar{t}_i \text{ on } \Gamma_0^c \quad (41)$$

$$n_j^0 P_{ji} = 0 \text{ on } \Gamma_0^f \text{ if not in contact} \quad (42)$$

$$\bar{t}_\alpha^{0A} = 0, \bar{t}_\alpha^{0B} = 0, t_N^{0A} + t_N^{0B} = 0 \text{ on } \Gamma_0^c \text{ if in contact} \quad (43)$$

$$[n_j^0 P_{ji}] = 0 \text{ on } \Gamma_0^D \quad (44)$$

$$[\mathbf{u}_N] \leq 0 \text{ on } \Gamma_0^f \quad (45)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_0^u \quad (46)$$

여기서 $t_N^0 = n_j^0 P_{ji} n_j^0$ 이고 \bar{t}_α^0 는 접선방향의 하중을 의미한다. 그리고 균열표면에는 하중이 작용하지 않는다고 가정하였다.

사용함수를 취하는 공간은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in C^0, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{u}}(t) \text{ on } \Gamma_0^u, \right. \\ \left. \mathbf{u} \text{ discontinuous on } \Gamma_0^f \right\}, \lambda \geq 0, \lambda \in C^{-1} \quad (47)$$

시험함수의 공간은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \mid \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in C^0, \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ on } \Gamma_0^u, \right. \\ \left. \delta \mathbf{u} \text{ discontinuous on } \Gamma_0^f \right\}, \delta \lambda \geq 0, \delta \lambda \in C^{-1} \quad (48)$$

균열면의 접촉조건은 라그랑지법으로 구현한다. 그러므

로 약형은 부등호를 가지게 되고 해로서 $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{U}$ 와 $\lambda(\mathbf{x}, t) \in C^{-1}$ 을 찾아야 한다.

$$\int_{\Omega_0} (\delta \mathbf{F}^T : \mathbf{P} - \rho_0 \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) d\Omega_0 \\ - \int_{\Gamma_0^c} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 d\Gamma_0 + \delta \int_{\Gamma_0^f} \lambda [\mathbf{u}_N] d\Gamma_0 \geq 0 \quad (49)$$

이제는 약형으로부터 강형 지배방정식을 유도한다. 첫째 항을 첨자형(indicial notation)으로 쓰고 부분적분하면

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial X_i} P_{ji} d\Omega_0 = \int_{\Gamma_0^c} \delta u_i n_j^0 P_{ji} d\Gamma_0 \\ + \int_{\Gamma_0^f \cup \Gamma_0^D} (\delta u_i^A n_j^{0A} P_{ji}^A + \delta u_i^B n_j^{0B} P_{ji}^B) d\Gamma_0 \\ - \int_{\Omega_0} \delta u_i \frac{\partial P_{ji}}{\partial X_i} d\Omega_0 \quad (50)$$

경계 적분을 수직과 접선 성분으로 분리하면 다음과 같다.

$$\int_{\Gamma_0^c} \delta u_i^A n_j^{0A} P_{ji} d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_0^c} (\delta u_N^A t_N^{0A} + \delta \bar{u}_N^A \bar{t}_N^{0A}) d\Gamma_0 \quad (51)$$

식 (51)을 (5)에 대입하고 또 연이어 (49)에 대입하면, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_{\Omega_0} \delta u_i \left(-\frac{\partial P_{ji}}{\partial X_i} - \rho_0 b_i \right) d\Omega_0 + \int_{\Gamma_0^c} \delta u_i (n_j^0 P_{ji} - \bar{t}_j^0) d\Gamma_0 \\ + \int_{\Gamma_0^f \cup \Gamma_0^D} (\delta u_N^A t_N^{0A} + \delta u_N^B t_N^{0B} + \delta \bar{u}_\alpha^A \bar{t}_\alpha^{0A} + \delta \bar{u}_\alpha^B \bar{t}_\alpha^{0B}) d\Gamma_0 \\ + \int_{\Gamma_0^f} (\delta \lambda [\mathbf{u}_N] + \lambda (\delta u_N^A - \delta u_N^B)) d\Gamma_0 \geq 0 \quad (52)$$

위 식은 $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ 에 대해 성립하기 때문에, 첫째 두 항은 Ω_0 의 평형방정식 (40)과 Γ_0^c 의 하중조건 (41)로 귀결된다.

Γ_0^f 에서 δu_N 은 임의의 값을 가지므로

$$t_N^{0A} = -\lambda, \quad t_N^{0B} = \lambda \quad (53)$$

식 (53)을 더하면

$$t_N^{0A} + t_N^{0B} = 0 \text{ on } \Gamma_0^f \quad (54)$$

$\delta \lambda \leq 0$ 이므로 식 (52)에서

$$[\mathbf{u}_N] \leq 0 \text{ on } \Gamma_0^f \quad (55)$$

Γ_0^D 상에서 $\delta \mathbf{u}^A = \delta \mathbf{u}^B$ 이므로, 결국

$$t_i^{0A} = t_i^{0B} \text{ or } [n_j^0 P_{ji}] = 0 \quad (56)$$

5. 이산화

우선 접선 방향 변위가 충분히 작아서, 고려하는 접촉거

동이 초기에 서로 붙어있었던 인접점 간에 이루어지는 것으로 가정할 수 있는 경우에 대한 이산화를 개발한다. 이와 같은 가정은 거의 대부분의 균열에 적용될 수 있으며, 전단파 거동에도 마찬가지로 적용될 수 있다. 만약 전단변위가 커서 초기에 초기 인접점 외에 새로운 접촉이 발생하는 경우는 정교한 접촉 알고리즘이 사용되어야 한다. 하지만, 본 연구에서 제시한 바와 같은 간단한 기법을 사용하여도 파괴와 관련한 여러 가지 기술적으로 중요한 문제들을 문제없이 해결할 수 있다. 마지막 항을 제외한 다른 모든 항은 거의 표준 이산화 절차로 해결이 가능하기 때문에 여기서는 마지막 항만을 이산화한다. 불연속면을 ξ^α 로 매개변수화하는데 여기서 α 는 일차원인 경우는 1, 이차원인 경우는 2 값을 각각 가진다. 그러면 라그랑지 상수는 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\lambda(\xi^\alpha, t) = \lambda_I(t) N_I(\xi^\alpha) \quad (57)$$

불연속면의 상대변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \llbracket u_N \rrbracket &= (u_i^A - u_i^B) n_i^A \\ &= n_i^A N_I a_{iI} [H(f(\mathbf{x}^A)) - H(f(\mathbf{x}^B))] = n_i^A N_I a_{iI} \end{aligned} \quad (58)$$

따라서 불연속면의 상대변위는 전적으로 확장변수 a_{iI} 에 의해 결정된다. 식 (57)과 (58)을 약형의 마지막 항, 즉, δW_c 에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} \delta(\lambda \llbracket u_N \rrbracket) d\Gamma_0 = \delta \lambda_J G_{JI} a_{iI} + \lambda_J G_{JI} \delta a_{iI} \quad (59)$$

여기서,

$$G_{JI} = \int_{\Gamma_c} n_i^A N_I n_j^B N_J d\Gamma \quad (60)$$

이산화된 약형과 해당하는 이산화 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta u_{iI} (f_{iI}^{int} - f_{iI}^{ext}) + \delta a_{iI} (q_{iI}^{int} - q_{iI}^{ext}) \\ &+ \delta \lambda_J G_{JI} a_{iI} + \lambda_{JI} \delta a_{iI} \end{aligned} \quad (61)$$

$$f_{iI}^{int} - f_{iI}^{ext} = 0 \quad (62)$$

$$q_{iI}^{int} - q_{iI}^{ext} + \lambda_{JI} G_{JI} = 0 \quad (63)$$

$$G_{JI} a_{iI} \leq 0 \quad (64)$$

$$\lambda_{JI} \geq 0 \quad (65)$$

여기 마지막 식에서는 $\lambda_{JI} \geq 0$ 조건을 통해 $\lambda(\xi^\alpha) \geq 0$ 이 만족된다고 가정하였는데, 낮은 차수의 요소에서는 등가적으로 사용될 수 있다. 위 식은 각각 일반 절점변위의

평형방정식, 확장변수의 평형방정식, 불연속면 상 상대변위의 구속조건에 해당한다. 식 (63)의 세번째 항은 접촉힘에 해당하는데 이 접촉힘은 오로지 확장변수에만 연관되어 있다. 이들 평형조건들은 내부 힘 \mathbf{f}^{int} 이 \mathbf{u}_I 와 \mathbf{a}_I 의 함수이기 때문에 상호 연결되어 있다.

작은 변형의 정적 탄성 문제에 대해 식 (62)부터 (64)까지의 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{ua}^T & \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{q}^{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (66)$$

여기서 \mathbf{f}^{ext} 와 \mathbf{q}^{ext} 는 해당 자유도에 가해지는 힘 (역자주: 일반적 의미의 힘)이다. 그리고

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u d\Omega, & \mathbf{K}_{ua} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a d\Omega, \\ \mathbf{K}_{aa} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C} \mathbf{B}_a d\Omega \end{aligned} \quad (67)$$

위에서 \mathbf{C} 는 표준 탄성계수이다. 이차원에서 \mathbf{B}_u 와 \mathbf{B}_a 는 다음과 같은 절점 매트릭스들로 구성되어 있다.

$$\mathbf{B}_{uI} = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{aI} = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (68)$$

얼핏 보기에, 본 기법의 단점은 한 절점의 자유도 수가 정해지지 않고 변화한다는 점으로 여겨질 수 있지만, 이 점은 그다지 중요하지 않다. 확장함수 도입에 따른 자유도수의 변화는 필요한 만큼의 절점을 해당 요소에 새로 도입하는 것으로 쉽게 해결될 수 있다. 예를 들면, 균열로 인해 양분된 3절점 삼각형 요소는 각 절점이 서로 중첩된 6절점 삼각형 요소가 된다. 확장함수에 따른 확장 자유도는 새로 도입된 절점에 연결된다.

불연속 확장함수를 구현함에 있어서 식 (4)를 $\phi(\mathbf{x}) = H(f_a(\mathbf{x})) - H(f_b(\mathbf{x}_I))$ 로 바꾸어 쓰는 것이 좋다. 왜냐하면,

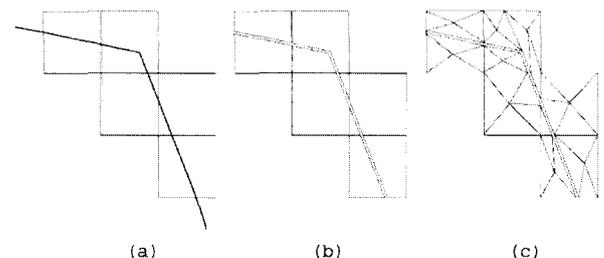


그림 7 (a) 여러 요소를 가로지르는 균열과 (b) 이 균열로 인한 분리된 영역 (c) 수치적분을 위해 삼각형으로 재구성된 균열을 포함하는 요소

이를 통해 이 확장함수가 불연속면을 포함하는 요소에만 국한되기 때문이다 (역자참조: Zi and Belytschko 2003).

불연속면을 포함하는 요소의 수치적분을 위해서 표준 수치적분 절차를 바꾸어야 한다. 이러한 요소의 수치적분에는 세 가지 방법이 있을 수 있다.

1. 피적분 함수의 연속성과 별 관계가 없는 기법을 이용한다. 예를 들면, 5×5적분점을 이용한 사다리꼴 적분법을 들 수 있다. 약간의 오차가 생기겠지만, 공학적으로는 충족될 수 있다.
2. 불연속면을 포함하는 요소들을 불연속면들이 포함하지 않는 작은 요소들로 분할하고, 이 작은 요소들을 표준 수치적분법으로 적분한다. 본 기법은 그림 7에 도시되었으며, 이의 자세한 기술은(Moes *et al.*, 1999)에서 찾아볼 수 있다. 프로그램을 만들 때 추가적인 노력을 필요로 하지만, 본 기법을 이용하면 높은 정확도를 얻을 수 있다.
3. (Strouboulis, Copps *et al.*, 2000)와 같이 소영역을 이용하여 적분할 수도 있다.

또한, 이외에도 불연속면으로 인해 생기는 아주 작은 조각은 매우 신중하게 처리하여야 하는데, 이 때문에 확장시 도입된 함수들이 선형종속되는 일이 발생한다. 이를 해결하는 기법은 (Moes *et al.*, 1999)에 기술되어 있다.

6. 수치해석 예

본 기법의 가능성과 성능을 검토하기 위해 몇 가지 수치해석 예를 제시하였다. 이 장에서 베어링, 접합부, 볼트 등과 같은 일반적인 활동기법으로는 모델이 어려운 문제들을 본 기법으로 얼마나 쉽게 해결할 수 있는지 보였다. 종래의 방법으로 볼트와 너트를 모델하기 위해서는, 이 두

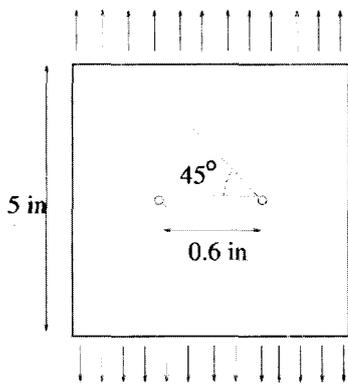


그림 8 두 리벳 구멍에서 성장하는 균열

부품의 요소망을 별도로 구성하고 그 계면에 활동요소를 삽입하여야 한다. 일반적으로 두 모델의 불일치 때문에 볼트가 회전할 때 비정상적인 큰 힘이 생기게 된다. 본 논문에서 개발된 기법에서는, 회전축 모델과 같은 연결부를 내부 불연속면을 이용하여 간단히 처리한다. 이렇게 임의의 불연속면을 모델할 수 있는 본 기법을 확장유한요소 (XFEM)라 명명한다.

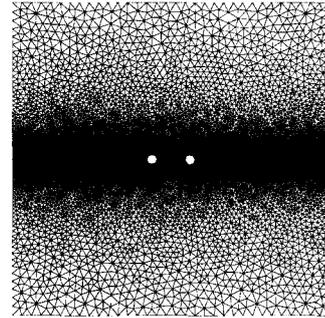


그림 9 그림 8 균열성장 문제의 유한요소 요소망

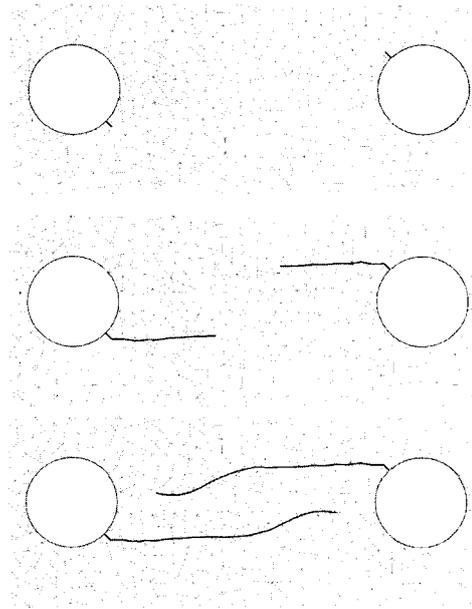


그림 10 초기 노치 및 균열성장

6.1. 균열성장

그림 8의 이 예는 두 개의 구멍이 있는 판에서 성장하는 균열에 대한 것이다. 이 문제는 (Moes *et al.*, 1999)의 문제와 비슷하지만, 더 짧은 초기 균열을 사용하였다. 이 짧은 균열을 모델하기 위해 식 (9)에서 새롭게 정의된 각도를 사용하였다. 초기 균열의 길이는 0.015이고, 각각, 좌우 구멍 쪽으로 45°와 -45°을 향한다. 판은 5 in 길이로서 정방형이다. 반경이 0.08 in인 리벳구멍은 0.6 in서로 떨어

져 있으며, 이 판은 y방향으로 주기적인 하중을 받는다.

초기 요소망은 그림 9와 같이 18,400의 삼각형 요소들로 이루어져 있다. 균열이 주로 성장하는 부분에서 더 낮은 정도를 얻기 위해 중심부에 요소망을 촘촘히 배치하였다. 이 요소망은 균열과는 전혀 상관이 없으며, 모사 내내 같은 요소망을 사용한다.

최대응력방향으로 균열이 성장하는 것으로 가정하고, Paris 피로법을 이용하여 피로균열을 진전시켰다. 균열 성장경로는 그림 10에 도시되었는데, 보이는 바와 같이 요소망과는 완전히 독립적이다.

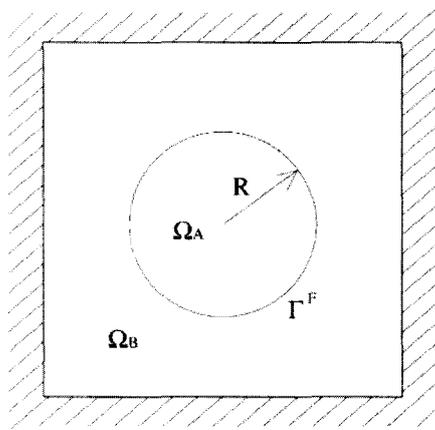


그림 11 베어링의 모델링

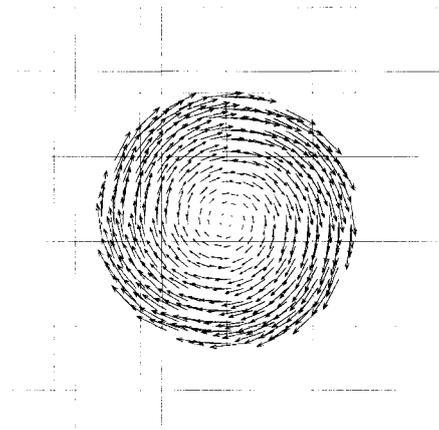


그림 12 최하위 고위치에 해당하는 변위모드

6.2. 회전축 베어링

두번째 예는 그림 11과 같은 회전축 베어링이다. 로 표 시된 원을 따라 접선방향 변위의 불연속이 생기는데 이를 식 (21)의 확장함수를 사용하여 모델하였다. 여기서 본 기 법이 얼마나 정확하게 베어링 Ω_B 내의 회전축 Ω_A의 강제 운동과 해당 최하위 고유치를 잡아낼 수 있는지 확인하였 다. 여기서, 회전축 Ω_A은 자유롭게 회전할 수 있기 때문에

그 고유치는 0이 되어야 한다.

확장함수 (21)을 단위 탄성계수와 같이 사용하였을 때, 최하위 고유치는 5.6×10⁻⁴이 얻어졌다. 변형에너지를 조사 한 결과 회전축과 베어링의 계면 주변에 변형이 발견되었 다. 이 정도의 오차는 대부분의 공학적인 응용문제에서는 허용될 수 있지만, 더 나은 정확도가 요망된다.

이 정확도를 개선시키기 위해 접선의 절점치를 이용하여 확장함수를 구성하였다. 즉,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) [u_I + a_I H(f(\mathbf{x})) \mathbf{v}(\mathbf{x}_I)] \quad (69)$$

여기서,

$$\mathbf{v} = -(y - y_0)\mathbf{e}_x + (x - x_0)\mathbf{e}_y \quad (70)$$

x_0, y_0 는 반경 R 인 회전축 중심의 좌표이고

$$f(\mathbf{x}) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 \quad (71)$$

이를 통해 0에 해당하는 값인 계산의 기계오차와 가까운 4.0×10⁻¹⁵이 최하위 고유치로 얻어졌다. 그림 12에는 그 고유벡터가 도시되었는데, α는 회전축의 자유회전에 해당 한다.

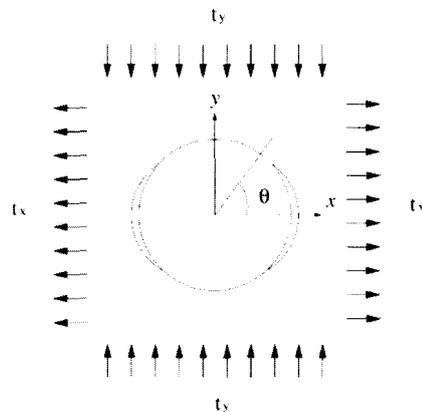


그림 13 등분포 하중 $t_x = 1$ 과 $t_y = -1$ 이 가해진 원형 함입

6.3. 압축을 받고 있는 원형 함입물

이번에는 재료 내부에 존재하는 원형 함입물을 대상으로 한다. 이 함입물은 모재와는 접촉되지 않았지만 같은 재료로 가정하였다. 이 문제의 해는 Airy의 응력함수와 푸리에 변환을 이용하여 구할 수 있다 (Keer *et al.*, 1973). 그림 13에 이 문제가 도시되었다. 모재와 함입물 사이에는 접촉력도 없고 마찰도 없기 때문에 계면에 수직인 응력만 존재하며, 이는 압축응력이거나 0이 된다. 0이 되는 경우

는 계면이 벌어지는 경우에 해당한다.

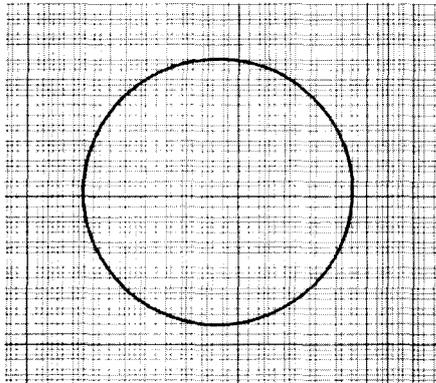


그림 14 그림 13 원형 함입 문제의 요소망

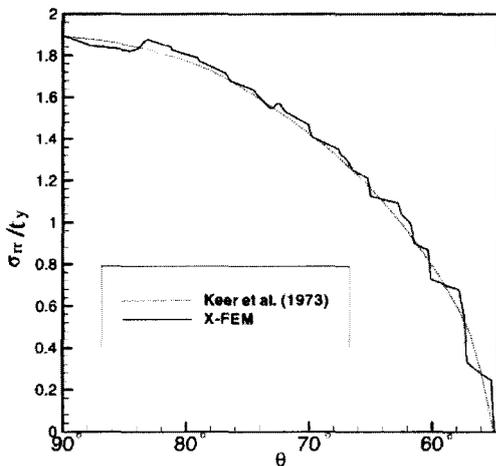


그림 15 계면의 수직응력 비교

$t_x = 1, t_y = 1$ 가 모재에 작용하고 있으며, 그 재료상수는 탄성계수 $E=1$, 포아송상수 $\nu=0.0$ 를 모재와 함입물에 공통적으로 사용하였다. 이 문제의 요소망은 그림 14에 도시되었는데, 여기서 굵은 선은 두 부분이 서로 접촉상태에 있을 때 접선방향이나 전체변위의 불연속면을 나타낸다. 이 불연속면은 요소망과는 독립적이며, 해당 거리함수를 나타내기 위해 유한요소 형상함수를 사용하지 않고 원을 직접 사용하였다.

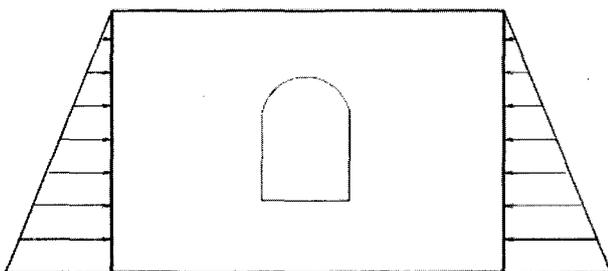


그림 16 암반 절리 문제 (Belytschko, Plesha et al., 1984)

본 기법을 통해 계산된 계면 수직응력과 해석적인 해 (Keer et al., 1973)를 그림 15에 비교도시하였다. 함입물이 모재에서 떨어지는 부분을 제외하고 두 결과가 서로 잘 일치하였다. 이 오차 대해서는 응력이 계면이 아닌 수치적분 점에서 계산되었기 때문인 것으로 사료된다.

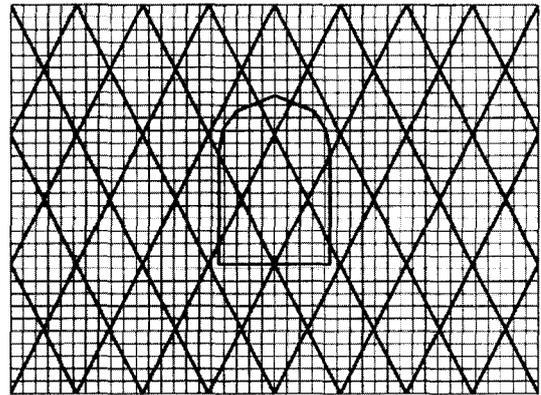


그림 17 그림 16 암반 절리 문제의 요소망. 여기서 터널은 해당 적분점을 제거하여 모델하였다 (Daux, Moes et al., 2000).

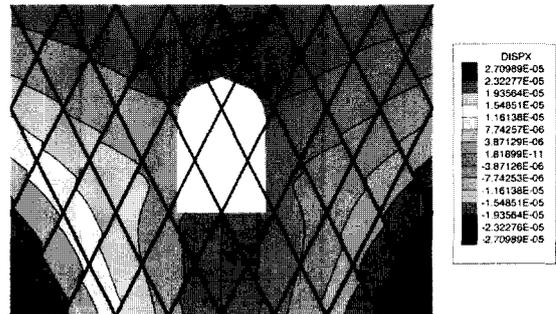


그림 18 암반 절리 문제의 횡변위

6.4 암반의 절리

본 기법의 또 다른 응용 예는 절리가 있는 암반에 위치하는 터널이다. 그림 16에 이 문제가 예시되었으며, (Belytschko et al., 1984)에서 연구된 바 있다.

이 문제의 유한요소 요소망은 그림 17에 있는데, 이 요소망은 절리의 방향이나 터널과는 전적으로 무관하게 배치되었다. 이 문제에 관한 기법은 (Daux, Moes et al., 2000)에서 얻을 수 있다. 터널에 해당하는 부분의 수치적분점은 포함시키지 않아서 터널을 모델하였다.

절리를 접선방향 불연속으로 모델하고 여기에 접선방향의 강성을 더한 다음 (Belytschko et al., 1984) 정적 선형 해석을 수행하였다. 비선형 해석을 이용하면, 절리의 분리도 가능할 것으로 판단된다. 그림 18에 도시된 x 방향 변위의 컨투어와 같이 절리를 중심으로 변위의 불연속이 관

찰되었다.

7. 고찰 및 결론

유한요소 요소망과는 독립되게 불연속면을 나타낼 수 있는 기법을 일반화하였다. 불연속면을 나타내기 위해 거리함수를 사용하였으며, 이의 절점치 만을 통해 불연속면의 표현이 가능하다. 더구나, 이러한 기술은 레벨셀 방법과 연계하여 사용될 수 있으며, 불연속면 위치의 천이를 나타낼 때 매우 유용하다.

본 기법의 주요 약점은 약형의 수치적분에 연관되어 있다. 불연속면이 존재하는 요소를 적분하기 위해 조정이 필요한데, 이 연구에서는 다소 불편하지만 해당 요소를 작은 삼각형으로 재구성하여 적분하였다 (역자주: 이 재구성은 단지 수치 해석적 목적이며, 약형에는 전혀 영향을 주지 않는다). 이를 극복하기 위해 더욱 간단한 방법이 개발될 필요가 있다.

본 기법의 적용 예로서, 균열성장, 회전축 베어링, 비부착 합입, 암반절리를 제시하였으며, 상변화, 충격과 추적, 유체-고체 상관 등의 흥미있는 예에도 본 기법을 적용 가능하다. 본 기법의 간편성 때문에, 요소망 재구성이 제거되어야 할 필요성이 있는 여러 정적 혹은 천이하는 불연속 문제들에 큰 가능성을 가지고 있는 것으로 판단된다.

감사의 글

이 연구는 미국해양연구부의 지원을 받아 이루어졌습니다. 한국말 번역은 고려대학교 신입교원정착연구비의 지원을 받았습니다.

참 고 문 헌

1. Armero, F. and K. Garikipati (1996). *Analysis of strong-discontinuities in elastic solids with applications to the finite element simulation of strain localization problems*. Proceedings of Engineering Mechanics.
2. Belytschko, T. and T. Black (1999). "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45(5): 601-620.
3. Belytschko, T., H. Chen, J. Xu and G. Zi (2003). "Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity with a new discontinuous enrichment."

- International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58(12): 1873-1905.
4. Belytschko, T., W. K. Liu and B. Moran (2000). "Nonlinear finite elements for continua and structures.", John Wiley & Sons Ltd, New York.
5. Belytschko, T., Y. Y. Lu and L. Gu (1994). "Element-free Galerkin methods." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37(2): 229-256.
6. Belytschko, T., M. Plesha and C. Dowding (1984). "A computer method for stability analysis of caverns in jointed rock." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 8: 473-492.
7. Daux, C., N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar and T. Belytschko (2000). "Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48: 1741-1760.
8. Duarte, C. A., O. N. Hamzeh, T. J. Liszka and W. W. Tworzydlo (2001). "A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(15-17): 2227-2262.
9. Keer, L., J. Dundurs, Kitattikomol (1973). "Separation of a smooth circular inclusion from matrix." *International Journal of Engineering Science* 11: 1221-1233.
10. Krongauz, Y. and T. Belytschko (1998). "EFG approximation with discontinuous derivatives." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 41(7): 1215-1233.
11. Melenk, J. M. and I. Babuska (1996). "The partition of unity finite element method: Basic theory and application." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139(1-4): 289-314.
12. Moes, N., J. Dolbow and T. Belytschko (1999). "A finite element method for crack growth without remeshing." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46(1): 131-150.
13. Oliver, J. (1995). "Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models." *Computational Mechanics* 17: 49-61.
14. Oliver, J. (1996). "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive

- equations, part 1: fundamentals. part 2: numerical simulation." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39: 3575-3624.
15. Rao, V. S., T. J. Hughes, *et al.*, (2000). "On modeling thermal oxidation of silicon II: numerical aspects." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47(1): 359-377.
 16. Sethian, J. A. (1999). *Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and material science*. Cambridge, U.K, Cambridge University Press.
 17. Stolarska, M., D. L. Chopp, *et al.*, (2001). "Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51(8): 943-960.
 18. Strouboulis, T., K. Copps, *et al.*, (2000). "The generalized finite element method: An example of its implementation and illustration of its performance." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47(8): 1401-1417.
 19. Sukumar, N., D. L. Chopp, N. Moes and T. Belytschko (2000). "Modelling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190(46-47): 6183-6200.
 20. Zi, G. and T. Belytschko (2003). "New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57: 2221-2240.
 21. Zi, G., J.-H. Song, E. Budyn, S.-H. Lee and T. Belytschko (2004). "A method for growing multiple cracks without remeshing and its application to fatigue crack growth." *Modelling and Simulations in Materials Science and Engineering*: in pass. 