

# 인도행렬에 의한 축대칭 원통형 쉘의 해석

## An Analysis of Axisymmetric Cylindrical Shell by the Leading Matrix Method

이 관 희†

박 준 용\*

김 우 중\*\*

Lee, Kwan-Hee

Park, Joon-Yong

Kim, Woo-Jung

(논문접수일 : 2003년 11월 4일 ; 심사종료일 : 2004년 5월 31일)

### 요 지

본 연구의 목적은 축대칭 하중을 받는 원통형 쉘의 엄밀해를 구하는데 있어서, 간략하면서도 엄밀한 해를 구하는 방법을 제시하고자 하는데 있다. 이는 임의 형상의 구조해석을 위한 강력한 도구이긴 하지만 여전히 근사해적인 유한요소법에 대체될 수 있을 것이다. 이를 위해 본 논문은 반복법의 일종인 인도행렬법을 이용한 절점역계의 분배방식을 사용하였다. 원통형 쉘의 분배와 전달인자는 탄성지반상의 보에 대한 미분방정식으로부터 구해진 것이다. 이러한 방법을 축대칭 집중하중과 정수압을 받는 원통형 쉘에 각각 적용해 보았고, 그 결과는 BEF 이론해와 비교할 때 만족할 만 하였다.

**핵심용어** : 유사탄성지반보, 전달행렬, 분배행렬, 인도행렬

### Abstract

The aim of this study is focused on getting an almost exact solution which is the simplicity and exactness of an axisymmetrically loaded cylindrical shell. This method replaces the finite element method which is a very powerful tool for analysis of any kind of structure which has an arbitrary shape, but is still a numerical analysis. Instead, this study uses the method of distribution of end actions which is a kind of iteration technique to implement the leading matrix method. The distribution and carry-over factors of a cylinder are calculated by the theory of a differential equation of a beam on an elastic foundation. The results are satisfactory when this method is applied to a cylinder that is subjected to a concentrated load and hydrostatic pressure when compared with the BEF analogy separately.

**keywords** : BEF analogy, carry-over matrix, distribution matrix, leading matrix

## 1. 서 론

최근 컴퓨터의 발달로 유한요소법을 비롯한 연립방정식으로 표현되는 각종 해법들에 의해 많은 절점과 자유도수로 구성된 복잡한 구조를 비교적 쉽게 해석할 수 있게 되었다. 그러나 이러한 해법들은 그 해를 구하는데 있어서 비록 엄밀해에 접근시킬수는 있으나 여전히 근사해법의 태두리를 벗어날 수 없었고, 방대한 연립방정식의 해를 구하는데 많은 시간과 노력이 요구되고 있다. 이러한 문제를

해결하는데 있어서 Hardy Cross의 분배 개념과 같은 절점 불균형 역계 (unbalanced end actions)를 조정하는 이론이 매우 유리하다. 그 이유는 절점 불균형역계의 조정 즉 분배 전달은 처짐각법이나 유한요소법 등과 같은 다른 해법과는 달리 해를 구하기 위하여 연립방정식을 풀지 않고 되풀이법의 기교에 의한 연속적 점진 접근법에 의하여 그 해를 구하기 때문이다. 그러나 절점 불균형역계의 무한 회수 분배는 기존 Hardy Cross의 분배개념<sup>1),2)</sup>을 사용하는 한 사실상은 불가능하고 변위의 처리문제 등은 절점 불

† 정회원 · 거창전문대학 건설환경시스템과 부교수  
전화: 055-940-2553 ; Fax: 055-940-2559  
E-mail: khlee@kc.ac.kr

\* 정회원 · 거창전문대학 건설환경시스템과 겸임교수

\*\* 정회원 · 진주산업대학 토목공학과 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2004년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

균형역계의 조정이 가지는 큰 단점이라 할 수 있다. 이러한 절점 불균형역계의 무한회수 분배를 현실화하기 위하여 기하급수의 특성에서 유도된 부분인도행렬(partial leading matrix)과 인도행렬(leading matrix)의 개념이 최근의 몇몇 사람들에 의해 연구되었는데,<sup>3)-5)</sup> 이같은 인도행렬의 개념은 절점 불균형역계들을 무한회수 분배한 후 각 절점 불균형역계의 합인 절점 총조정불균형역계(total adjusted unbalanced end actions)를 구하여 이를 한꺼번에 분배 전달하는 방법을 사용하여 계산시간을 단축시키면서도 보다 엄밀해에 가까운 해를 얻을 수 있게 되었으며 연속보,<sup>6),7)</sup> 평면뼈대,<sup>8),9)</sup> 탄성지반상 격자구조<sup>5),10),11)</sup> 등 최근까지의 다양한 뼈대구조들의 해석에서 좋은 결과를 얻었다.

본 연구는 그 동안 뼈대구조에만 적용되어왔던 인도행렬의 개념을 축대칭 원통형 쉘에 적용함으로써 쉘구조에 대한 해석을 엄밀하면서도 간략화 시켜 보려는데 그 목적이 있다.

2. 전파행렬

2.1 전달행렬

2.1.1 축대칭 원통형 쉘의 단순화

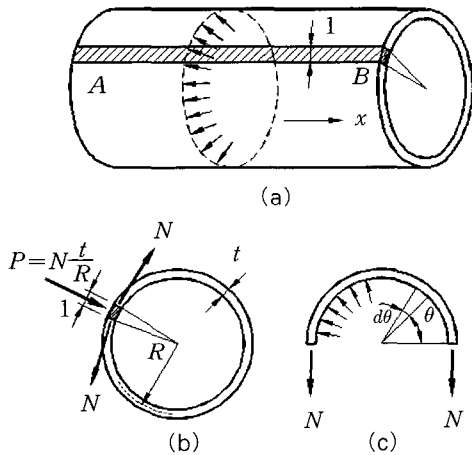


그림 1 원통형 쉘의 종방향 띠

그림 1(b)와 같이 축대칭 내압을 받는 반지름 R인 원통형 쉘의 미분 방정식은 식(1)과 같다.

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{Et}{R^2} y = 0 \tag{1}$$

여기서,  $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

한편, 탄성지반상의 보의 처짐에 관한 미분방정식<sup>12)</sup>은 아래와 같이 주어진다.

$$EI_z \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = 0$$

탄성지반상의 보의 미분방정식과 축대칭 원통형 쉘의 미분방정식 식(1)의 유사성으로부터 보의 휨강성계수  $EI_z$ 와 지반반력계수  $k$ 를 각각 쉘의 휨강성계수  $D$ 와  $Et/R^2$ 으로 치환함으로서 원통형 쉘을 탄성지반위에 놓인 보로 계산할 수 있다. 이를 유사탄성지반보(Beam on elastic foundation analogy : BEF analogy)라고 한다.

식(1)의 일반해를 구하면 식(2)와 같이 된다.

$$y = C_1 e^{\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{\beta x} \sin \beta x + C_3 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_4 e^{-\beta x} \sin \beta x \tag{2}$$

여기서,  $\beta = \sqrt[4]{\frac{Et}{4DR^2}} = \sqrt[4]{3(1-\nu)^2} \frac{1}{\sqrt{Rt}}$

경계조건에 의한 적분상수를 구하기 위하여 식(2)를 차례로 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \beta \varphi_1 + C_2 \beta \varphi_2 - C_3 \beta \varphi_3 + C_4 \beta \varphi_4 \tag{3}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = C_1 (-2\beta^2) \lambda_1 + C_2 (2\beta^2) \lambda_2 + C_3 (2\beta^2) \lambda_3 - C_4 (2\beta^2) \lambda_4 \tag{4}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = C_1 (-2\beta^3) \varphi_2 + C_2 (2\beta^3) \varphi_1 + C_3 (2\beta^3) \varphi_3 - C_4 (2\beta^3) \varphi_4 \tag{5}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad \lambda_1 = e^{\beta x} \sin \beta x \\ \varphi_2 &= e^{\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad \lambda_2 = e^{\beta x} \cos \beta x \\ \varphi_3 &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad \lambda_3 = e^{-\beta x} \sin \beta x \\ \varphi_4 &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x), \quad \lambda_4 = e^{-\beta x} \cos \beta x \end{aligned}$$

2.1.2 축대칭 원통형 쉘의 일반해

그림 2(a)와 같은 하단이 고정된 축대칭 원통형 쉘의 일반해를 구하기 위해 자유단  $i$ 에 집중하중  $P_{iy}$ 와  $M_{iz}$ 가 작용할 때의 경계조건을 적용하면 식(6)과 같다.

$$\begin{aligned} x = L \text{ 일 때, } & y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0 \\ x = 0 \text{ 일 때, } & \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P_{iy}}{D}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{iz}}{D} \end{aligned} \tag{6}$$

위의 경계조건을 식(2), 식(3), 식(4) 및 식(5)에 대입하면 식(7)이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 C_1\lambda_2(L) + C_2\lambda_1(L) + C_3\lambda_4(L) + C_4\lambda_3(L) &= 0 \\
 C_1\beta\rho_1(L) + C_2\beta\rho_2(L) - C_3\beta\rho_3(L) + C_4\beta\rho_4(L) &= 0 \\
 C_1(-2\beta^3) + C_2(2\beta^3) + C_3(2\beta^3) + C_4(2\beta^3) &= \frac{P_{iy}}{D} \\
 C_3(2\beta^3) - C_4(2\beta^3) &= \frac{M_{iz}}{D}
 \end{aligned} \tag{7}$$

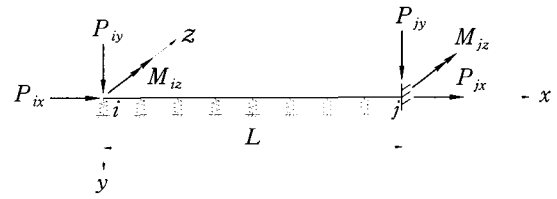


그림 3 요소 ij의 역계

식(7)을 행렬로 표시하면, 식(8)과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \lambda_2(L) & \lambda_1(L) & \lambda_4(L) & \lambda_3(L) \\ \beta\rho_1(L) & \beta\rho_2(L) & -\beta\rho_3(L) & \beta\rho_4(L) \\ -2\beta^3 & 2\beta^3 & 2\beta^3 & 2\beta^3 \\ 2\beta^3 & -2\beta^3 & 2\beta^3 & -2\beta^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{iy}/D \\ M_{iz}/D \end{Bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} \tag{10}$$

$$\text{또는, } \{p_j^s\} = [q_{ij}^s] \{p_i^s\} \tag{11}$$

또는

$$[B^s] \{C^s\} = \{W^s\}$$

여기서,  $[B^s]$  : 원통형 쉘의 경계조건 행렬

$\{C^s\}$  : 원통형 쉘의 적분상수 행렬

$\{W^s\}$  : 원통형 쉘의 하중 행렬

따라서 적분상수행렬은 식(9)와 같이 구하여 진다.

$$\{C^s\} = [B^s]^{-1} \{W^s\} \tag{9}$$

식(10)과 식(11)에서 행렬  $[q_{ij}^s]$ 를 원통형 쉘요소 ij 부재의 i단에서 j절점으로의 전달행렬이라 한다.  $[q_{ij}^s]$ 의 제 1열은 그림 4를 고려하면, 식(12)가 됨이 분명하다.

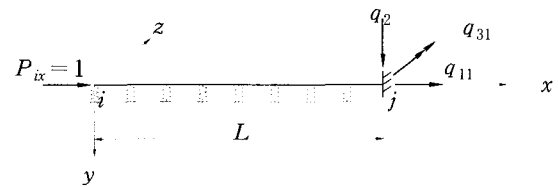


그림 4 i단의 단위 축하중

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= 1 \\ q_{21} &= 0 \\ q_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

그리고,  $[q_{ij}^s]$ 의 제 2열은 그림 5를 고려하면 아래와 같은 방법으로 구하여진다.

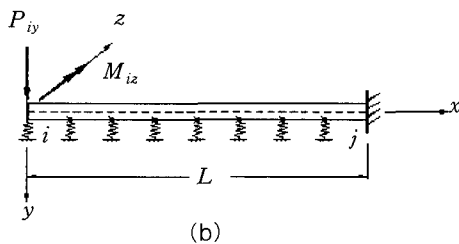
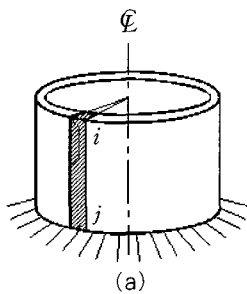


그림 2 하단고정 원통형 쉘의 띠

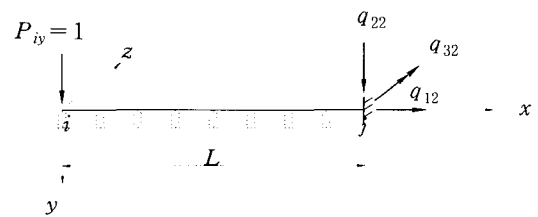


그림 5 i단의 단위 수직하중

$$\left. \begin{aligned} P_{ix} &= 0 \\ P_{iy} &= 1 \\ M_{iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

### 2.1.3 전달행렬의 유도

그림 3에서 자유단 i에  $P_{ix}$ ,  $P_{iy}$ ,  $M_{iz}$ 가 작용할 때, 자유단 i가 j절점에 주는 역계  $P_{jx}$ ,  $P_{jy}$ ,  $M_{jz}$ 라고 할 때, 두 역계간에 식(10)과 같은 관계가 성립한다.

그림 5와 식(13)에 대한 경계조건을 고려하면, 식(14)를 얻을 수 있다.

$$x = L \text{ 일 때, } y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = 0 \text{ 일 때, } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{D}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (14)$$

따라서, 이 경우의 하중 행렬을  $\{W_1^s\}$ 이라 하면,  $\{W_1^s\}$ 은 식(15)가 된다.

$$\{W_1^s\} = \{0 \quad 0 \quad 1/D \quad 0\}^T \quad (15)$$

경계조건행렬  $[B^s]$ 는 식(8)와 동일하므로  $\{W_1^s\}$ 에 대응하는 적분상수행렬  $\{C_1^s\}$ 은 식(16)과 같이 구할 수 있다.

$$\{C_1^s\} = [B^s]^{-1} \{W_1^s\} \quad (16)$$

여기서 구하여진  $\{C_1^s\}$ 을 식(4)와 식(3)에 대입하면 전달행렬  $[q_{ij}^s]$ 의 제 2열은 식(17)과 같이 구하여 진다.

$$\left. \begin{aligned} q_{12} &= 0 \\ q_{22} &= D \frac{d^3y}{dx^3} \quad (x=L, \{C^s\} = \{C_1^s\}) \\ q_{32} &= D \frac{d^2y}{dx^2} \quad (x=L, \{C^s\} = \{C_1^s\}) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

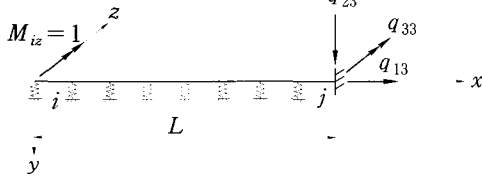


그림 6 i단의 단위 모멘트 하중

같은 방법으로, 그림 6과 경계조건을 고려하면 전달행렬  $[q_{ij}^s]$ 의 제 3열은 식(18)과 같이 구하여 진다.

$$\left. \begin{aligned} q_{13} &= 0 \\ q_{23} &= D \frac{d^3y}{dx^3} \quad (x=L, \{C^s\} = \{C_2^s\}) \\ q_{33} &= D \frac{d^2y}{dx^2} \quad (x=L, \{C^s\} = \{C_2^s\}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

## 2.2 분배행렬

그림 7에서 보는바와 같이 i절점에 역계  $\{P_i(I)\}$ 가 작용했을 때, ij부재의 i단 작용 역계  $\{p_{ij}(I)\}$ 를 분배행렬  $[D_{ij}]$ 를 이용하여 표시하면 식(19)와 같이 된다.

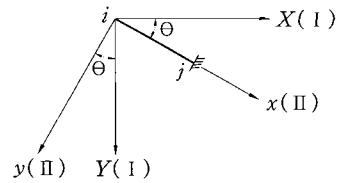


그림 7 i절점에서의 모멘트 분배

$$\{p_{ij}(I)\} = [D_{ij}] \{P_i(I)\} \quad (19)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{P(I)\} &= \{F_x \quad F_y \quad M_z\}^T : \text{전체좌표계 벡터량} \\ \{P(II)\} &= \{F_x \quad F_y \quad M_z\}^T : \text{요소좌표계 벡터량} \end{aligned}$$

한편, ij부재의 i단 작용 역계  $\{p_{ij}(II)\}$ 는 ij부재의 강성행렬  $[K_{ij}(II)]$ 와 i단의 변위  $\{\delta_i(II)\}$ 을 고려하면 식(20)과 같다.

$$\{p_{ij}(II)\} = [K_{ij}^s(II)] \{\delta_i(II)\} \quad (20)$$

$$\text{여기서, } [K_{ij}^s(II)] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

식(20)에서 행렬  $[K_{ij}^s(II)]$ 를 원통형 쉘요소 ij부재의 요소좌표계의 강성행렬이라 하며,  $[K_{ij}^s(II)]$ 의 제1열은 그림 8을 고려하면 식(21)과 같이 된다.

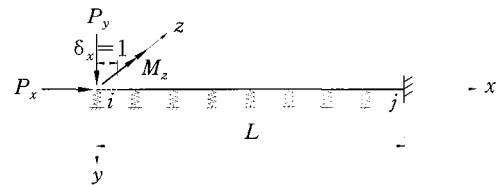


그림 8 i단의 단위 축방향 변위

$$\left. \begin{aligned} k_{11} &= \frac{EA}{L} \\ k_{21} &= 0 \\ k_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

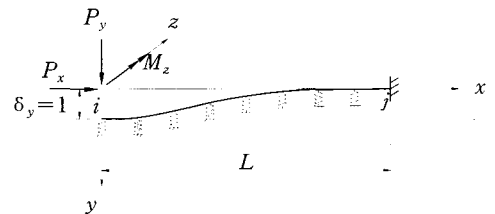


그림 9 i단의 단위 연직방향 변위

그리고,  $[K_{ij}^s(\Pi)]$ 의 제 2열은 그림 9에서 경계조건 식(22)로부터 식(23)을 얻을 수 있고, 식(8)로부터 적분상수를 식(24)에 의해서 구한 후, 미분방정식의 일반해를 나타내는 식(2)를 이용하여 구하면 식(25)와 같다. 즉,

$$\begin{aligned} x = L \text{ 일 때, } y = 0, \quad \frac{dy}{dx} &= 0 \\ x = 0 \text{ 일 때, } y = 1, \quad \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\{d_1^s\} = \{ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \}^T \quad (23)$$

$$\{C_3^s\} = [B_{31}^s]^{-1} \{d_1^s\} \quad (24)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [B_{31}^s] &= \begin{bmatrix} \lambda_2(L) & \lambda_1(L) & \lambda_4(L) & \lambda_3(L) \\ \beta\varphi_1(L) & \beta\varphi_2(L) & -\beta\varphi_3(L) & \beta\varphi_4(L) \\ \lambda_2(0) & \lambda_1(0) & \lambda_4(0) & \lambda_3(0) \\ \beta\varphi_1(0) & \beta\varphi_2(0) & -\beta\varphi_3(0) & \beta\varphi_4(0) \end{bmatrix} \\ \left. \begin{aligned} k_{12} &= 0 \\ k_{22} &= D \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (x=0, \{C^s\} = \{C_3^s\}) \\ k_{32} &= D \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (x=0, \{C^s\} = \{C_3^s\}) \end{aligned} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

그리고,  $[K_{ij}^s(\Pi)]$ 의 제 3열은 그림 10에서 경계조건으로부터 식(26)을 얻을 수 있고, 식(8)로부터 적분상수를 식(27)에 의해서 구한 후, 미분방정식의 일반해를 나타내는 식(2)를 이용하여 구하면 식(28)과 같다. 즉,

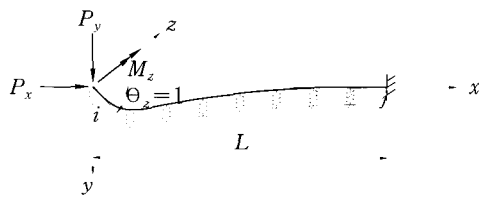


그림 10 *i*단의 단위 회전변위

$$\{d_2^s\} = \{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \}^T \quad (26)$$

$$\{C_4^s\} = [B_{41}^s]^{-1} \{d_2^s\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{13} &= 0 \\ k_{23} &= D \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (x=0, \{C^s\} = \{C_4^s\}) \\ k_{33} &= D \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (x=0, \{C^s\} = \{C_4^s\}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

*i*단에 모이는 부재의 역계를 총합한 역계  $\Sigma\{p_{ij}(I)\}$ 는 식(29)와 같이 표현되며, 식(20)을 전체좌표계로 변환한 후, 식(29)의  $\{\delta_i(I)\}$ 를 대입하면 식(30)을 얻을 수 있고,

식(30)과 식(19)를 비교해 보면 원통형 셸요소의 분배행렬  $[D_{ij}^s]$ 는 식(31)과 같이 된다.

$$\Sigma\{p_{ij}(I)\} = \Sigma[k_{ij}^s(I)] \{\delta_i(I)\} = \{P_i(I)\} \quad (29)$$

여기서,  $[k_{ij}^s(I)] = [T_{ij}]^T [K_{ij}^s(\Pi)] [T_{ij}]$

$$\{\delta_i(I)\} = \Sigma[k_{ij}^s(I)]^{-1} \{P_i(I)\}$$

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{p_{ij}(I)\} &= [T_{ij}]^T [K_{ij}^s(\Pi)] [T_{ij}] \{\delta_i(I)\} \\ &= [T_{ij}]^T [K_{ij}^s(\Pi)] [T_{ij}] \Sigma[k_{ij}^s(I)]^{-1} \{P_i(I)\} \end{aligned} \quad (30)$$

$$[D_{ij}^s] = [k_{ij}^s] [\Sigma[k_{ij}^s]]^{-1} \quad (31)$$

최종적으로 원통형 셸의 전파행렬은 다음과 같이 주어진다. *i*단에 임의의 역계  $\{P_i(I)\}$ 가 작용할 때, *ij*부재의 *i*단이 *j*단에 주는 힘을  $\{p_j(I)\}$ 라고 하면 다음의 식(32)와 같이 표현된다.

$$\{p_j(I)\} = [\theta_{ij}^s] \{P_i(I)\} \quad (32)$$

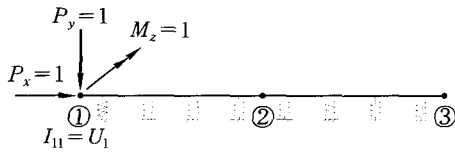
여기서,  $[\theta_{ij}^s]$ 를 *i*절점에서 *j*절점으로의 원통형 셸의 전파행렬이라 하며, 전파행렬은 식(10)의 전달행렬과 식(31)의 분배행렬의 곱으로 유도되며 식(33)과 같다.

$$[\theta_{ij}^s] = [T_{ij}]^T [q_{ij}^s] [T_{ij}] [D_{ij}^s] \quad (33)$$

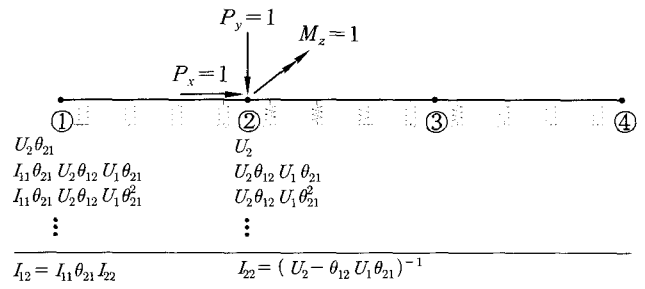
### 3. 인도행렬

인도행렬은 각 절점에 단위역계 ( $[U_i]$ )를 적용시켰을 때 Cross분배법의 과정에 의해 조정을 거친 역계를 행렬로 표시한 것으로, 탄성지반상 원통형 탱크의 일부구간에 대한 인도행렬은 그림 11과 같이 나타내어진다. 즉, 그림 11(a)와 같이 ①의 1개의 절점으로 구성된 탄성지반 위에 놓인 임의의 보의 부분을 취하여 ①절점에 단위역계 *U*를 작용시키면 그때의 ①절점의 집단 조정값  $I_{11} = U_1$ 됨이 분명하다. 그림 11에서 단위역계 ( $[U_i]$ )는 식(14)와 같고,  $[\theta_{ij}^s]$ 는 식(33)에서 구한 전파행렬을 나타낸다.

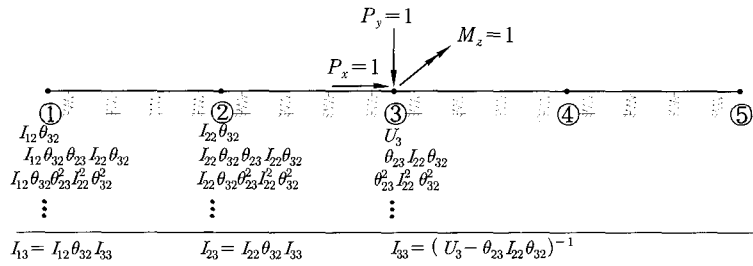
$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n = \begin{bmatrix} P_x = 1 & 0 & 0 \\ 0 & P_y = 1 & 0 \\ 0 & 0 & M_z = 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$



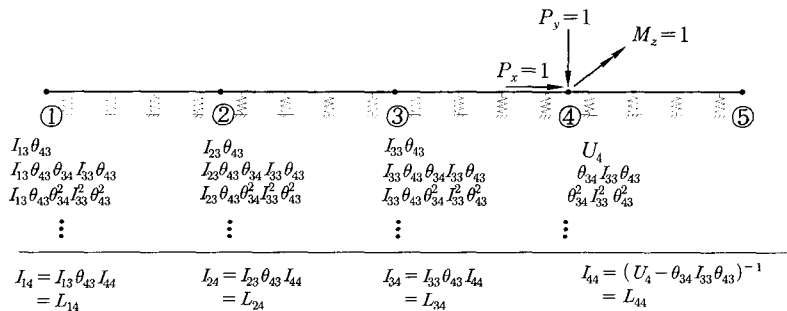
(a)



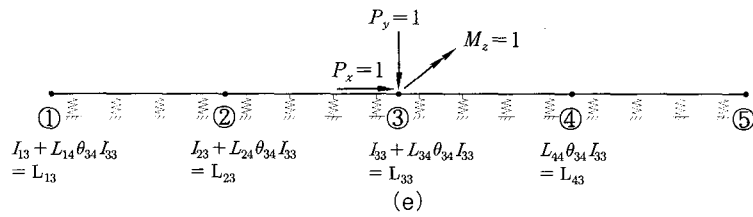
(b)



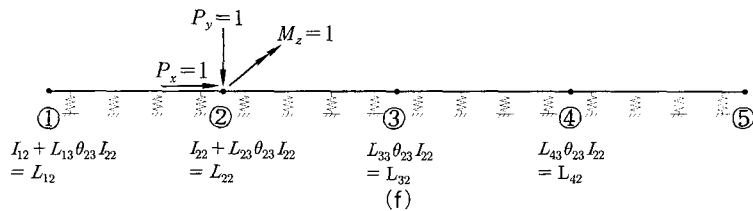
(c)



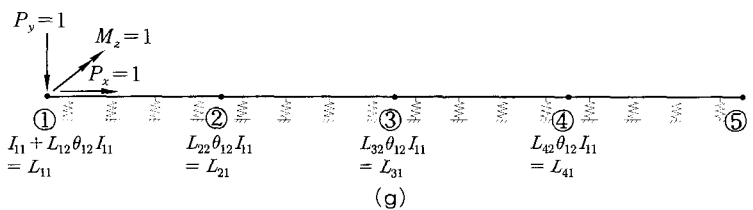
(d)



(e)



(f)



(g)

그림 11 탄성지반상 보의 인도행렬

그림 11(b)와 같이 ①, ②의 2개 절점으로 구성된 탄성지반 위에 놓인 격자보의 부분을 취하여 ②절점에 단위역계  $U$ 를 작용시키면 ②절점에서 ①절점으로 전파되는 전파행렬로 인하여  $\theta_{21}$ 의 크기가 ①절점으로 전파되어 간다. ①절점으로 전파된  $\theta_{21}$ 은 ①절점에서 ②절점으로 전파되는 전파행렬  $\theta_{12}$ 로 인하여 ①절점에서  $\theta_{12}\theta_{21}$ 크기를 ②절점으로 다시 전파시킨다. ②절점으로 전파된  $\theta_{12}\theta_{21}$ 은 ②절점 전파행렬  $\theta_{21}$ 에 의하여 ①절점으로  $\theta_{21}\theta_{12}\theta_{21}$ 의 크기를 다시 ①절점으로 전파하게 된다. ①절점으로 전파되어  $\theta_{21}\theta_{12}\theta_{21}$ 은 ①절점의 전파행렬  $\theta_{12}$ 로 인하여 ①절점으로부터  $\theta_{12}\theta_{21}\theta_{12}\theta_{21}$ 를 다시 ②절점으로 전파한다.

이상과 같은 과정을 ②, ①절점간에 되풀이하면 ②절점에 단위역계가 작용할 때에 ②절점에 발생하는 집단 조정값  $I_{22}$ 는 식(35)와 같이 된다.

$$I_{22} = U_2 + \theta_{12}\theta_{21} + (\theta_{12}\theta_{21})^2 + (\theta_{12}\theta_{21})^3 + \dots \quad (35)$$

식(35)의 양변에  $\theta_{12}\theta_{21}$ 을 곱하면 식(36)이 된다.

$$I_{22}\theta_{12}\theta_{21} = \theta_{12}\theta_{21} + (\theta_{12}\theta_{21})^2 + (\theta_{12}\theta_{21})^3 + \dots \quad (36)$$

식(35)에서 식(36)을 빼면 식(37)이 된다.

$$I_{22}(U_2 - \theta_{12}\theta_{21}) = U_2 - (\theta_{12}\theta_{21})^\infty \quad (37)$$

여기서  $(\theta_{12}\theta_{21})^\infty$ 는 ②절점의 무한 번째의 조정량이 되는데, ① 절점이 불안정 절점이 아닌 이상  $(\theta_{12}\theta_{21})^\infty \rightarrow 0$ 됨이 분명하므로, 결국 식(36)에  $(U_2 - \theta_{12}\theta_{21})^{-1}$ 을 곱하면 ②절점에 단위역계 작용시 ②, ①절점간에 집단조정을 실시하였을 때의 ②절점의 조정값  $I_{22}$ 는 식(38)과 같이 된다.

$$I_{22} = (U_2 - \theta_{12}\theta_{21})^{-1} \quad (38)$$

②절점에 단위역계 작용시 ②, ①절점간의 집단조정에 의한 ①절점의 조정값  $I_{12}$ 는 식(39)가 된다.

$$I_{12} = \theta_{21}(U_2 - \theta_{12}\theta_{21})^{-1} = \theta_{21}I_{22} \quad (39)$$

그림 10의 과정을 거쳐서 구하고자 하는  $n$ 개의 절점을 갖는 탄성지반상 보에 대한 인도행렬은 식(40)과 같이 나타내어진다.

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdot & \cdot & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (40)$$

외력에 의해 각 절점에 생기는 최초의 불균형역계 ( $[UF]$ )는 단위역계의 무한회수 분배조정으로 구해진 인도행렬 ( $[L]$ )에 의해 집단조정됨으로써 총조정불균형역계 ( $[TAUF]$ )는 식(41)과 같이 나타내어 진다.

$$[TAUF] = [L][UF] \quad (41)$$

최종적으로 부재단 작용역계는 인도행렬에 의해 구해진 각 절점의 총조정불균형역계를 최종적으로 한번만 분배전달하면 구하고자 하는 부재단의 작용역계가 구해지는데,  $ij$ 부재의 부재단 작용역계는 식(42)와 같이 나타내어 진다.

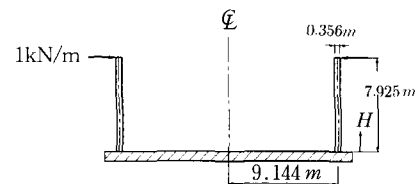
$$\{p_{ij}(I)\} = [D_{ij}][TF_i] - [\theta_{ji}][TF_j] \quad (42)$$

$$\{p_{ji}(I)\} = [D_{ji}][TF_j] - [\theta_{ij}][TF_i]$$

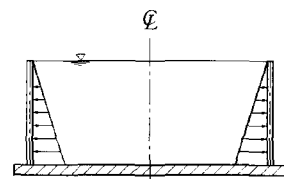
### 3. 계산 예 및 결과 분석

#### 3.1 계산 예

해석한 원통형 셸은 그림 12(a)와 같이 반경이 9.144m, 셸 두께가 356mm, 높이가 7.925m인 콘크리트 구조물이며, 탄성계수  $E = 3.0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ 이고 포아송 비  $\nu = 0.25$ 이며 하중은 그림 12(a)와 같이 원통형 셸의 최상단부에 집중하중 1kN/m를 주는 경우와 그림 12(b)와 같이 단위중량이 9.81kN/m<sup>3</sup>인 정수압(淨水壓)을 받을 때의 두가지 경우를 고려하였다. 각각의 경우 자중은 무시하였다.



(a)



(b)

그림 12 축대칭 원통형 셸

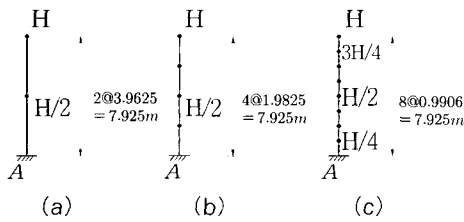


그림 13 원통형 쉘의 요소분할과 모델링

인도행렬에 의한 축대칭 원통형 쉘의 해석을 위해 그림 13에서 보는 바와 같이 원통형 쉘을 유사탄성지반상의 보로 뼈대화 시키고 이를 2요소, 4요소, 8요소씩 등분하는 경우로 각각 나누어 요소의 분할수에 따른 결과치의 수렴 정도를 비교해 보고자 하였다.

이에 대한 해석결과를 휨모멘트와 전단력에 대해 유사탄성지반보(BEF Analogy)의 이론해와 비교해 보았고 집중하중이 작용했을 경우의 결과는 표 1과 표 2에, 정수압을 받을 경우의 결과는 표 3, 표 4에 나타내었다.

표 1 축대칭 원통형 쉘의 휨모멘트 (집중하중)

H	Bending moments ( kN·m/m )			
	Leading matrix			BEF analogy
	2 elements	4 elements	8 elements	
0	-2.525e-3	-2.525e-3	-2.525e-3	-2.525e-3
H/4	-	1.839e-2	1.839e-2	1.839e-2
H/2	-2.341e-2	-2.341e-2	-2.341e-2	-2.341e-2
3H/4	-	-3.324e-1	-3.324e-1	-3.324e-1
H	0.0	0.0	0.0	0.0

표 2 축대칭 원통형 쉘의 전단력 (집중하중)

H	Shear forces ( kN/m )			
	Leading matrix			BEF analogy
	2 elements	4 elements	8 elements	
0	1.121e-2	1.121e-2	1.121e-2	1.121e-2
H/4	-	7.053e-3	7.053e-3	7.053e-3
H/2	-7.303e-3	-7.303e-3	-7.303e-3	-7.303e-3
3H/4	-	-2.028e-1	-2.028e-1	-2.028e-1
H	1.000e00	1.000e00	1.000e00	1.000e00

표 3 축대칭 원통형 쉘의 휨모멘트 (정수압)

H	Bending moments( kN·m/m )			
	Leading matrix			BEF analogy
	2 elements	4 elements	8 elements	
0	-87.787e00	-63.732e00	-62.275e00	-62.184e00
H/4	-	15.999e00	15.785e00	15.765e00
H/2	1.486e00	4.764e00	4.746e00	4.741e00
3H/4	-	-0.458e-1	-0.396e00	-0.394e00
H	0.0	0.0	0.0	0.0

표 4 축대칭 원통형 쉘의 전단력 (정수압)

H	Shear forces ( kN/m )			
	Leading matrix			BEF analogy
	2 elements	4 elements	8 elements	
0	125.890e00	100.854e00	98.926e00	98.786e00
H/4	-	1.233e00	1.253e00	1.252e00
H/2	-9.294e00	-5.803e00	-5.637e00	-5.629e00
3H/4	-	-0.369e00	-0.310e00	-0.309e00
H	0.0	0.0	0.0	0.0

### 3.2. 결과 분석

축대칭 쉘을 유한요소법과 같은 연립방정식의 풀이로 해를 구하는 기타의 해석 방법으로 해석할 경우 그 결과의 정확성은 많은 수의 요소분할이라는 과제에 의존할 수 밖에 없다. 이러한 관점에서 본 논문에서는 요소의 분할수에 따른 결과치의 수렴을 비교해 보기 위해 요소분할의 수를 증가시키면서 그 결과치를 비교하여 보았다.

축대칭 하중을 받는 하단고정 원통형 쉘의 계산 예에서 쉘의 최상단부에 집중하중을 받는 경우, 그 결과는 요소의 분할수에 관계없이 유사탄성지반보의 이론해와 일치하고 있다. 이것은 본 논문에서 제안한 방식으로 축대칭 쉘을 해석할 경우 요소의 분할 수가 극히 작더라도 엄밀해에 가까운 해를 얻을 수 있다는 것을 말해 주는 것이다. 그러나 정수압을 받는 하단 고정 원통형 쉘의 경우는 요소의 분할 수가 증가함에 따라 그 해의 정확도가 엄밀해에 가까워 짐을 알수 있는데 이는 원통형 쉘에 적용한 본 논문의 인도행렬이 단위의 하중 또는 단위의 변위로 유도된 분배행렬과 전달행렬을 사용하고 있으므로 분포하중 또는 등변분포하중을 직접적으로 경계조건 또는 하중조건으로 고려한 유사탄성지반보의 이론해와는 약간의 차이가 있는 것으로 생각된다.

### 4. 결 론

하단이 고정된 축대칭 원통형 쉘을 Cross분배개념을 기초한 탄성지반상 연속보의 인도행렬을 이용하여 해석한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 지금까지 뼈대 구조에만 적용되어 왔던 분배개념의 인도행렬을 축대칭 쉘에도 적용할 수 있음을 확인할 수 있었다.
- 2) 축대칭 쉘구조에 인도행렬을 적용시킴으로서 연립방정식을 풀지 않고도 축대칭 쉘을 해석할 수 있었다.
- 3) 축대칭 쉘구조에 인도행렬을 적용함에 있어 그 전달행렬 및 분배행렬은 이론적으로 유도된 미분방정식의 해를 사용하였으므로 그해는 엄밀해에 근접하고 있다고 할 수 있다.



4) 따라서, 본 논문에서 제안한 방법은 축대칭 쉘 구조의 해석에서 정확도를 유지하면서도 해석에 요구되는 노력을 최대한 간략화 시키는 방법이라 할 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. Hardy Cross. (1932). "Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-end Moment." *Trans. of ASEC*, 96, Paper 1793.
2. Gere, J.M., *Moment Distribution*, D.Van Nostrand Co. Inc., Princeton, N.J., 1963
3. 조현영, "복사재 트러스의 직응력 분배법에 의한 영향선의 해법", 대한토목학회지, Vol. 11, No.4, 1963.
4. 남문희, "Vierendeel Truss의 해법에 관하여", 충북대학 논문집 제 10집, 1972
5. 강미옥, "탄성지반 위에 놓인 격자 구조물의 해석." 경상대학교 석사 학위 논문, 2000
6. 남문희, "무한경간 연속보의 영향선 해법에 관한 연구", 충북대학 논문집 제8권, 1973, pp.261-267
7. 조현영, 장인덕, "탄성지지 연속량 모델에 의한 탄성지반상의 보의 해석", 부산대학교 대학원 석사논문, 1972
8. 구봉근, 남문희, "모멘트 분배법에 의한 라멘교의 영향선 해법에 관한 연구", 충북대학 논문집 제 12집, 1974
9. 남문희, "모멘트 분배법 및 분배전달행렬을 이용한 라멘의 해법에 관한 연구", 경상대학교 논문집, 23 (I), 1984, pp.151~152
10. 남문희, "지중격자 기초구조물의 탄성해법에 관한 연구", 부산대학교 석사학위 논문, 1973
11. 남문희, "탄성지반 위에 놓인 격자기초의 유한요소법과 조정방정식에 의한 해법에 관한 연구", 충북대학 논문집 제 18집, 1980
12. Hetényi, M., *Beams on elastic foundation*, University of Michigan, U.S.A., 1946, pp.1-6, 30~33, 65~67, 100~119