

# 선형 시스템 수동화를 위한 병렬 앞먹임 보상기 설계방법 연구

## Design Method of a Parallel Feedforward Compensator for Passivation of Linear Systems

손 영 익\*  
(Young-Ik Son)

**Abstract :** A passivity-based dynamic output feedback controller design is considered for a finite collection of non-square linear systems. Design of a single controller for a set of plants i.e. simultaneous stabilization is an important issue in the area of robust control design. We first determine a squaring gain matrix and an additional dynamics that is connected to the systems in a feedforward way, then a static passivating control law is designed. Consequently, the actual feedback controller will be the static control law combined with the feedforward dynamics. A necessary and sufficient condition for the existence of the parallel feedforward compensator is given by the static output feedback formulation. In contrast to the previous result [1], a technical condition for constructing the parallel feedforward compensator is removed by proposing a new type of the parallel compensator.

**Keywords :** (feedback) passivity, simultaneous stabilization, non-square system, parallel feedforward compensation, static output feedback

### I. 서론

시스템의 수동성(passivity)에 근거한 제어기 설계 및 관측기 구성 연구는 다양한 응용 범위를 가지고 있다[2-6]. 수동성을 갖지 않은 대상 시스템을 적절한 보상기로 수동화(passivation)하는 연구 중에서 병렬 보상기(Parallel Feedforward Compensator, PFC)를 설계하여 수동화하는 방법은 시스템의 상태(state) 정보를 모두 사용하지 않고 주어진 출력만을 고려하는 이점으로 다수의 연구자들에 의해 꾸준히 연구되고 있다[7-12].

한편, 수동성은 입출력의 개수가 같은 정방(square) 시스템에 대해 정의되므로, 입출력의 개수가 다른 비정방(non-square) 시스템에 대해서는 입출력의 개수를 같게 하는 정방화 행렬(squaring gain matrix)을 함께 구해야 한다. 비정방 시스템에 대해서 병렬 보상기와 정방화 행렬을 동시에 설계하는 수동화 연구는 거의 진행되지 않았고, 보다 체계적인 설계 방법이 필요하다[1,13]. 저자는 비정방인 다수 시스템에 대하여 단일 병렬 보상기를 이용한 수동화 방법을 상태 공간에서 제시하였다[1]. 이것은 수동화만의 문제가 아니라 동시 안정화(simultaneous stabilization)와 같이 다수의 시스템에 대해 단일 제어기를 구성하는 문제이므로 강인 제어기 설계 분야에 있어 중요한 의미를 갖는다[14-17]. 또한 비정방 시스템의 수동화에 필요한 병렬보상기와 정방화 행렬의 형태를 제안하고, 제안된 시스템을 체계적으로 설계하

기 위한 새로운 행렬의 존재에 대하여 필요충분조건을 제시하였다. 즉, 보상기 설계 과정에서 제안한 가상 시스템에 대하여 정적출력궤환(Static Output Feedback, SOF) 안정화 기법 혹은 경우에 따라서는 상태 궤환을 통한 극배치 알고리즘을 이용하여 제시된 필요충분조건을 만족시키는 행렬을 찾으면, 병렬보상기(PFC)와 정방화 행렬을 동시에 설계할 수 있음을 보였다[1].

본 논문에서는 비정방 시스템의 수동화를 위한 참고문헌 [1]의 필요충분조건을 완화하여 보상기 설계가 가능한 시스템의 범위를 넓히는 연구를 행한다. 즉, 새로운 형태의 병렬 보상기를 제안함으로써 논문 [1]에서 필요로 했던 조건의 수를 줄이는 연구를 행한다. 결과적으로 새로이 제안된 보상기를 통해 수동화 될 수 있는 시스템의 집합이 확대됨을 말한다. 예제에서는 보상기 설계에 대한 예로서 참고문헌 [1]에서 다루어진 시스템 뿐 만 아니라 최 구슬의 자기 부상을 위한 PID 제어기에서 미분항만을 효과적으로 대체할 수 있음을 보였다. 논문에서 행렬  $A$ 의 가장 큰 특이값(singular value)은  $\|A\|$ 로 표시하고,  $I_n$ 은  $n \times n$  단위 행렬을 뜻한다.

### II. 문제 정의 및 기본 정리들

본 논문에서는 다음과 같이 표현되는  $r$ 개의 시스템 집합에 대하여 단일 제어기를 통한 (동시) 수동화(혹은 안정화) 문제를 다룬다. 이 때 시스템들은 상대 차수(relative degree)가 1보다 크거나 비-최소 위상(non-minimum phase)이며, 출력 정보만이 측정 가능한 경우를 생각한다.

식에서  $x$ 는 상태,  $u$ 는 제어 입력,  $y$ 는 시스템의 출력이다(단,  $i = 1, \dots, r$ ).

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 12. 15., 채택확정 : 2004. 6. 3.

손영익 : 명지대학교 전기공학과 (sonyi@mju.ac.kr)

※ 이 논문은 2003년도 명지대학교 교내연구비 지원사업에 의하여 연구되었음.

$$(\Sigma_i): \begin{cases} \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, & x_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^m \\ y_i = C_i x_i, & y_i \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (1)$$

먼저, 시스템 (1)에 대해 다음과 같이 가정한다.

**가정 1 :** 시스템 (1)의 모든 출력에 대해 상대 차수는 2 이상이다. 즉, 시스템 (1)에 대해 입출력 행렬들의 곱  $C_i B_i = 0$  이다 ( $1 \leq i \leq r$ ).

논문에서 필요한 사항들을 설명하기 위해, 시스템 (1)의  $r=1$ 인 경우로서 다음과 같은(단일) 시스템을 고려한다.

$$(\Sigma): \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (2)$$

입력과 출력의 개수가 같을 때, 시스템 (2)는 정방(square)이라 하고, 그렇지 않은 경우(즉,  $m \neq p$ )일 때, 비정방(non-square)이라고 한다.

논문에서 제안하는 보상기 설계 방법은 [1]에서와 같이 정적출력궤환(Static Output Feedback, SOF) 안정화 알고리즘을 이용할 수 있다. 정적출력궤환 안정화 문제란 제어 입력  $u = -Fy$  (단,  $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ )를 이용하여 폐루프 시스템 행렬  $A - BFC$ 의 모든 고유치가 음의 실수부를 갖도록 하는 문제이다. 그러한 행렬을 안정한 행렬이라고 한다. 한편, 시스템 (1)에 대해 단일 이득 행렬  $F$ 를 이용하여 모든  $A_i - B_i F C_i$ 들을 동시에 안정하게 하는 문제는 동시 정적출력궤환(simultaneous static output feedback) 안정화라 한다 [14].

Cao와 Sun [14]은 다음의 행렬 부등식을 이용하여 출력 궤환 이득 행렬  $F$ 를 계산하는 반복적인 선형 행렬 부등식(LMI) 알고리즘을 제시하였다. 행렬  $F$ 가  $P$ 에 독립적으로 구해짐으로 다수 시스템에 대한 문제(즉, 동시 출력 궤환 안정화 문제)로 쉽게 확장될 수 있다[14].

**정리 1** [14] : 시스템 (2)가 정적출력궤환(SOF)에 의해 안정화될 수 있는 필요충분조건은 다음의 행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬  $P = P^T > 0$ 와  $F$ 가 존재한다는 것이다.

$$A^T P + PA - PBB^T P + (B^T P - FC)^T (B^T P - FC) < 0 \quad (3)$$

선형 시불변(LTI) 시스템이 정방일 경우에 대해서는 최소 위상이고 상대 차수 1을 가지면 출력 궤환에 의해 엄격한 수동성을 갖도록 만들 수 있다[18, Remark 4.1]. 이 때 시스템은 거의 엄격한 수동적(Almost Strictly Passive, ASP)이라 한다. 최소 위상이라함은 출력이 영일 때의 시스템의 영 동특성(zero dynamics)이 안정함을 뜻하고, 시스템 (2)에 대해서 상대 차수가 1인 것은 행렬  $CB$ 가 정방 행렬이고 가역일 때이다[2]. 반면에 시스템 (2)가 정방일지라도 상대 차수가 1보다 크거나 비최소 위상이라하면 상태 궤환에 의해서라도 수동화될 수 없다. 그러한 경우 - 특히 출력 정보만이 측정 가능할 때 - 시스템의 출력에 적절한 보상을 통해 수동성을 얻기 위한 방법이 병렬 보상기를 사용하는 것이다 [7-10]. 또한, 고려하는 시스템이 비정방 시스템이라면 출력

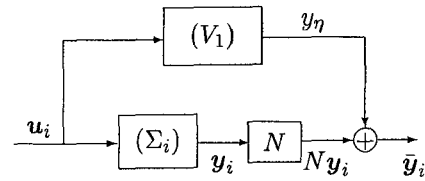


그림 1. 비정방 시스템을 위한 병렬 연결.

Fig. 1. Parallel connection for non-square systems.

의 개수를 입력의 개수와 같게 만들어 주는 정방화 행렬을 구해야 한다[1].

논문 [1]에서는 상대 차수가 1보다 크거나 비최소 위상인  $r$ 개의 시스템 (1)에 대해서 다음과 같은 단일 병렬 보상기 ( $V_1$ )과 정방화 행렬  $N \in \mathbb{R}^{m \times p}$ 을 설계하여, 함께 결합한 새로운 시스템들이 모두 거의 엄격한 수동성(ASP)을 갖도록 하였다(그림 1 참조).

$$(V_1): \begin{cases} \dot{\eta} = E\eta + Mu, & \eta \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^m \\ y_\eta = L\eta, & y_\eta \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (4)$$

이 때, 보상기 (4)와 정방화 행렬  $N$ 의 설계 문제는 새로운 가상 시스템들의 출력 궤환 안정화 문제로 바뀌고, 설계를 위한 행렬들이 존재할 필요충분조건은 (3)과 같은 형태의 행렬 부등식들의 해가 존재하여 추가적인 조건을 만족하는 것이다. 논문 [1]의 주 결과는 다음과 같다. 편의상 행렬  $\mathcal{C}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\mathcal{C}_i := \begin{bmatrix} C_i \\ C_i A_i \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (5)$$

**정리 2** [1] : 영이 아닌 상수  $\gamma$ 로  $L = \gamma I_m$ 과 같이 정한다. 가정 1이 만족될 때,  $r$ 개의 시스템들 (그림 1)이 거의 엄격히 수동적(ASP)이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

i) 아래 행렬 부등식들을 만족하는  $r$ 개의  $P_i = P_i^T > 0$ 들과  $\bar{F}$ 가 존재한다:

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i^T P_i + (B_i^T P_i - \bar{F} \mathcal{C}_i)^T (B_i^T P_i - \bar{F} \mathcal{C}_i) < 0;$$

ii)  $\bar{F} = [\bar{F}_1 \quad \bar{F}_2]$ 일 때,  $\bar{F}_1 = K \bar{F}_2$ 를 만족하는 행렬  $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 가 존재한다.

논문 [1]에서 언급하였듯이 위의 두 번째 조건이 정방 시스템에서는 큰 제한이 되지 않지만 비정방 시스템에 대해서는 보상기를 설계할 수 있는 시스템의 집합을 제한 할 수 있다. 따라서, 본 논문에서는 새로운 병렬 보상기를 제안하여 [1]의 제한적인 조건 없이(행렬 부등식의 해 만으로) 보상기와 정방화 행렬을 설계함으로써 단일 제어기를 통한 (동시) 수동화(혹은 안정화) 문제를 해결하고자 한다.

### III. 새로운 병렬 보상기와 정방화 행렬의 설계

본 논문에서는 다음과 같은 새로운 병렬 보상기 ( $V_2$ )

를 제안한다. 이전 논문에서와 같이 추가 시스템  $(V_2)$ 는 주어진 시스템의 입력과 같은 차수를 가진다. 이런 시스템을 입력-차수(input-dimensional) 시스템이라 한다[1].

$$(V_2): \begin{cases} \dot{\eta} = E \mathbf{y}_i + M \mathbf{u}_i, & \eta \in \mathbb{R}^m, \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y}_\eta = L\eta, & \mathbf{y}_\eta \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (6)$$

우리는 새로운 병렬 보상기  $(V_2)$ 와 정방화 행렬  $N \in \mathbb{R}^{m \times b}$ 을 이용하여 그림 2와 같이 결합한  $r$ 개의 새로운 시스템들이 거의 엄격한 수동성을 갖도록 한다. 즉, 그림 2의 전체 시스템들이 하나의 출력 이득 행렬에 의해 엄격한 수동성을 갖도록  $E, L, M, N$ 들을 설계한다. 그 과정은 논문 [1]과 동일하다.

그림 2와 같이 병렬 연결된 시스템 식은 다음과 같다 (단,  $i = 1, \dots, r$ ).

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ EC_i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ M \end{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{y}_i = [NC_i \ L] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \eta \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (7)$$

시스템 (7)이 수동화되기 위해서는 상대 차수 1이고 최소 위상을 가져야 한다. 우리는 먼저, 임의의 영이 아닌 상수  $\gamma$ 로  $L$ 을 다음과 같이 정한다. 이  $L$ 은 임의의 가역 행렬로 바꿀 수 있다.

$$L = \gamma I_m. \quad (8)$$

이제, 시스템 (7)의 출력은

$$\mathbf{y}_i = N \mathbf{y}_i + \gamma \eta, \quad \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^m \quad (9)$$

이며 ( $i = 1, \dots, r$ ), 가정 1에 의해 그 미분은

$$\dot{\mathbf{y}}_i = NC_i A_i \mathbf{x}_i + \gamma E \eta + (NC_i B_i + \gamma M) \mathbf{u}_i \quad (10)$$

이다. ( $1 \leq i \leq r$ ). 임의의 가역 행렬  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 을 이용하여 단일 보상기 (6)의  $M$ 을 다음과 같이 결정한다.

$$M = \gamma^{-1} R. \quad (11)$$

(11)에 의해 시스템 (7)은 상대 차수 1을 가지므로, 아래의 좌표변환 행렬을 이용하면[2, 12]

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - BR^{-1}NC & -\gamma BR^{-1} \\ NC & \gamma I_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \eta \end{pmatrix} \quad (12)$$

또는,  $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & BR^{-1} \\ -\gamma^{-1}NC & \gamma^{-1}(I_m - NCBR^{-1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}$

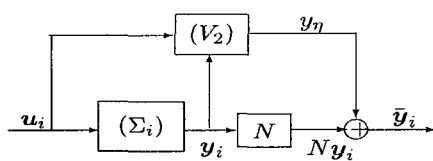


그림 2. 비정방 시스템의 앞먹임 수동화. Fig. 2. Feedforward passivation for non-square systems.

다음과 같은 정규 형태로 쓸 수 있다[2].

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\mathbf{y}}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{1i} & \widehat{A}_{2i} \\ \widehat{A}_{3i} & \widehat{A}_{4i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \mathbf{u}_i. \quad (13)$$

위에서  $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ 이고,

$$\begin{cases} \widehat{A}_{1i} = A_i - \gamma B_i R^{-1} E C_i - B_i R^{-1} N C_i A_i, \\ \widehat{A}_{2i} = A_i B_i R^{-1} \\ \widehat{A}_{3i} = N C_i A_i + \gamma E C_i, \\ \widehat{A}_{4i} = \widehat{A}_{3i} B_i R^{-1} \end{cases} \quad (14)$$

이다. ( $i = 1, \dots, r$ ). 결국, 시스템 (13)(혹은 (7))의 영 동특성은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\xi_i = (A_i - B_i [\gamma R^{-1} E \ R^{-1} N] C_i) \xi_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (15)$$

이제, 시스템 (7)이 최소 위상을 갖도록, 즉 시스템 (15)를 안정하게 만드는  $E$ 와  $N$ 을 구한다. 이를 위해 다음의 가상 시스템을 생각하자.

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i = A_i \xi_i + B_i \omega_i, & \xi_i \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}_{\xi_i} = C_i \xi_i, & \mathbf{y}_{\xi_i} \in \mathbb{R}^{2p}. \end{cases} \quad (16)$$

시스템 (16)에 대한 동시 SOF 문제는 행렬  $(A_i - B_i \overline{F} C_i)$ 들이 모두 안정하도록 하는 행렬  $\overline{F}$ 를 결정하는 것이므로, 적절한 알고리즘을 이용하여 시스템 (16)에 대한 동시 SOF 문제가 풀리면 영 동특성 (15)를 안정하게 할 수 있다. 즉, 동시 SOF 알고리즘으로부터 얻어진 이득  $\overline{F}$ 는  $\overline{F} = [\overline{F}_1 \ \overline{F}_2]$ 로 쓸 수 있고,  $\overline{F}_1$ 과  $\overline{F}_2$ 는 모두  $m \times p$  행렬이다. 이때, 행렬  $\overline{F}$ 를 다음과 같이 두면

$$\overline{F} = [\gamma R^{-1} E \ R^{-1} N] \quad (17)$$

$\overline{F}_1$ 과  $\overline{F}_2$ 로부터 나머지 행렬  $N, E, M$ 들을 차례대로 얻을 수 있다. 또한, (17)에서  $\overline{F}_2 = R^{-1} N$ 이므로, 행렬  $R$ 은  $N$ 의 크기를 조절하는 역할을 할 수 있다.

보상기 (6)과 행렬  $N$ 이 결정된 후에 전체 시스템은 단일 출력 제한에 의해 엄격한 수동성을 가질 수 있다. 이것을 참고 논문 [14]를 이용하여 다음에서 정리하였다.

**정리 3 :** 영이 아닌 상수  $\gamma$ 로  $L = \gamma I_m$ 과 같이 정한다. 가정 1이 만족될 때,  $r$ 개의 시스템 (7)이 거의 엄격히 수동적(Almost Strictly Passive, ASP)이기 위한 필요충분조건은 아래 행렬 부등식들을 만족하는  $r$ 개의  $P_i = P_i^T > 0$ 들과  $\overline{F}$ 가 존재하는 것이다.

$$A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i B_i^T P_i + (B_i^T P_i - \overline{F}^T C_i)^T (B_i^T P_i - \overline{F}^T C_i) < 0. \quad (18)$$

**증명 :** 가정 1 하에서  $r$ 개의 시스템 (7)은 (10)-(11)에 의해 상대 차수 1을 갖고 시스템 (13)과 동치이다. 위의 두 조건이 만족되면  $(A_i - B_i \overline{F} C_i)$ 를 안정하게 만드는  $\overline{F} = ba[\overline{F}_2 \ \overline{F}_1]$ 가 존재한다. (17)에 의해 다음을 얻을 수 있다.

$$E = \gamma - 1 R \overline{F}_1, \quad N = R \overline{F}_2. \quad (19)$$

이것은 아래와 같이 결정된 시스템 (6)을 통해  $\overline{A}_{1i}$ 들이 모두 안정함을 의미한다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \gamma^{-1} R \overline{F}_1 \eta + \gamma^{-1} R u_i \\ \overline{y}_i = R \overline{F}_2 \eta + \gamma \eta. \end{cases} \quad (20)$$

한편, 모든  $\overline{A}_{1i}$ 들이 안정하면 (18)이 만족되므로, 위 조건은 시스템 (13)이 최소 위상인  $E$ 와  $N$ 이 존재할 필요충분조건이다. 그런데, 시스템 (13)은 상대 차수 1을 가짐으로 위 조건은 결국 시스템 (7)이 거의 엄격히 수동적이기 위한 필요충분조건이 된다.

완전한 증명을 위해 다음의 출력 궤환 제어

$$u_i = -F \overline{y}_i + R^{-1}v \quad (21)$$

를 통해 폐루프 시스템 (13)-(21)이  $v$ 로부터  $\overline{y}_i$ 가 엄격한 수동성을 지님을 보인다 (그림 3). 위에서 시스템 (13)의  $\overline{A}_{1i}$ 들이 안정하므로 다음을 만족하는 행렬  $P_i = P_i > 0$ 들이 존재한다.

$$P_i \overline{A}_{1i} + \overline{A}_{1i}^T P_i = -I_n, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (22)$$

리아프노프 함수를 아래와 같이 정하고

$$V_i(\xi_i, \overline{y}_i) = \frac{1}{2} \xi_i^T P_i \xi_i + \frac{1}{2} \overline{y}_i^T \overline{y}_i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (23)$$

시스템 (13)을 따라 시간에 대해 미분하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= -\frac{1}{2} \xi_i^T (\overline{A}_{1i}^T P_i + P_i \overline{A}_{1i}) \xi_i + \xi_i^T P_i \overline{A}_{2i} \overline{y}_i \\ &\quad + \overline{y}_i^T \overline{A}_{3i} \xi_i + \overline{y}_i^T \overline{A}_{4i} \overline{y}_i + \overline{y}_i^T R u_i \\ &\leq -\frac{1}{2} |\xi_i|^2 + \|P_i \overline{A}_{2i} + \overline{A}_{3i}^T\| |\xi_i| |\overline{y}_i| \\ &\quad + \|\overline{A}_{4i}\| |\overline{y}_i|^2 + \overline{y}_i^T R u_i \\ &\leq -\frac{1}{4} |\xi_i|^2 + (\|P_i \overline{A}_{2i} + \overline{A}_{3i}^T\|^2 + \|\overline{A}_{4i}\|) |\overline{y}_i|^2 \\ &\quad + \overline{y}_i^T R u_i. \end{aligned}$$

(21)에서  $F = \sigma R^{-1}$ 이고

$$\sigma > \max_i (\|P_i \overline{A}_{2i} + \overline{A}_{3i}^T\|^2 + \|\overline{A}_{4i}\|) + 1 \text{ 일 때,}$$

$$V_i(\xi_i, \overline{y}_i) \leq -\frac{1}{4} |\xi_i|^2 - |\overline{y}_i|^2 + \overline{y}_i^T v, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (24)$$

(24)는 폐루프 시스템 (13)-(21)(또는 (7)-(21))의 엄격한 수동성을 의미한다. ■

(24)는  $v=0$ 일 때 폐루프 시스템 (13)-(21)의 안정성을 보장한다. 그리고,  $v=0$ 일 때 그림 3은 그림 4와 같이 나타낼 수 있다. 따라서, 제안된 보상기 설계 방법은 시스템 집합 (1)에 대한 동시 출력 궤환 동적 안정화 제어기 설계 방법으로 볼 수 있다. 다음과 같은 따름 정리를 얻는다.

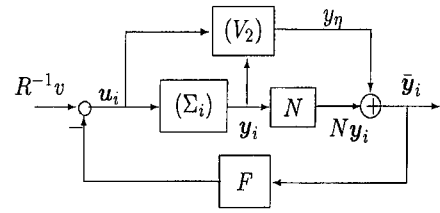


그림 3. 병렬 연결된 시스템에 대한 SOF.  
Fig. 3. SOF for parallel-connected systems.

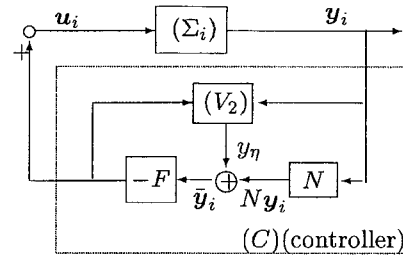


그림 4. 병렬 연결과 등가인 궤환 연결 ( $v=0$ ).  
Fig. 4. Equivalent feedback connection ( $v=0$ ).

**따름 정리 1 :** 가정 1 하에서 행렬 부등식 (18)이 만족되면,  $r$ 개의 시스템 (1)은 하나의 추가 시스템 (20)으로부터 얻어진 동적 출력 궤환 입력에 의해 안정화된다.

**첨언 4 :** 따름 정리 1에서 (18)이 단일한  $P$ 로 만족되는 경우 - 즉,  $P_i = P (1 \leq i \leq r)$  - 를 생각하자. 이 때 시스템 (13)들의 영 동특성들은 2차적으로 동시 안정화(simultaneous quadratic stabilization)되었다고 한다[17]. 이 경우 따름 정리 1은 시변(time-varying) 불확실성을 지닌 시스템의 강인 제어기 구성 문제에 대하여 폴리토픽 기반(polytopic-based)의 동적 출력 궤환 제어기를 구성하는 한 가지 해를 제공한 것이 된다[15].

**첨언 5 :** 이전 결과인 정리 2와 비교하여 정리 3에서는 (18)의 해  $\overline{F}$ 에 대하여  $\overline{F}_1 = K \overline{F}_2$ 라는 추가적인 조건을 요구하지 않는다. 이는 시스템 (4)를 이용하면 영 동특성이 아래와 같기 때문이다.

$$\xi_i = (A_i - B_i[-R^{-1}EN \ R^{-1}N] C_i) \xi_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (25)$$

다시 말해 (15)와 달리 (25)에서는 행렬  $N$ 이  $\overline{F}_1$ 과  $\overline{F}_2$ 에 공통으로 속해있어 추가적인 조건을 필요하게 된다. 정리 3에서는 추가적인 조건을 제거함으로써 병렬 보상기의 설계를 보다 쉽게 하고, 적용 시스템의 범위를 확장한 것이라 할 수 있다.

**첨언 6 :** (12)에서  $\overline{y}_i \equiv 0$ 일 때,  $\xi_i$ 와  $x_i$ 가 동일함에 주목한다. 만약 (1)에 대한 동시 안정화 문제에 대한 해가 다음과 같이 미리 알려져 있다면 병렬 보상기를 쉽게 구성할 수 있다. 즉,

$$u_i = -K_p y_i - K_d \dot{y}_i = -(K_p C_i + K_d C_d A_i) x_i \quad (26)$$

이므로, 아래 식으로 병렬 보상기 (20)을 구성할 수 있다.

$$\overline{F}_1 = K_p, \quad \overline{F}_2 = K_d. \quad (27)$$

이것은 만약 (1)이 PD 제어기에 의해 안정화된다면 논문에서 설계한 보상기를 이용하여 미분항을 대체할 수 있음을 뜻한다.

정리 3의 증명에서 시스템 (16)을 안정화시키는 이득 행렬  $\overline{F}$ 는 다른 SOF 알고리즘으로 얻을 수 있다(예를 들어 [19]). 다음절에서는 몇 가지 예를 통해 제안된 설계 방법을 설명한다.

#### IV. 몇 가지 예제들

제안된 병렬 보상기를 이전 논문의 다수 시스템의 경우에 대해 설계하였다. 그리고, 병렬 보상기 설계를 통한 제어기 적용 예로서 LQR 제어를 통해 안정화되는 쇠 구슬의 자기 부상 시스템 [20] 위치 제어 문제를 다루었다.

**예제 1 :** 다음과 같은 전달함수로 표현되는 시스템을 생각한다.

$$G(s) = \frac{\sqrt{\theta+1}}{s^2 + (\theta^2 - 10)s + 3\theta + 11}, \quad 3 \leq \theta \leq 11. \quad (28)$$

이 예는 논문 [14]의 상대 차수 1이고, 최소 위상인 경우를 상대 차수가 2인 시스템으로 바꾼 것이다. 즉, 참고 논문 [14]의 경우는 정적 출력 궤환으로 수동화될 수 있음을 쉽게 알 수 있다. 우리는 공칭 작용점  $\theta_1 = 7$ 과  $\theta_2 = 3$ ,  $\theta_3 = 11$ 인 세 경우 즉, 다음 시스템들에 대해 하나의 병렬 보상기를 설계하는 문제를 생각한다[14].

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -39 & -32 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -39 & -44 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \\ B_1 &= B_2 = B_3 = [1 \ 0]; \\ C_1 &= [0 \ 3.65], C_2 = [0 \ 2.73], C_3 = [0 \ 4.32]. \end{aligned} \quad (29)$$

먼저, 가정 1이 만족됨을 쉽게 알 수 있다. 가상의 출력 이득 행렬  $\overline{F} = [6 \ 4]$ 일 때, 정리 3의 조건을 만족시키는  $P_1, P_2, P_3$ 을 쉽게 찾을 수 있다. 또한,  $P\widehat{A}_{12} + \widehat{A}_{12}^*P = -I_2$ 인 하나의  $P$ 에 대해서 조건을 만족한다. 따라서,  $\gamma = R = 0.25$ 으로 정하면 다음과 같은 보상기 (20)을 얻는다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = 6 y_i + u_i \\ y_i = 4 y_i + \frac{1}{4} \eta. \end{cases} \quad (30)$$

위의 병렬 보상기와 결합된 시스템들 (29)-(30)은 모두 상대 차수 1을 갖고, 영 동특성 시스템 행렬  $\widehat{A}_i$ 의 고유치는 다음과 같이 안정하다.  $\lambda(\widehat{A}_{11}) = \{-52.56, -1.03\}$ ,  $\lambda(\widehat{A}_{12}) = \{-4.96 \pm j3.43\}$ ,  $\lambda(\widehat{A}_{13}) = \{-55.00, -1.27\}$ . 결국, 정리 3에 의해 시스템 (29)는 하나의 제어기로 엄격한 수동성을 갖게됨을 알 수 있다.

**예제 2 :** 다음과 같이 표현된 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2.98 & a_1(t) & 0 & -0.0340 \\ -0.99 & -0.210 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.8900 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.032 \\ 0 \\ 0 \\ -1.600 \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \ 0 \ 1 \ 0] \end{aligned} \quad (31)$$

단, 변수  $a_1(t)$ 는 범위  $-0.570 \leq a_1(t) \leq 2.430$  내의 임의의 수이다. 이 시스템은 참고 논문 [18, 22]에서 인용하였으나, 우리는 세 번째 상태만이 측정 가능한 경우를 다루고 있다. 상대 차수는 2이며, 가정 1이 만족된다.

참고 논문에서와 같이 다음 두 경우에 대해 제어를 설계한다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2.98 & -0.570 & 0 & -0.0340 \\ -0.99 & -0.210 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.8900 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -2.98 & 2.430 & 0 & -0.0340 \\ -0.99 & -0.210 & 0.035 & -0.0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.8900 \end{bmatrix}; \\ B_1 &= B_2 = B, C_1 = C_2 = C. \end{aligned} \quad (32)$$

이득 행렬  $\overline{F} = [-3 \ -3]$ 일 때,  $P\widehat{A}_{11} + \widehat{A}_{11}^*P = -I_4$ 인 하나의  $P$ 에 대해서 정리 3의 조건이 만족됨을 쉽게 확인할 수 있다. 따라서,  $\gamma = R = -1$ 으로 정하면 (20)에서 다음과 같이 병렬 보상기를 정할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -3 y_i + u_i \\ y_i = 3 y_i - \eta. \end{cases} \quad (33)$$

위와 결합된 시스템 (32)-(33)은 모두 상대 차수 1을 갖고, 영 동특성의 시스템 행렬  $\widehat{A}_i$ 의 고유치는 다음과 같다.  $\lambda(\widehat{A}_{11}) = \{-0.10, -0.77, -3.10, -5.91\}$ ,  $\lambda(\widehat{A}_{12}) = \{-0.88, -1.55 \pm j0.79, -5.90\}$ . 결국, 시스템 (32)는 하나의 제어기로 엄격한 수동성을 갖게됨을 알 수 있다.

아래 예제에서는 쇠 구슬의 자기 부상 시스템에 대해 병렬 보상기를 사용함으로써 PID 제어 입력 중에서 미분항을 대체할 수 있음을 보인다.

**예제 3 :** 아래와 같이 선형화된 자기 부상 모델을 생각한다[20].

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2800z_1 - 19600z_3 \\ \dot{z}_3 = -26.667z_3 + 2.4242u \\ \dot{z}_4 = z_1 \end{cases}, \quad y = [z_1 \ z_3 \ z_4] \quad (34)$$

모델에 대한 자세한 설명은 참고 자료 [20]을 참고한다. 단, 상태 변수  $z_1$ 은 부상된 볼의 목표 값  $x_c$ 와의 거리 차,  $z_2$ 는 그 속도,  $z_3$ 는 전자석 코일을 흐르는 전류이다. 그리고,  $z_4$ 는 적분 제어를 위해 추가된 상태로 상태  $z_1$ 을 적분한 것이다. 입력은 인가되는 전압이고, 속도를 제외한 상태들은 모두 측정 가능하다고 한다.

먼저, 위 시스템은 제어 가능하므로 목적함수  $J = \int_0^\infty (z^T Qz + u^T R u) dt$ 를 최소화하는 LQR 제어를 통해 모든

$$u = -kz = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]z \quad (35)$$

상태는 안정하고,  $z_1$ 은 영으로 수렴함을 알 수 있다[22]. 예를 들어,  $Q = \text{diag}[1 \ 0 \ 1 \ 1]$ 와  $\bar{R} = 10$ 으로 구한 상태 궤환 이득  $k$ 는 다음과 같다.

$$k = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] = [-9.4644 \ -0.17865 \ 43.862 \ -0.31623]. \quad (36)$$

이 때, 페루프 시스템의 고유치는  $\{-55.740, -49.381, -27.680, -0.1972\}$ 이다.

본 예제에서는 위 제어 규칙 (35)에서 미분 항  $z_2$ 의 측정 없이, 병렬 보상기를 이용하여 시스템을 안정화 할 수 있음을 보인다. 편의상 시스템 방정식의 행렬을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2800 & 0 & -19600 & 0 \\ 0 & 0 & -26.667 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.4242 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

이제, 제어 규칙 (35)는 다음과 같이 쓸 수 있고, 보상기 설계에 필요한  $\bar{F}$ 를 얻을 수 있다.

$$u = -[k_1 \ k_3 \ k_4]Cz - [k_2 \ 0 \ 0]CAz. \quad (38)$$

위로부터  $\gamma = R = 1$  일 때,  $N = \bar{F}_2 = [k_2 \ 0 \ 0]$ 이고,  $E = \bar{F}_1 = [k_1 \ k_3 \ k_4]$ 이므로 병렬 보상기 (20)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [k_1 \ k_3 \ k_4]Cz + u \\ y = k_2 z_1 + \eta. \end{cases} \quad (39)$$

정리 2에 의하여 두 시스템 (37)-(39)의 연결된 시스템은 거의 엄격한 수동성을 갖고,  $u = -\bar{F}y$ 에 의하여 안정화 됨을 알 수 있다. 본 예제에서는 아래 식에 착안하여

$$\bar{y} = k_2 z_2 + \bar{F}_1 Cz + u, \quad (40)$$

다음 제어 입력을 생각한다.

$$u = -\bar{F}_1 Cz - \psi \bar{y}. \quad (41)$$

이는 제어 입력 (35) 중에서 측정 가능한 상태 궤환은 그대로 사용하고, 측정 불가능한 상태만을 대체하려는 것이다. 충분히 큰  $\psi$ 에 대해 전체 페루프 시스템은 안정함을 알 수 있고,  $\psi = 200$ 일 때 페루프 시스템의 고유치는  $\{-258.13, -28.856 \pm j51.467, -16.955, -0.1972\}$ 이다.

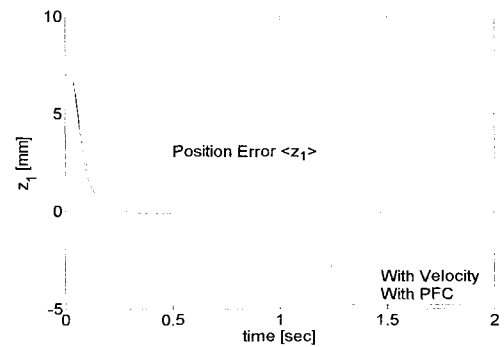
초기조건이  $z(0) = [7, 0, -1, 0]$ 인 모의 실험 결과는 그림 5에 나타내었고, 속도 정보를 사용한 입력 (35)에 의한 결과와 같이 그렸다. 실선으로 표시된 궤적이 제안된 병렬 보상기에 의한 결과이며, 점선이 제어 (35)에 의한 결과이다.

속도 정보 없이 페루프 시스템이 안정함을 확인할 수 있다.

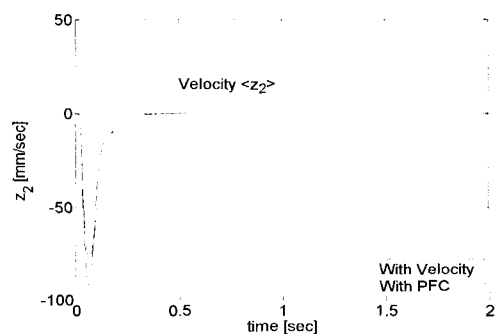
### V. 결론

동시 안정화(simultaneous stabilization)와 같이 다수의 시스템에 대해 단일 제어기를 구성하는 문제는 강인 제어기 설계 분야에 있어 중요한 문제이다. 또한, 수동성에 기반한 제어기는 제어 결과 얻어진 페루프 시스템이 강인한 안정성을 지닌다고 알려져 있다. 본 논문에서는 상대 차수가 1보다 크거나 비-최소 위상인 다수의 시스템 집합에 대하여 단일 병렬 보상기(PFC)와 정방화 행렬을 설계하는 방법을 연구하였다. 설계된 병렬 보상기와 이득 행렬을 통해 페루프 시스템들은 엄격한 수동성을 갖는다. 따라서 논문의 결과는 출력 정보만이 측정 가능하고 정적 출력 궤환(SOF)만으로 안정화 할 수 없는 경우에 대해, 하나의 병렬 보상기로 여러 시스템들을 동시에 수동화(혹은 안정화)하는 문제에 대한 한가지 해를 제시한 것이다.

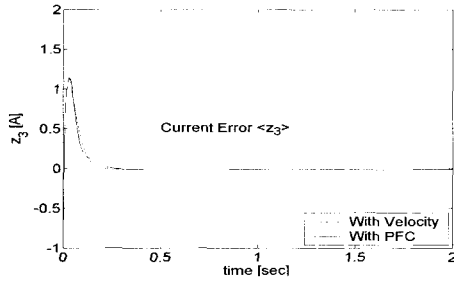
병렬 보상기가 입력과 같은 차수를 가질 경우에 대한 설계 문제는 정적출력궤환(SOF) 기법을 사용할 수 있고, 따라서 선형 행렬 부등식(LMI)과 같은 수치적인 방법이 사용될 수 있음을 보였다. 본 결과는 기존의 정방 시스템에 대한 병렬 보상기 설계 문제나 정방화 행렬만으로 비정방 시스템을 수동화하는 문제보다 일반적인 경우에 대한 해를 제시한 것이라 할 수 있다. 한편, 많은 실제적인 시스템들이 입력에서 일반적인 속도 출력까지 수동성을 가지며, 그 결과로 비례-미분(PD) 제어기가 얻어진다. 제안된 수동화 방법은 PD 뿐만 아니라 PID 제어기로 제어 가능한 시스템에 대해 미분 항 만을 대체하는 방법으로 활용될 수 있음을 쇠 구슬의 자기 부상 시스템 [20] 예로 설명하였다.



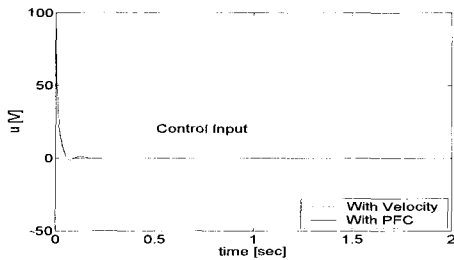
(a) 위치 오차:  $z_1$



(b) 볼의 속도:  $z_2$



(c) 코일 전류 오차:  $z_3$



(d) 입력 전압:  $u$

그림 5. 모의 실험 결과.  
Fig. 5. Simulation results.

참고문헌

[1] 손영익, "수동화 기법에 의한 비정방 선형 시스템의 강인 제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템공학회 논문지, 제8권, 제11호, pp. 907-915, 2002.

[2] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems, "Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 11, pp. 1228-1240, 1991.

[3] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 2nd Ed., 1996.

[4] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P.V. Kokotovic, *Constructive Nonlinear Control*, Springer-Verlag, 1997.

[5] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, *Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems*, Springer-Verlag, 1998.

[6] H. Shim, J. H. Seo, and A. R. Teel, "Nonlinear observer design via passivation of error dynamics," *Automatica*, vol. 39, pp. 885-892, 2003.

[7] I. Bar-Kana, "Parallel feedforward and simplified adaptive control," *Int. J. Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 1, no. 2, pp. 95-109, 1987.

[8] H. Kaufman, I. Bar-Kana, and K. Sobel, *Direct Adaptive Control Algorithms*, Springer-Verlag, 2nd Ed., 1998.

[9] Z. Iwai and I. Mizumoto, "Realization of simple adaptive control by using parallel feedforward compensator," *Int. J. Control*, vol. 59, no. 6, pp. 1543-1565, 1994.

[10] A. G. Kelkar and S. M. Joshi, "Robust control of

non-passive systems via passification", In *Proc. of American Control Conference*, 1997.

[11] M. Deng, Z. Iwai, and I. Mizumoto, "Robust parallel compensator design for output feedback stabilization of plants with structured uncertainty," *Systems & Control Letters*, vol. 36, pp. 193-198, 1999.

[12] Y. I. Son, H. Shim, and J.H. Seo, "Passification of nonlinear systems via dynamic output feedback", *Journal of KIEE*, pp. 23-28, 2000.

[13] Y. Kawasaki, I. Mizumoto, R. Wakamiya, and Z. Iwai, "Adaptive control of an inverted pendulum system," In *Proc. of Asia-Pacific Vibration Conference '93*, Japan, vol. 3, pp. 1114-1119, 1993.

[14] Y.-Y. Cao and Y.-X. Sun, "Static output feedback simultaneous stabilization: ILMI approach," *Int. J. Control*, vol. 70, no. 5, pp. 803-814, 1998.

[15] R. E. Benton, Jr. and D. Smith, "A non-iterative LMI-based algorithm for robust static-output-feedback stabilization," *Int. J. Control*, vol. 72, no. 14, pp. 1322-1330, 1999.

[16] S. M. Joshi and A. G. Kelkar, "Passivity-based robust control of systems with redundant sensors and actuators," *Int. J. Control*, vol. 74, no. 5, pp. 474-481, 2001.

[17] I. N. Kar, "Design of static output feedback controller for uncertain systems," *Automatica*, vol. 35, pp. 169-175, 1999.

[18] Z. P. Jiang and D. J. Hill, "Passivity and disturbance attenuation via output feedback for uncertain nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 7, pp. 992-997, 1998.

[19] C. A. R. Crusius and A. Trofino, "Sufficient LMI conditions for output feedback control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, no. 5, pp. 1053-1057, 1999.

[20] Quanser Inc. Specialty - MAGLEV.pdf. Available at <http://www.quanser.com>.

[21] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza, "Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 41, no. 7, pp. 997-1003, 1996.

[22] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, 1989.



손영익

1969년 3월 11일생. 1995년 서울대학교 전기공학과 졸업. 동대학원 석사(1997), 동대학원 전기 · 컴퓨터공학부 박사(2002). 2003년 3월 - 현재 명지대학교 전기공학과 조교수. 관심 분야는 로보틱스, 비선형 시스템 제어기 및 관측기 설계, 전력 시스템.