

비선형 두께 변분을 갖는 두꺼운 원형판과 환형판의 3차원적 진동해석

Three Dimensional Vibration Analysis of Thick, Circular and Annular Plates with Nonlinear Thickness Variation

장 승 환* 심 현 주** 강 재 훈†
Chang, Seung-Hwan Shim, Hyun-Ju Kang, Jae-Hoon
(논문접수일 : 2003년 8월 19일 ; 심사종료일 : 2004년 2월 9일)

요 지

3차원 해석법을 이용하여 반경방향으로 비선형적 두께 변분을 가진 두꺼운 원형판과 환형판의 고유진동수를 결정하였다. 수학적으로 2차원적인 전통적 판 이론과는 달리 본 연구에서는 3차원적 동 탄성방정식을 근간으로 하였다. 반경방향, 두께방향, 원주 방향으로의 변위 성분인 u_s , u_z , u_θ 를 시간에 대해서는 정현적으로, θ 에 대해서는 주기적으로, s와 z방향으로는 대수 다항식의 형태로 취하였다. 판의 위치(변형률) 에너지와 운동 에너지를 정식화하고, 리츠법을 이용하여 고유치 문제를 해결하였으며, 진동수의 최소화과정을 통해 엄밀해에 대해서 상위경계치의 진동수를 구하였다. 다항식의 차수를 증가시키면 진동수는 엄밀해에 수렴하게 된다. 판의 최하위 5개의 진동수에 대한 유효숫자 4자리까지의 수렴성 연구가 이루어졌다. 수치결과로 두께가 일정하거나, 선형적 또는 2차 곡선적 변분을 갖는 자유경계의 두꺼운 원형판과 환형판의 무차원 진동수를 제공하였다. 또한 이미 발표된 2차원적인 박판이론에 의한 결과와 본 연구의 3차원 해석에 의한 결과를 서로 비교하였다.

핵심용어 : 3차원 해석, 진동, 원형판, 환형판, 후판, 비선형 두께 변분, 리츠법

Abstract

A three dimensional (3D) method of analysis is presented for determining the free vibration frequencies and mode shapes of thick, circular and annular plates with nonlinear thickness variation along the radial direction. Unlike conventional plate theories, which are mathematically two dimensional (2D), the present method is based upon the 3D dynamic equations of elasticity. Displacement components u_s , u_z , and u_θ in the radial, thickness, and circumferential directions, respectively, are taken to be sinusoidal in time, periodic in θ , and algebraic polynomials in the s and z directions. Potential (strain) and kinetic energies of the plates are formulated, and the Ritz method is used to solve the eigenvalue problem, thus yielding upper bound values of the frequencies by minimizing the frequencies. As the degree of the polynomials is increased, frequencies converge to the exact values. Convergence to four digit exactitude is demonstrated for the first five frequencies of the plates. Numerical results are presented for completely free, annular and circular plates with uniform, linear, and quadratic variations in thickness. Comparisons are also made between results obtained from the present 3D and previously published thin plate (2D) data.

keywords : three dimensional analysis, vibration, circular plate, annular plate, thick plate, nonlinear thickness variation, ritz method

1. 서 론

대부분의 두꺼운 원형판과 환형판은 Mindlin^{1),2)}이 제안한

수학적으로 2차원적인 6개의 판이론으로 해석되어왔다. 이 Mindlin의 후판 이론에 의한 해는 일반적으로 심하게 두껍지 않은 판의 하위 진동수에 의한 횡진동에 대해서는

† 책임저자. 정희원 · 중앙대학교(서울) 공과대학 건축학부 조교수
전화: 02-820-5342 ; Fax: 02-812-4150
E-mail: jhkang@cau.ac.kr

* 중앙대학교(서울) 공과대학 기계공학부 조교수

** 중앙대학교(서울) 공과대학 건축공학과 박사과정생

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 9월 30일까지 본 학회에 보내주 시면 2004년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

비교적 정확하지만, 상위 진동수와 매우 두꺼운 판에 대해서는 그 정확성을 보장할 수 없다. 최근 엄밀한 3차원적 탄성이론에 의한 판의 연구가 활발하게 이루어 지고 있다.^{3)~13)} 그러나 이 연구들은 대부분 일정한 두께를 갖는 판의 해석에 국한하였다. 유일하게 Kang과 Leissa¹³⁾는 반경방향으로 판의 두께가 변하는 환형판을 3차원적으로 해석하였지만, 이 또한 판 두께의 변화를 선형적으로 국한하였으며, 원형판의 중심에서 발생하는 특이점으로 인해 환형판에 대한 결과만을 주었다.

판의 두께가 매우 두꺼워지면, '원형판'과 '환형판'이라는 용어는 그 의미를 상실하게 되며, '원기둥체'와 '속이 빈 원기둥'이라는 용어가 문제를 설명하는데 더 정확하다. 컴퓨터의 발전과 해석법의 효율성이 증가함에 따라 정확한 진동수와 진동형상을 구하고 2차원적인 판이론의 정확도를 검증하기 위해서 3차원 해의 중요성은 앞으로 점점 더해 갈 것이다.

적절한 두께 변분을 가진 판은 일정한 두께를 가진 판과 비교했을 때, 휨, 좌굴, 진동에 대해서 훨씬 더 큰 효율성을 가질 수 있다. 변두께를 가진 판의 2차원 이론에 의한 지배 미분방정식은 변계수를 가지게 되어 엄밀해를 구하기가 용이하지 않다. 그럼에도 불구하고 최근에 변두께를 가진 판에 관한 연구가 상당히 이루어 졌다.

2차원 판 이론을 이용하여 다양한 두께 변분과 경계조건을 가진 원형판과 환형판을 연구한 많은 문헌을 접할 수 있는데, Leissa¹⁴⁾의 책에서는 1966년도까지의 문헌이 조사되어 있으며, 판의 진동과 관련된 그의 일련의 문헌조사 논문^{15)~17)}에서는 1973년도에서 1985년도까지의 문헌연구가 이루어 졌다. 1985년도 이후 다수의 연구자^{18)~28)}에 의해서 2차원적 이론에 의한 변두께를 가진 환형판과 원형판의 연구가 수행되었다.

본 연구의 목적은 3차원 리즈해석을 이용하여 비선형적 두께 변분을 가진 두꺼운 환형판과 원형판의 정확한 고유진동수를 결정하는 것이다. 본 연구에서는 해석법의 정확성을 검증하기 위한 방편으로 수렴성 연구가 이루어 졌으며, 2차원적 판이론에 의한 타 결과와의 비교가 이루어 졌다. 본 논문에서 제공한 정확한 3차원적 결과치는 유한 요소법과 유한 차분법과 같은 다른 근사해석과 1계 또는 고계의 전단변형이론을 포함하는 2차원적 판이론에 의한 결과의 정확성을 검증하기 위한 비교의 기준으로 사용될 수 있다.

2. 해 석

그림 1은 반경방향(s)으로 비선형적으로 두께 $2h(s)$ 가

변하는 환형판을 보여 주고 있다. 이 환형판의 내반경은 r_i , 외반경은 r_o , 안쪽 모서리 두께는 $2h_i$, 바깥쪽 모서리 두께는 $2h_o$, 반경방향 폭은 $L(=r_o - r_i)$ 이다.

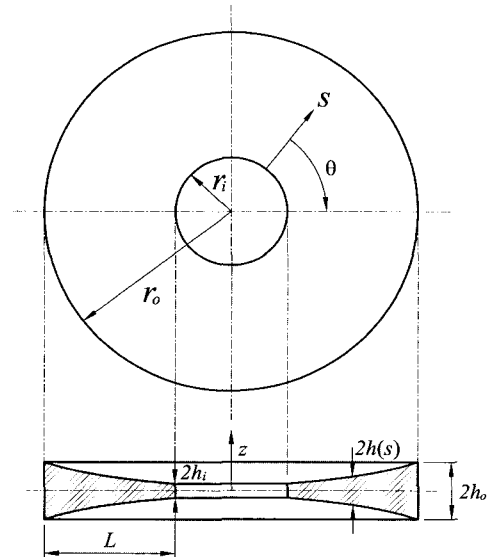


그림 1 A cross section of nonlinearly tapered annular plate and the local coordinate system (s, z, θ).

이 그림은 또한 본 연구에서 사용된 곡선 국부 좌표계 (s, z, θ)를 보여 주고 있다. 반경좌표 (s)와 두께좌표 (z)는 자기 환형판의 안쪽 모서리와 중앙면에 수직인 방향으로 측정되며, θ 는 원주각이다. 따라서 이 환형판의 정의역은

$$0 \leq s \leq L(=r_o - r_i), \quad 3 - h(s) \leq z \leq h(s), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (1)$$

이다.

텐서해석²⁹⁾을 이용하여 (s, z, θ) 좌표계로 된 3개의 운동방정식을 구하면,

$$\sigma_{ss,s} + \sigma_{sz,z} + \frac{1}{s+r_i}(\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{s\theta,\theta}) = \rho \ddot{u}_s \quad (2a)$$

$$\sigma_{sz,s} + \sigma_{zz,z} + \frac{1}{s+r_i}(\sigma_{sz} + \sigma_{z\theta,\theta}) = \rho \ddot{u}_z \quad (2b)$$

$$\sigma_{s\theta,s} + \sigma_{z\theta,z} + \frac{1}{s+r_i}(2\sigma_{s\theta} + \sigma_{\theta\theta,\theta}) = \rho \ddot{u}_\theta \quad (2c)$$

이다. 이 식에서 σ_{ij} 는 수직 ($i=j$)과 전단 ($i \neq j$) 응력 성분; u_s, u_z, u_θ 는 각각 s, z, θ 방향으로의 변위 성분; ρ 는 단위 체적 당 질량; 컴마(,)는 공간 도함수; 닷트(.)

는 시간 도함수를 의미한다.

등방성 선형 탄성재료의 텐서형 응력 (σ_{ij})과 변형률 (ϵ_{ij})과의 관계는

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij} \quad (3)$$

이며, λ 와 G 는 Lamé의 상수이며, 등방성 재료에 대해서 이 상수를 영계수 (E)와 프와송 비 (ν)로 표현하면

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

이고, $\epsilon \equiv \epsilon_{ss} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta}$ 는 변형률 텐서의 대각합이며, δ_{ij} 는 Kronecker의 delta이다.

3차원 텐서형 변형률 ϵ_{ij} 와 3개의 변위 u_s, u_z, u_θ 와의 관계식은²⁹⁾

$$\epsilon_{ss} = u_{s,s}, \quad \epsilon_{zz} = u_{z,z}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_s + u_{\theta,\theta}}{s + r_i} \quad (5a)$$

$$2\epsilon_{sz} = u_{s,z} + u_{z,s}, \quad 2\epsilon_{s\theta} = u_{\theta,s} + \frac{u_{s,\theta} - u_\theta}{s + r_i}$$

$$2\epsilon_{z\theta} = u_{\theta,z} + \frac{u_{z,\theta}}{s + r_i} \quad (5b)$$

이다.

식 (3)과 (5)를 식 (2)에 대입하면, 환형판의 자유진동을 지배하고 미지수가 u_s, u_z, u_θ 인 3개의 2계 편미분 방정식이 만들어 진다. 그러나 變두께를 갖는 판인 경우, 이 방정식의 많은 항이 變계수를 가지게 되어 엄밀해를 구하는 것은 불가능하다. 이 경우 에너지법의 사용이 바람직하다.

원형판 ($r_i = 0$)의 문제에서 $s = 0$ 일 때 $1/(s + r_i)$ 에 기인하여 실제 존재하지도 않는 변형률의 특이점이 발생한다는 것을 변형률과 변위의 관계식 (5)에서 알 수 있다. 이러한 특이점은 $r_i \neq 0$ 인 판의 체적 내에서 Gauss-Legendre 점으로 수치적분을 통하여 피할 수 있다 (예 $r_i/r_o = 10^{-10}$).

진동 중 판의 변형률 에너지 (V)는 판의 정의역 (Λ)에 대한 적분

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (\sigma_{ss}\epsilon_{ss} + \sigma_{zz}\epsilon_{zz} + \sigma_{\theta\theta}\epsilon_{\theta\theta} + 2\sigma_{sz}\epsilon_{sz} + 2\sigma_{s\theta}\epsilon_{s\theta} + 2\sigma_{z\theta}\epsilon_{z\theta})(s + r_i) ds dz d\theta \quad (6)$$

이다.

식 (3)과 (5)를 식 (6)에 대입하여 세 변위로 표현된 변형률 에너지 (V)

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} [\lambda(\epsilon_{ss} + \epsilon_{zz} + \epsilon_{\theta\theta})^2 + 2G\{\epsilon_{ss}^2 + \epsilon_{zz}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2 + 2(\epsilon_{sz}^2 + \epsilon_{z\theta}^2 + \epsilon_{s\theta}^2)\}](s + r_i) ds dz d\theta \quad (7)$$

를 구할 수 있다. 이 식에서 텐서형 변형률 ϵ_{ij} 은 식 (5)에서 이미 세 변위로 표현되었다.

운동 에너지 (T)는

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \rho(\dot{u}_s^2 + \dot{u}_z^2 + \dot{u}_\theta^2)(s + r_i) ds dz d\theta \quad (8)$$

이다.

해석의 편의를 위해 반경좌표(s)와 두께좌표(z)를 $\psi \equiv s/L$ 와 $\zeta \equiv z/(h_i + h_o)$ 로 무차원화 하였다. 그 결과 무차원 좌표계 (ψ, ζ, θ)의 범위는

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad -\delta(\psi) \leq \zeta \leq \delta(\psi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (9)$$

이다. 이 식에서 $\delta(\psi)$ 는 비선형 변분을 갖는 판의 무차원 두께의 반으로

$$\delta(\psi) \equiv \frac{h(s)}{h_i + h_o} = \frac{1}{1 + h^*} [1 - (1 - h^*)\psi^p] \quad (10)$$

이고, h^* 는 두께비 ($\equiv h_o/h_i$)이고, p 는 음이 아닌 정수이다.

비감쇠 자유진동에서 세 변위의 정현적 시간반응과 판의 원형 대칭성으로 인해 변위를 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$u_s(\psi, \zeta, \theta, t) = U_s(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11a)$$

$$u_z(\psi, \zeta, \theta, t) = U_z(\psi, \zeta) \cos n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11b)$$

$$u_\theta(\psi, \zeta, \theta, t) = U_\theta(\psi, \zeta) \sin n\theta \sin(\omega t + \alpha) \quad (11c)$$

이 식에서 변위함수 U_s, U_z, U_θ 는 ψ 와 ζ 의 함수이며, ω 는 고유 진동수이고, α 는 초기조건으로 결정되는 임의 위상각이다. θ 방향으로 주기성을 보장하기 위해 원주 파동수는 정수로 택하였다 ($n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$). 식 (11)은 비틀림 진동형을 제외한 모든 자유 진동형을 표현하고 있다. 이 비틀림 진동형은 식 (11)에서 $\cos n\theta$

과 $\sin n\theta$ 을 서로 교체하여 얻을 수 있다. $n \geq 1$ 일 때 이 교체된 식은 진동형의 대칭축이 회전되었을 뿐이며 식 (11)과 동일 한 해를 준다. 그러나 이 교체된 식은 $n=0$ 일 때 $u_s = u_z = 0$, $u_\theta = U_\theta^*(\psi, \zeta) \sin(\omega t + \alpha)$ 이 되며 바로 이 진동형이 비틀림 진동형에 해당한다. 변위는 원주 파동수(n)로 분리(uncoupling)가 되며, s (또는 ψ)와 z (또는 ζ)에 관해서는 서로 상관(coupled)된다.

리츠법은 진동의 한 주기에서 발생하는 최대 위치에너지 (V_{\max})와 최대 운동에너지 (T_{\max}) 범함수를 이용한다. 이 범함수는 식 (11)을 식 (7)과 (8)에 대입하고 $\sin^2(\omega t + \alpha)$ 과 $\cos^2(\omega t + \alpha)$ 을 1로 취하여 구할 수 있는데, 무차원 좌표 ψ 과 ζ 을 사용하면,

$$V_{\max} = \frac{LG}{2} \int_0^1 \int_{-\delta(\psi)}^{\delta(\psi)} \left[\frac{\lambda}{G} (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 + 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) + \kappa_4^2 \right] \Gamma_1 + (\kappa_5^2 + \kappa_6^2) \Gamma_2 \gamma d\zeta d\psi \quad (12)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2 \rho L (h_i + h_o)^2}{2} \int_0^1 \int_{-\delta(\psi)}^{\delta(\psi)} [(U_s^2 + U_z^2) \Gamma_1 + U_\theta^2 \Gamma_2] \gamma d\zeta d\psi \quad (13)$$

이 된다. 이 식에서

$$\kappa_1 \equiv \frac{U_s + nU_\theta}{\gamma}, \quad \kappa_2 \equiv \frac{1+h^*}{1-r^*} \frac{h_i}{r_o} U_{s,\psi}, \quad \kappa_3 \equiv U_{z,\zeta} \quad (14a)$$

$$\kappa_4 \equiv \frac{1+h^*}{1-r^*} \frac{h_i}{r_o} U_{z,\psi} + U_{s,\zeta} \quad (14a)$$

$$\kappa_5 \equiv \frac{nU_z}{\gamma} - U_{\theta,\zeta}, \quad \kappa_6 \equiv \frac{nU_s + U_\theta}{\gamma} - \frac{1+h^*}{1-r^*} \frac{h_i}{r_o} U_{\theta,\psi} \quad (14b)$$

이고, Γ_1 과 Γ_2 는 상수로서

$$\Gamma_1 \equiv \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_2 \equiv \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } n=0 \\ \pi & \text{if } n \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

이고,

$$\gamma \equiv \frac{r_o}{h_i} \left[\frac{r^* + (1-r^*)\psi}{1+h^*} \right] \quad (16)$$

이며, r^* 는 반경비 ($\equiv r_i/r_o$)이다. 식 (12)의 무차원 상수 ion.3 λ/G 는 단지 ν 와 관련된다는 사실을 식 (4)로부터 알 수 있다. 즉, $\lambda/G = 2\nu/(1-2\nu)$ 이다.

식 (11)의 변위함수 U_s, U_z, U_θ 는 대수 다항식

$$U_s(\psi, \zeta) = \eta_s \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij} \psi^i \zeta^j \quad (17a)$$

$$U_z(\psi, \zeta) = \eta_z \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L B_{kl} \psi^k \zeta^l \quad (17b)$$

$$U_\theta(\psi, \zeta) = \eta_\theta \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{mn} \psi^m \zeta^n \quad (17c)$$

으로 가정할 수 있으며, U_θ^* 에 대해서도 마찬가지이다. 이 식에서 i, j, k, l, m, n 는 정수; I, J, K, L, M, N 는 대수다항식에서 취한 최고차수; A_{ij}, B_{kl}, C_{mn} 는 임의의 미정계수; η 는 변위와 경사각과 관련된 기하학적 경계조건에 따라 달라지는 함수이다. 예를 들면,

1. 자유경계: $\eta_s = \eta_z = \eta_\theta = 1$,
2. 내측 모서리 ($\psi = 0$)는 고정, 외측 모서리 ($\psi = 1$)는 자유: $\eta_s = \eta_z = \eta_\theta = \psi$,
3. 내측 모서리 ($\psi = 0$)는 자유, 외측 모서리 ($\psi = 1$)는 고정: $\eta_s = \eta_z = \eta_\theta = \psi - 1$,
4. 내외측 모서리 모두 고정: $\eta_s = \eta_z = \eta_\theta = \psi(\psi - 1)$

이다. 상기 함수 η 는 기하학적 경계조건 만을 고려하며, 식 (17)의 대수 다항식과 함께 수학적으로 완비된(complete) 함수를 형성한다 (Kantorovich and Krylov³⁰, pp. 266-268). 함수 (17)은 첨수 I, J, \dots, N 가 증가함에 따라 정확도가 증가하며, 그 어떤 3차원적 운동도 표현할 수 있게 된다. 충분한 항 수를 택하면 결국 내부의 모든 운동학적 구속이 사라져 함수 (17)은 엄밀해에 수렴하게 된다.

임의의 계수 (A_{ij}, B_{kl}, C_{mn})에 대해서 진동수를 최소화하고, 내부의 구속효과를 최소화하면서 고유치 문제를 다음 식과 같이 공식화할 수 있다.³¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} (V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (i=0,1,2,\dots,I; j=0,1,2,\dots,J) \quad (18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}} (V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (k=0,1,2,\dots,K; l=0,1,2,\dots,L) \quad (18b)$$

$$\frac{\partial}{\partial C_{mn}}(V_{\max} - T_{\max}) = 0, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (18c)$$

식 (18)은 A_{ij} , B_{kl} , C_{mn} 을 미지수로 하는 $(I+1)(J+1) + (K+1)(L+1) + (M+1)(N+1)$ 개의 선형 동차 대수 방정식을 만든다. 이 식을 행렬의 형태로 표현하면

$$(\mathbf{K} - \Omega \mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (19)$$

이다. 이 식에서 \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 은 각기 최대 변형률에너지 (V_{\max})와 최대 운동에너지 (T_{\max})에서 결정되는 강도행렬과 질량행렬이다. Ω 는 진동계의 고유치로 무차원 진동수의 제곱 $\Omega \equiv \omega^2 (h_i + h_o)^2 \rho / G$ 이며, 벡터 \mathbf{x} 는

$$\mathbf{x} = (A_{00}, A_{01}, \dots, A_{IJ}; B_{00}, B_{01}, \dots, B_{KL}; C_{00}, C_{01}, \dots, C_{MN})^T \quad (20)$$

의 형태를 취한다. 비자명해를 구하기 위해 계수행렬의 행렬식을 영으로 취한 후, $|\mathbf{K} - \Omega \mathbf{M}| = 0$, 진동수(고유치)를 구한다. 이렇게 구한 진동수는 엄밀해의 상위 경계치이다. 각 진동수에 해당하는 고유함수(진동형)의 계산은 각 ω 를 대수 방정식 (19)에 대입해서 계수비를 구하여 결정할 수 있다.

3. 수렴성 연구

본 연구의 해석법으로 구한 진동수의 정확도를 검증하기 위한 하나의 방편으로 식 (17)의 먹급수에서 요구되는 항의 수를 결정하기 위한 수렴성 연구가 요구된다. 수렴성 연구는 변위를 먹급수로 표현할 때 리츠법으로 구한 모든 진동수는 엄밀해의 상계치에 수렴한다는 사실에 기초한다. 결과치가 수렴하지 않거나 수렴속도가 느리면 변위의 가정이 틀렸거나 최소로 완비된 일련의 다항식에서 어떤 특정 항수가 누락된 것이다.

표 1은 그림 2(d)에 그려져 있는 자유경계조건의 2차식 ($p=2$)으로 두께가 변하는 환형판 ($r_i/r_o = 1/6$)에 대한 수렴성 연구를 보여 주고 있다. 이 표는 $h_o/h_i = 4$, $h_i/r_o = 1/24$, $\nu = 0.3$ 일 때 2개의 원주 파동수($n=2$)를 갖는 진동형에 대해서 하위 5개의 무차원 진동수 ($\omega r_o \sqrt{\rho/G}$)를 보여 주고 있다.

표 1 Convergence of frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ of a free, quadratically ($p=2$) tapered annular plate ($r_i/r_o = 1/6$) for the five lowest vibrating modes for $n=2$ with $h_o/h_i = 4$ and $h_i/r_o = 1/24$ for $\nu = 0.3$.

TZ	TS	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	0.5188	1.744	3.569	4.077	8.835
2	4	24	0.4304	1.569	2.335	4.018	5.191
2	6	36	0.4293	1.550	2.299	4.010	4.669
2	8	48	0.4293	1.546	2.293	4.009	4.532
2	10	60	0.4292	1.546	2.293	4.009	4.527
2	12	72	0.4292	1.546	2.293	4.009	4.526
3	2	18	0.4828	1.731	3.521	4.076	8.600
3	4	36	0.4181	1.564	2.187	4.017	4.965
3	6	54	0.4173	1.546	2.159	4.009	4.355
3	8	72	0.4173	1.542	2.154	4.008	4.238
3	10	90	0.4172	1.542	2.154	4.008	4.235
3	12	108	0.4172	1.542	2.154	4.008	4.234
4	2	24	0.4715	1.730	3.345	4.074	8.577
4	4	48	0.4120	1.564	2.158	4.017	4.913
4	6	72	0.4116	1.546	2.134	4.009	4.273
4	8	96	0.4116	1.542	2.129	4.008	4.169
4	10	120	0.4116	1.542	2.129	4.008	4.166
4	12	144	0.4116	1.542	2.129	4.008	4.165
5	2	30	0.4715	1.726	3.339	4.073	8.537
5	4	60	0.4120	1.564	2.157	4.017	4.908
5	6	90	0.4116	1.546	2.134	4.009	4.268
5	8	120	0.4116	1.542	2.129	4.008	4.167
5	10	150	0.4116	1.542	2.129	4.008	4.164
5	12	180	0.4116	1.542	2.129	4.008	4.163

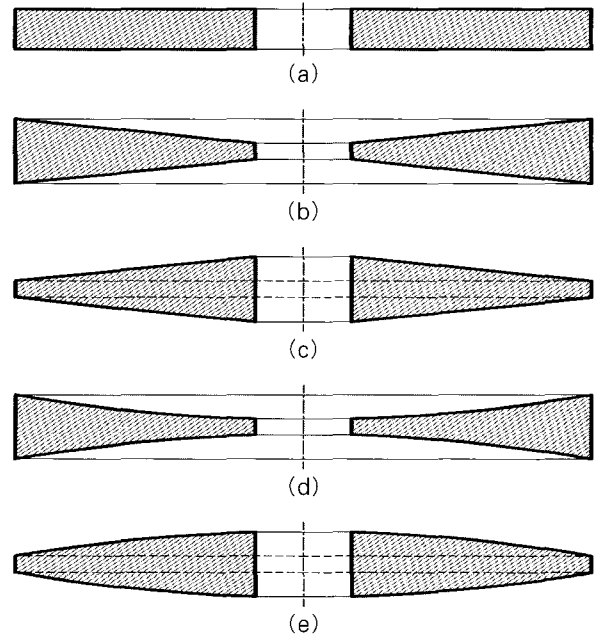


그림 2 Cross sections of tapered annular plates ($r_i/r_o = 1/6$) with $(p, h_o/h_i, h_i/r_o) =$ (a) (0, 1, 5/48); (b) (1, 4, 1/24); (c) (1, 1/4, 1/6); (d) (2, 4, 1/24); (e) (2, 1/4, 1/6).

수렴성 연구의 단순화를 위해 s (또는 Ψ) 좌표와 z (또는 ζ) 좌표방향으로 동일한 수의 항 수를 택하였다. 즉, $I=K=M$ 과 $J=L=N$ 으로 하였다. 물론 어떤 특정한 판의 형상과 특정 진동형에 대해서는 동일하지 않은 항 수를 택했을 때 계산의 최적화를 이룰 수도 있다.

이 표의 TZ 와 TS 는 z (또는 ζ)와 s (또는 Ψ) 방향으로 사용된 다항식의 총 항 수이다. 진동수 행렬식의 차수인 DET 는 TZ 와 TS 와 다음의 관계를 갖는다.

$$DET = \begin{cases} TZ \times TS & \text{for torsional modes } (n = 0) \\ 2 \times TZ \times TS & \text{for axisymmetric modes } (n = 0) \\ 3 \times TZ \times TS & \text{for general modes } (n \geq 1) \end{cases} \quad (21)$$

표 1은 TZ ($= J+1, L+1, N+1$)와 TS ($= I+1, K+1, M+1$)가 증가함에 따라 5개의 진동수 모두가 단조 수렴함을 보여주고 있다. 예를 들면 무차원 기본진동수 $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ 는 $3 \times (4 \times 6) = 72$ 항을 사용했을 때 4자리의 유효숫자까지 수렴된 진동수 (0.4116)를 구할 수 있으며, 이때의 $DET=72$ 이다. 또한 이러한 정확도를 갖기 위해서는 최소한 판의 두께방향으로는 4개 ($TZ=4$), 반경방향

으로는 6개 ($TS=6$)의 항이 필요하다. 표 1에서 굵은 글씨체에 밑줄이 그어진 숫자는 최소의 행렬식 차수로 구할 수 있는 유효숫자 4자리까지의 엄밀해이다.

표 1과 유사한 수렴성 연구를 보여주는 표 2는 $h_o/h_i=4, h_i/r_o=1/24$ 이며, 상층표면이 평평하고 2차 함수 ($p=2$)로 두께가 변하는, 그림 5(d)의 원형판 ($r_i=0$)이 자유경계조건이고 $n=2, \nu=0.3$ 일 때의 수렴성 연구를 보여주고 있다. 이 때 상층표면이 평평한 판에서는 z 의 범위로 $-h(s) \leq z \leq h(s)$ 대신에 $-h(s) \leq z \leq 0$ 을 사용하여야 한다. 표 2는 유효숫자 4자리까지 정확한 기본진동수(0.2362)를 얻기 위해서는 최소한 (TZ, TS) = (4,8)이 필요하다는 것을 보여주고 있다.

표 1과 2는 유효숫자 4자리까지 정확한 진동수를 구하기 위해서는 z 방향으로 최소한 4개의 항 ($TZ=4$)이 필요하며, 단지 2개의 항($TZ=2$)을 사용했을 때 최하위 5개의 진동수는 약 10%나 크다는 사실을 보여주고 있다. 전통적 박판이론에서는 변형 전에 직선인 중간면의 법선이 변형 후에도 직선을 유지하는 반면에 본 연구에서는 TZ 를 3만을 택해도 포물선 모양으로 이 법선의 변형을 허락하

표 2 Convergence of frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ of a free, quadratically ($p=2$) tapered circular plate ($r_i=0$) with the upper surfaces flat for the five lowest vibrating modes for $n=2$ with $h_o/h_i=4$ and $h_i/r_o=1/24$ for $\nu=0.3$.

TZ	TS	DET	1	2	3	4	5
2	2	12	0.4385	2.526	5.405	18.15	23.38
2	4	24	0.2498	1.800	1.935	4.116	6.092
2	6	36	0.2457	1.493	1.801	3.649	4.105
2	8	48	0.2454	1.483	1.801	3.187	4.105
2	10	60	0.2453	1.482	1.801	3.156	4.105
2	12	72	0.2453	1.482	1.801	3.155	4.105
3	2	18	0.4006	2.505	5.368	18.03	22.06
3	4	36	0.2404	1.793	1.828	4.115	5.430
3	6	54	0.2375	1.389	1.800	3.349	4.105
3	8	72	0.2373	1.382	1.800	2.919	4.105
3	10	90	0.2373	1.381	1.800	2.890	4.105
3	12	108	0.2373	1.381	1.800	2.890	4.105
4	2	24	0.3961	2.499	5.357	17.44	20.11
4	4	48	0.2387	1.789	1.818	4.115	5.226
4	6	72	0.2364	1.381	1.800	3.305	4.105
4	8	96	0.2362	1.375	1.800	2.897	4.105
4	10	120	0.2362	1.374	1.800	2.870	4.105
4	12	144	0.2362	1.374	1.800	2.868	4.105
5	2	30	0.3933	2.498	5.357	17.42	20.01
5	4	60	0.2386	1.782	1.811	4.115	5.176
5	6	90	0.2364	1.381	1.800	3.298	4.105
5	8	120	0.2362	1.375	1.800	2.896	4.105
5	10	150	0.2362	1.374	1.800	2.869	4.105
5	12	180	0.2362	1.374	1.800	2.868	4.105

표 3 Frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ of free, nonlinearly tapered annular plates ($r_i/r_o=1/6$) for $\nu=0.3$.

n	s	$\left[p, \frac{h_o}{h_i}, \frac{h_i}{r_o} \right]$				
		(0.1,5/48)	(1,4,1/24)	(1,1/4,1/6)	(2,4,1/24)	(2,1/4,1/6)
0 ^T	1	5.181	5.637	4.984	5.655	5.185
	2	8.640	9.022	8.488	8.864	8.657
	3	12.16	10.56	12.03	11.20	11.16
	4	15.08	12.45	12.39	12.28	12.16
	5	15.78	15.32	15.64	15.82	13.86
0 ^A	1	0.8198(2)	0.7611(2)	1.098(2)	0.6343(2)	1.276(2)
	2	3.149	2.729	3.405	2.296	3.555
	3	3.291	3.186	3.643	2.641	4.091
	4	6.548	6.293	6.503	5.042	7.419
	5	8.028	8.261	8.157	8.217	8.301
1	1	1.732(4)	1.489(4)	1.969(5)	1.188(4)	2.360
	2	2.775	2.734	2.928	2.683	2.970
	3	4.123	3.796	4.249	2.926	4.859
	4	6.356	6.585	6.647	5.474	6.776
	5	7.004	6.691	6.868	6.390	7.022
2	1	0.4993(1)	0.4932(1)	0.6503(1)	0.4116(1)	0.7626(1)
	2	1.996	1.621(5)	2.370	1.542(5)	2.297(5)
	3	2.839	2.649	2.924	2.129	3.536
	4	4.078	4.044	4.233	4.008	4.289
	5	5.649	5.127	5.750	4.163	6.477
3	1	1.143(3)	1.242(3)	1.200(3)	1.071(3)	1.492(3)
	2	3.551	3.040	3.960	2.848	4.159
	3	4.015	3.899	4.217	3.224	4.682
	4	5.780	5.679	6.000	5.512	6.043
	5	7.083	6.594	7.067	5.645	7.894
4	1	1.901(5)	2.140	1.742(4)	1.893	2.199(4)
	2	4.684	4.178	4.964	3.918	5.436
	3	5.199	5.178	5.437	4.394	5.796
	4	7.414	7.294	7.666	6.865	7.715
	5	8.444	8.020	8.313	7.257	9.202

여, Mindlin의 판이론¹⁾과 같은 1계의 전단변형 이론보다 변위에 더 많은 자유를 주게 된다.

4. 수치결과와 토론

표 3은 반경방향으로 일정한($p=0$), 선형적($p=1$), 포물형($p=2$) 두께 변분을 가지고, $(p, h_o/h_i, h_i/r_o) = (0, 1, 5/48), (1, 4, 1/24), (1, 1/4, 1/6), (2, 4, 1/24), (2, 1/4, 1/6)$ 인 자유경계의 환형판($r_i/r_o = 1/6$)에 대한 무차원 진동수 $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ 을 보여주고 있다. 프와송 비 (ν)는 0.3으로 택하였다. 이 판의 형상들은 그림 2에 그려져 있다. 각 판의 형상에 대해서 6개의 원주파동수 ($n=0^T, 0^A, 1, 2, 3, 4$)와 각 n 에 대한 하위 5개의 모드 ($s = 1, 2, 3, 4, 5$)로부터 총 30개의 진동수를 보여주고 있다. 여기서 T 와 A 는 비틀림과 축대칭 모우드를 의미한다. 괄호 안의 숫자는 각 판의 형상에서 최하위 5개의 진동수를 나타낸다. 강체 모우드를 의미하는 영의 진동수는 이 표에서 생략되었다.

표 4는 표 3과 동일한 $(p, h_o/h_i, h_i/r_o, \nu)$ 의 값을 가지고 $p=0, 1, 2$ 인 자유경계의 원형판($r_i=0$)에 대한 무차원 진동수 ($\omega r_o \sqrt{\rho/G}$)를 보여주고 있으며, 이 판의 형상들은 그림 3에 그려져 있다.

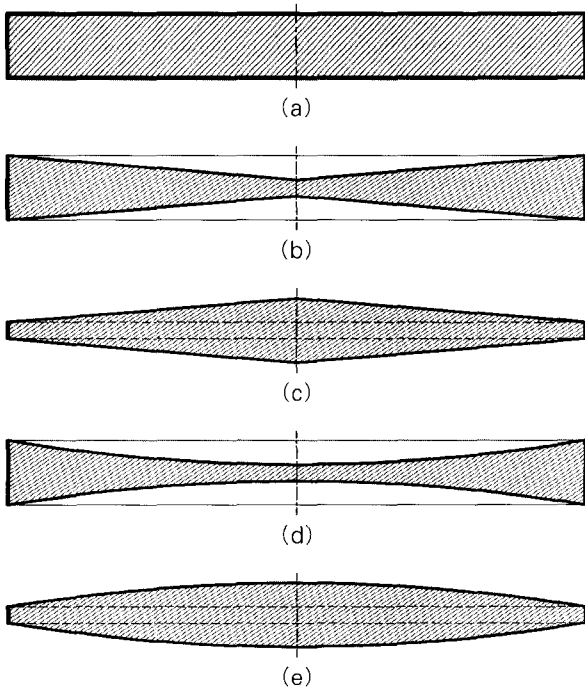


그림 3 Cross sections of tapered circular plates ($r_i=0$) with $(p, h_o/h_i, h_i/r_o) =$ (a) (0, 1, 5/48); (b) (1, 4, 1/24); (c) (1, 1/4, 1/6); (d) (2, 4, 1/24); (e) (2, 1/4, 1/6).

표 3과 4는 기본진동수와 제 3 진동수는 각각 2개 ($n=2$)와 3개($n=3$)의 원주파동수를 갖는 모우드에서 발생하며, 제 2 진동수는 축대칭 모우드 ($n=0^A$)에 해당한다는 사실을 보여주고 있다.

표 5와 6은 판의 상층표면이 평평하고 표 3과 4와 동일한 값의 $(p, h_o/h_i, h_i/r_o, \nu)$ 를 가진 자유경계의 비선형 두께 변분을 가진 환형판 ($r_i/r_o = 1/6$, 표 5)과 원형판 ($r_i = 0$, 표 6)의 무차원 진동수 ($\omega r_o \sqrt{\rho/G}$)를 보여주고 있다. 표 5와 6의 판의 형상은 각각 그림 4와 5에 그려져 있다. 그림 4와 5의 판들은 그림 2와 3의 판들을 판의 중간면을 따라 반으로 잘라낸 것과 같다. 따라서 h_o/h_i 과 h_i/r_o 의 값은 변하지 않는다. 표 4와 5의 판들을 계산할 때 식 (9)에서 ζ 의 범위는 $-\delta(\psi) \leq \zeta \leq \delta(\psi)$ 에서 $-\delta(\psi) \leq \zeta \leq 0$ 으로 교체되어야 한다. 표 3과 4와 같이, 표 5와 6은 제 1, 2, 3진동수는 각각 $n=2, 0^A, 3$ 에서 발생함을 보여준다.

표 4 Frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ of free, nonlinearly tapered **circular** plates ($r_i=0$) for $\nu=0.3$.

n	s	$\left[p, \frac{h_o}{h_i}, \frac{h_i}{r_o} \right]$				
		(0,1,5/48)	(1,4,1/24)	(1,1/4,1/6)	(2,4,1/24)	(2,1/4,1/6)
0 ^T	1	5.136	5.473	4.933	5.574	5.086
	2	8.417	8.711	8.254	8.688	8.386
	3	11.62	10.41	11.47	11.00	11.59
	4	14.84	11.87	13.41	11.80	11.63
	5	15.08	14.59	14.68	14.97	14.19
0 ^A	1	0.8623(2)	0.8106(2)	1.040(2)	0.6678(2)	1.290(2)
	2	3.145	3.032	3.174	2.320	3.783
	3	3.456	3.043	4.054	2.879	4.014
	4	6.025	5.770	5.912	4.746	6.693
	5	9.007	8.657	8.906	7.521	9.188
1	1	1.819(4)	1.732(4)	1.861(5)	1.358(4)	2.352(5)
	2	2.733	2.719	2.844	2.680	2.900
	3	4.489	4.331	4.387	3.476	5.131
	4	5.942	6.193	6.106	6.063	6.287
	5	6.834	7.020	6.790	6.104	6.867
2	1	0.5187(1)	0.5301(1)	0.6344(1)	0.4410(1)	0.7789(1)
	2	2.346	1.936(5)	2.795	1.794(5)	2.836
	3	2.898	2.899	2.881	2.365	3.409
	4	4.241	4.136	4.456	4.102	4.484
	5	5.830	5.703	5.613	4.744	6.430
3	1	1.145(3)	1.301(3)	1.085(3)	1.129(3)	1.394(3)
	2	3.601	3.191	3.723	2.971	4.252
	3	4.035	4.154	4.239	3.505	4.467
	4	5.825	5.726	6.045	5.683	6.096
	5	7.157	7.091	6.799	6.067	7.695
4	1	1.902(5)	2.214	1.591(4)	1.977	2.042(4)
	2	4.688	4.288	4.676	4.034	5.437
	3	5.203	5.425	5.374	4.711	5.530
	4	7.421	7.318	7.648	7.277	7.710
	5	8.465	8.433	7.973	7.402	8.936

표 5 Frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ of free, nonlinearly tapered **annular** plates ($r_i/r_o=1/6$) with the upper surfaces **flat** for $\nu=0.3$.

n	s	$\left[p, \frac{h_o}{h_i}, \frac{h_i}{r_o} \right]$				
		(0,1,5/48)	(1,4,1/24)	(1,1/4,1/6)	(2,4,1/24)	(2,1/4,1/6)
0 ^T	1	5.181	5.637	4.984	5.654	5.185
	2	8.640	9.021	8.488	8.863	8.657
	3	12.16	12.45	12.03	12.28	12.16
	4	15.76	15.97	15.63	15.80	15.74
	5	19.48	19.53	19.28	19.36	19.36
0 ^A	1	0.4277(2)	0.4606(2)	0.5982(2)	0.4008(2)	0.6994(2)
	2	1.912	1.848	1.955	1.272	2.438
	3	3.152	2.741	3.666	2.649	3.578
	4	4.302	4.024	4.126	3.014	4.957
	5	7.368	6.821	6.909	5.397	8.021
1	1	0.9697(4)	0.8592(4)	1.097(5)	0.6823(4)	1.373(5)
	2	2.571	2.259	2.651	1.669	2.973
	3	2.776	2.735	2.930	2.683	3.153
	4	4.806	4.336	4.674	3.329	5.467
	5	6.381	6.525	6.698	5.638	6.862
2	1	0.2596(1)	0.2643(1)	0.3375(1)	0.2210(1)	0.3993(1)
	2	1.646	1.505	1.640	1.217	2.077
	3	1.995	1.677	2.377	1.550	2.299
	4	3.660	3.174	3.612	2.452	4.291
	5	4.079	4.047	4.238	4.009	4.312
3	1	0.6127(3)	0.7001(3)	0.6248(3)	0.5996(3)	0.7918(3)
	2	2.448	2.418	2.295	1.917	2.861
	3	3.551	3.055	4.222	2.862	4.165
	4	4.785	4.304	4.566	3.377	5.403
	5	5.785	5.688	6.005	5.221	6.054
4	1	1.059(5)	1.275(5)	0.9180(4)	1.112(5)	1.190(4)
	2	3.314	3.390	2.952	2.717	3.654
	3	4.684	4.198	5.437	3.945	5.447
	4	5.934	5.524	5.514	4.389	6.479
	5	7.427	7.315	7.675	6.412	7.734

표 6 Frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ of free, nonlinearly tapered **circular** plates ($r_i=0$) with the upper surfaces **flat** for $\nu=0.3$.

n	s	$\left[p, \frac{h_o}{h_i}, \frac{h_i}{r_o} \right]$				
		(0,1,5/48)	(1,4,1/24)	(1,1/4,1/6)	(2,4,1/24)	(2,1/4,1/6)
0 ^T	1	5.136	5.473	4.933	5.574	5.086
	2	8.417	8.711	8.254	8.688	8.386
	3	11.62	11.87	11.47	11.80	11.58
	4	14.84	15.01	14.66	14.91	14.75
	5	18.21	18.15	17.83	18.03	17.92
0 ^A	1	0.4504(2)	0.4751(2)	0.5572(2)	0.4142(2)	0.7018(2)
	2	1.828	1.792	1.809	1.297	2.250
	3	3.461	3.044	3.688	2.827	4.052
	4	3.883	3.698	4.092	2.889	4.416
	5	6.394	6.024	6.029	4.802	6.988
1	1	1.000(4)	0.9911(4)	1.006(5)	0.7718(4)	1.316(5)
	2	2.734	2.656	2.603	2.011	2.902
	3	2.749	2.720	2.846	2.680	3.207
	4	5.058	4.807	4.755	3.775	5.609
	5	5.960	6.232	6.126	5.931	6.332
2	1	0.2681(1)	0.2839(1)	0.3244(1)	0.2362(1)	0.4018(1)
	2	1.675	1.727	1.551	1.374	1.979
	3	2.346	1.953	2.885	1.800	2.841
	4	3.741	3.692	3.446	2.868	4.181
	5	4.244	4.141	4.458	4.105	4.489
3	1	0.6124(3)	0.7350(3)	0.5608(3)	0.6330(3)	0.7335(3)
	2	2.444	2.637	2.123	2.122	2.681
	3	3.601	3.202	4.235	2.984	4.260
	4	4.784	4.847	4.302	3.839	5.168
	5	5.832	5.737	6.050	5.691	6.106
4	1	1.055(5)	1.324(5)	0.8329(4)	1.166(5)	1.094(4)
	2	3.286	3.633	2.732	2.981	3.418
	3	4.689	4.305	5.155	4.057	5.447
	4	5.867	6.063	5.382	4.894	6.166
	5	7.435	7.343	7.656	7.164	7.727

표 3-6은 비틀림 진동형 ($n=0^T$)은 기본 진동수 보다 훨씬 큰 진동수를 가진다는 것을 보여주고 있다. 비틀림 진동형은 평면의 원주방향 변위 (u_θ)만으로 구성된 반면에 기본 진동형은 두께 전단변형과 다른 비틀림과 상관된 (coupled) 휨 모우드가 지배적이다. 비틀림 진동형이 아닌 상위 진동수 중에서 일부는 두께-전단 모우드이며 일부는 축방향 변위 (u_z)와 상관된 평면신장 (in-plane stretching) 모우드이다.

마지막으로 그림 4와 5의 판은 실제로 얇은 셸에 해당한다. 그림 4와 5의 판의 중간면은 평면이 아니라 곡률을 가지고 있기 때문에 2차원 판 이론에 의한 해석보다는 얇은 셸 이론을 사용하여야 한다. 그림 4와 5의 (a)와 (b)는 變두께를 가진 원추형 셸로, (c)와 (d)는 포물형 셸 (또는 얇은 셸 이론³³)에 의한 구형 셸)로 취급될 수 있다. 일반적으로 얇은 셸은 평면신장이 휨과 서로 상관(coupling)되어 있기 때문에 횡강성(transverse stiffness)이 판보다 훨씬 더 크며 그 결과 휨모우드는 상위 진동수를 갖게 된다.³⁴⁾

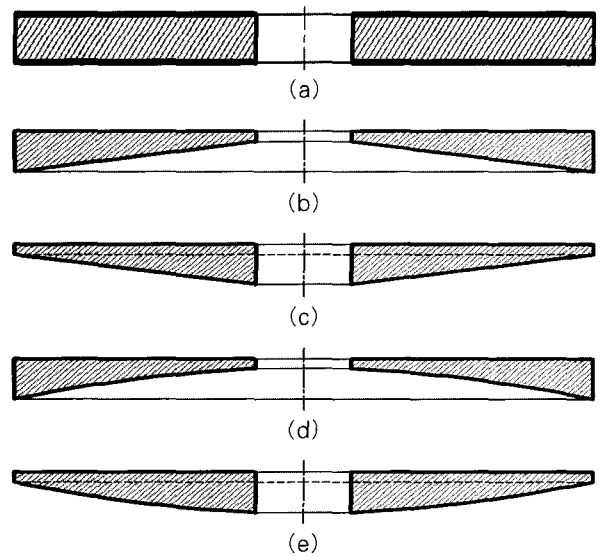


그림 4 Cross sections of tapered annular plates ($r_i/r_o=1/6$) with the upper surfaces flat and with $(p, h_o/h_i, h_i/r_o) =$ (a) (0, 1, 5/48); (b) (1, 4, 1/24); (c) (1, 1/4, 1/6); (d) (2, 4, 1/24); (e) (2, 1/4, 1/6).

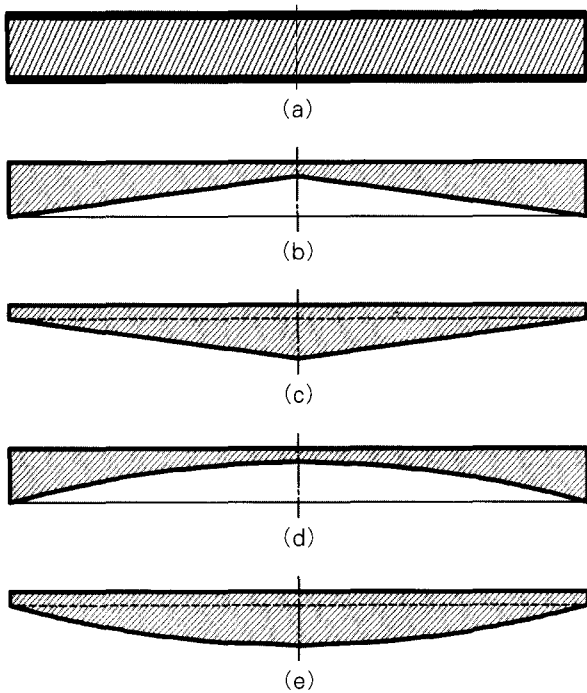


그림 5 Cross sections of tapered circular plates, ($r_i = 0$) with the upper surfaces flat and with $(p, h_o/h_i, h_i/r_o) =$ (a) (0, 1, 5/48); (b) (1, 4, 1/24); (c) (1, 1/4, 1/6); (d) (2, 4, 1/24); (e) (2, 1/4, 1/6).

5. 전통적 2차원 박판이론과의 비교

Ramaiah와 Vijayakumar³²⁾는 2차원적인 전통적 박판이론과 리츠법을 이용하여 선형적($p=1$)인 두께 변분을 가진 환형판과 원형판의 진동을 연구하였다. 이미 Kang과 Leissa¹³⁾에 의해서 선형적 두께 변분을 갖는 환형판에 대한 2차원 결과³²⁾와 3차원 결과¹³⁾의 비교가 이루어졌으므로 본 연구에서는 비선형적인 두께 변분을 가진 원형판($r_i=0$)에 대한 비교에 국한될 것이다.

Gutierrez, Romanelli와 Laura²⁵⁾와 Singh와 Hassan²⁷⁾은 2차원적인 전통적 박판이론과 리츠법을 이용하여 비선형 두께 변분을 가진 원형판($r_i=0$)의 진동을 연구하였다. Singh와 Hassan²⁷⁾은 $(n, s) = (2, 1), (0^A, 1), 3, 1)$ 에서 발생하는 최하위 3개의 진동수를 제공하였으며, Gutierrez, Romanelli와 Laura²⁵⁾은 자유경계를 가진 원형판의 축대칭 모우드($n=0^A$)의 최하위 진동수만을 제공하였다.

표 7과 8은 본 연구의 3차원 리츠법에 의한 결과 (3DR)와 2차원적인 리츠법 (2DR)에 의한 무차원 진동수 ($\omega r_o \sqrt{\rho/G}$)를 서로 비교한 것이다. 표 7에서는 2가지 형태의 비선형 두께 변분 ($p=1, 5$)과 4가지 형태의 두께비 ($h_o/h_i=0.7, 0.9, 1.1, 1.3$)를 가진 총 8개의 원형판에 대한 비교가 이

루어졌으며, 표 8은 $p=2$ 이고 $h_o/h_i=0$ 인 원형판에 대한 비교를 보여주고 있다. 프와송 비 (ν)는 모두 0.3으로 고정하였다. 표 7과 8의 2차원 결과(2DR)^{25), 27)}는 모두 전통적 박판이론에 의한 것으로 판의 두께에 대한 정보를 알 수 없기 때문에 본 연구의 비교를 위해서 h_i/r_o 를 박판으로 취급될 수 있는 0.025로 가정하였다. 표 7과 8의 % 차이는 다음 식

$$\text{Difference}(\%) = (2DR-3DR)/3DR \times 100 \quad (22)$$

으로 계산하였다.

표 7과 8에서 3차원 리츠법 (3DR)에 의한 진동수는 모두 2차원 리츠법 (2DR)에 의한 진동수보다 작다는 것을 보여 주고 있다. 정확한 3차원 해석은 일반적으로 2차원 박판이론보다 작은 진동수를 주는데 그 이유는 3차원 해석에서는 전단변형과 회전관성효과를 고려하지만 2차원 박판이론에서는 그렇지 못하기 때문이다.

표 7 Comparison of the first axisymmetric ($n=0A$) frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ from the present 3 D (3DR) and the 2 D Ritz (2DR)²⁵⁾ methods of free, tapered ($p=1, 5$) circular plates ($r_i=0$) of $h_i/r_o=0.025$ ($\nu=0.3$).

Method	$h_o/h_i=0.7$		$h_o/h_i=0.9$		$h_o/h_i=1.1$		$h_o/h_i=1.3$	
	$p=1$	$p=5$	$p=1$	$p=5$	$p=1$	$p=5$	$p=1$	$p=5$
2DR ²⁵⁾	0.1940	0.2220	0.2108	0.2199	0.2287	0.2198	0.24724	0.2212
3DR	0.1935	0.2213	0.2102	0.2192	0.2278	0.2190	0.24602	0.2203
Difference %	(0.26%)	(0.32%)	(0.29%)	(0.32%)	(0.40%)	(0.37%)	(0.50%)	(0.41%)

표 8 Comparison of nondimensional frequencies in $\omega r_o \sqrt{\rho/G}$ from the present 3 D (3DR) and the 2D Ritz (2DR)²⁷⁾ methods of free, quadratically ($p=2$) tapered **circular** plates ($r_i=0$) with $h_o/h_i=0$ and $h_i/r_o=0.025$ ($\nu=0.3$).

Method	(n,s)		
	(0 ^A ,1)	(2,1)	(3,1)
2DR ²⁷⁾	0.23604	0.14142	0.244948
3DR	0.23559	0.14125	0.244491
Difference %	(0.19%)	(0.12%)	(0.19%)

6. 결 론

3차원 리츠해석으로 비선형 두께 변분을 갖는 두꺼운 원형판과 환형판의 정확한 진동수를 결정하였다. 본 연구는 등방성 재료에 대한 3차원적 동탄성방정식을 사용하였으며, '변형률이 작다'라는 가정 이외에 그 어떤 다른 구속을 변위에 두지 않았다. 바로 이점이 판의 두께방향 변위

의 변분에 관한 매우 제한적인 가정을 한 전통적인 2차원 판이론과 가장 큰 차이점을 이룬다.

리츠법은 대수 다항식과 같은 수학적으로 완비된 함수를 시행함수로 사용할 때, 엄밀해에 대해서 상위경계 수렴치의 진동수를 보장한다. 본 연구의 해석법은 간단하지만 다항식의 항 수가 증가함에 따라 원하는 만큼의 정확성을 가진 진동수를 결정할 수 있다. 따라서 표 3-6의 정확한 결과치는 3차원적으로 사용된 유한 요소법이나 유한 차분법과 같은 타 방법에 의한 결과치의 정확도를 검증하는 비교의 기준으로 사용될 수 있으며, 더구나 유한 요소법과 유한 차분법을 이용하여 본 연구의 정확도에 상응하는 결과치를 얻기 위해서는 훨씬 더 큰 차수의 행렬식이 필요하며 수치계산에 더 많은 시간이 요구된다는 사실이 McGee와 Leissa³⁵⁾에 의해서 증명되었다.

감사의 글

이 논문은 2004학년도 중앙대학교 건설산업기술연구소 지원에 의한 것입니다. 이에 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- Mindlin, R. D., "Influence of Rotatory Inertial and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 18, 1951, pp. 31~38
- Deresiewicz, H. and Midlin, R. D., "Axially Symmetric Flexural Vibrations of a Circular Disk," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 22, 1955, pp. 86~88
- Hutchinson, J. R., "Axisymmetric Flexural Vibrations of a Thick Free Circular Plate," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 46, 1979, pp. 139~144
- Hutchinson, J. R., "Vibrations of Thick Free Circular Plates, Exact Versus Approximate Solutions," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, 1984, pp. 581~585
- Hutchinson, J. R. and El Azhari, S. A., "On the Vibration of Thick Annular Plates," *Refined Dynamical Theories of Beams, Plates, and Shells and Their Applications, Proceedings of the Euromech Colloquium*, Vol. 219, 1986, pp. 102~111
- So, J. and Leissa, A. W., "Three Dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 209, 1998, pp. 15~41
- Ye, J. Q., "Axisymmetric Vibration of Laminated Annular Plates Composed of Transversely Isotropic Layers," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 205, 1997, pp. 250~256
- Liew, K. M. and Yang, B., "Three Dimensional Elasticity Solutions for Free Vibrations of Circular Plates: a Polynomials Ritz Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 175, 1999, pp. 189~201
- Ding, H. J. and Xu, R. Q., "Free Axisymmetric Vibration of Laminated Transversely Isotropic Annular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 230, No. 5, 2000, pp. 1031~1044
- Liew, K. M. and Yang, B., "Elasticity Solutions for Free Vibrations of Annular Plates from Three Dimensional Analysis," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp. 7689~7702
- Liu, C. F. and Lee, Y. T., "Finite Element Analysis of Three Dimensional Vibrations of Thick Circular and Annular plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 1, 2000, pp. 63~80
- Liu, C. F., Lee, J. F., and Lee, Y. T., "Axisymmetric Vibration Analysis of Rotating Annular Plates by a 3D Finite Element," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, 2000, pp. 5813~5827
- Kang, J. H. and Leissa, A. W., "Three Dimensional Vibrations of Thick, Linearly Tapered, Annular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 217, No. 5, 1998, pp. 927~944
- Leissa, A. W., *Vibration of Plates*, NASA SP 160; U.S. Government Printing Office, 1969 (Reprinted by The Acoustical Society of America, 1993)
- Leissa, A. W., "Recent Research in Plate Vibration, 1973 1976: Complicating Effects," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 10, 1978, pp. 21~35
- Leissa, A. W., "Plate Vibration Research, 1976 1980: Complicating Effects," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 13, 1981, pp. 19~36
- Leissa, A. W., "Recent Studies in Plate Vibrations, 1981 1985: Part II Complicating Effects," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, 1987, pp. 10~24
- Singh, B. and Chakraverty, S., "Transverse Vibration of Circular and Elliptic Plates with Variable Thickness," *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 22, 1991, pp.

- 787~803
19. Singh, B. and Chakraverty, S., "Transverse Vibration of Completely Free Elliptic and Circular Plates Using Orthogonal Polynomials in the Rayleigh Ritz Method," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 33, 1991, pp. 741~751
 20. Singh, B. and Chakraverty, S., "Transverse Vibration of Circular and Elliptic Plates with Quadratically Varying Thickness," *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 16, 1992, pp. 269~274
 21. Singh, B. and Chakraverty, S., "On the Use of Orthogonal Polynomial in the Rayleigh Ritz Method for the Study of Transverse Vibration of Elliptic Plates," *Computers and Structures*, Vol. 43, 1992, pp. 439~443
 22. Singh, B. and Chakraverty, S., "Transverse Vibration of Simply Supported Elliptical and Circular Plates Using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Variables," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 152, 1992, pp. 149~155
 23. Singh, B. and Chakraverty, S., "Use of Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Dimensions for the Transverse Vibration of Elliptical and Circular Plates with Variable Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 173, 1994, pp. 289~299
 24. Singh, B. and Saxena, V., "Axisymmetric Vibration of a Circular Plate with Double Linear Variable Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 179, No. 5, 1995, pp. 879~897
 25. Gutierrez, R. H., Romanelli, E., and Laura, P. A. A., "Vibrations and Elastic Stability of Thin Circular Plates with Variable Profile," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 3, 1996, pp. 391~399
 26. Wang, J., "Generalized Power Series Solutions of the Vibration of Classical Circular Plates with Variable Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 202, No. 4, 1997, pp. 593~599
 27. Singh, B. and Hassan, S. M., "Transverse Vibration of a Circular Plate with Arbitrary Thickness Variation," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, No. 11, 1998, pp. 1089~1104
 28. Ye, Z., "Appication of Maple V to the Non-linear Vibration Analysis of Circular Plate with Variable Thickness," *Computer and Structures*, Vol. 71, 1999, pp. 481~488
 29. Kang, J.-H., "Three-Dimensional Vibration Analysis of Thick Shells of Revolution with Arbitrary Curvature and Variable Thickness," Ph.D. Dissertation, The Ohio State University, 1997
 30. Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., *Approximate Methods in Higher Analysis*, Groningen, Noordhoff, 1958
 31. Ritz, W., "Über Eine Neue Methode Zur Lösung Gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Physik," *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, Vol. 135, 1909, pp. 1~61
 32. Ramaiah, G. K. and Vijaykumar, K., "Vibrations of Annular Plates with Linear Thickness Profiles," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 40, 1975, pp. 293~298
 33. Leissa, A. W., *Vibration of Shells*, NASA SP 288, U.S. Government Printing Office, 1973 (Reprinted by The Acoustical Society of America, 1993)
 34. Narita, Y. and Leissa, A. W., "Vibrations of Completely Free Shallow Shells of Rectangular Planform," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 96, No. 2, 1984, pp. 207~218
 35. McGee, O. G. and Leissa, A. W., "Three-Dimensional Free Vibrations of Thick Skewed Cantilever Plates," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, 1991, pp. 305~322, Errata Vol. 149, pp. 539~542