

# AMR-CIP 법을 이용한 이류 방정식에 관한 수치해석

윤 성 영\*

(2004년 3월 8일 접수, 2004년 5월 25일 심사완료)

## Application of CIP Method on Advection Equation by Adaptive Mesh Refinement

Seong Young Yoon

**Key Words :** Adaptive Mesh Refinement(적응 격자 분할법), CIP Method(CIP 법), Level Set Method (레벨셋법), Advection Equation(이류 방정식)

### Abstract

An accurate adaptive mesh refinement based on the CIP method is proposed and it is applied to solve the two dimensional advection equations. In this method, the level set function is employed to refine and merge the computation cells. To enhance the accuracy of the solution, the spatial discretization is made by the CIP method. The CIP method has many advantages such as the third order accuracy, less diffusivity, and shape conserving. The mathematical formulation and numerical results are also described. To verify the efficiency, accuracy, and capability of the proposed algorithm, two dimensional rotating slotted cylinder and idealized frontogenesis are numerically simulated by the present scheme. As results, it is confirmed that the present method gives an efficient, reasonable solution in the advection equation.

---

### 기호설명

- $a$  : 보간 함수의 계수
- $A$  : 도달점
- $f$  : 함수 또는 해석해
- $D$  : 출발점
- $F$  : 보간 함수 또는 수치해
- $\mathbf{u}$  : 속도 벡터
- $\mathbf{x}$  : 공간좌표
- $t$  : 시간
- $\phi$  : 거리함수
- $M$  : 모니터 함수
- $\varepsilon$  : 상수
- $\omega$  : 각속도
- $\delta$  : 상수
- $e, w, n, s$  : 방위

### 1. 서론

일반적으로 수치해석의 정확도는 해석에 사용된 수치알고리즘의 정확도와 계산에 사용되는 격자의 폭에 의존한다. 만약 해의 정확도를 향상시키고자 하면 단순히 고차 알고리즘과 격자수를 증가시키면 되겠지만 그에 따라서 계산기의 메모리와 높은 연산처리 능력, 그리고 계산오차의 누적등과 같은 역효과도 가져올 수 있다. 그뿐만 아니라 실제의 공학적인 문제들은 여러 가지 스케일의 물리적 현상이 같은 해석공간에 존재하기 때문에 전 계산 영역을 같은 크기의 격자로 계산한다는 것은 비효율적이다.

이를 위해서 Berger와 Olinger(1984)은 수치해로부터 오차를 예측하여 격자를 세분화하거나 또는 세분화가 필요 없는 곳에는 세분화된 격자를 다시 합치는 적응 격자 분할법을 편미분 방정식에 적용하였다. Berger등은 그 논문에서 오차측정, 데이터 구조 등에 대해서 설명하였고 일차원 shock tube문제, 2차원 강체 회전 및 Burgers 방정식에 대한 문제를 통해서 해의 정확도를

---

\* 회원, 영남대학교 기계공학부  
E-mail : syoon@yumail.ac.kr  
TEL : (053)810-2265 FAX : (053)813-4627

검증하였다. Hundsdoerfer와 Tromper(1994)는 MOL법을 사용하여 선형 이류 문제에 적응 격자 분할법을 적용하였다. 이들 역시 강제 회전 문제와 혼합 전선 문제 등에 AMR을 적용하여 정확도와 계산 효율 등을 비교하였다. 그 밖에도 최근에는 사면 구조 격자 기법 (Quadtree 격자)를 이용하여 중력장이 작용하는 자유표면의 운동을 기술하는 천수 방정식을 계산한 경우(Borthwick 등, 2001)도 있다.

본 연구에서는 보다 정확하고 효율적인 수치해석을 하기 위해서 CIP 법을 이용한 적응격자 분할법을 제안하였다. 이를 위해서 우선 고정도의 이류 수치 방법인 CIP 법을 이용하였다. CIP 법은 Yabe 등(1991)이 제안한 이류방정식을 계산하는 수치방법 중 하나이며 이것은 계산하고자 하는 물리량과 그 구배량을 이용하여 공간적으로 3 차원 다항식을 만들어서 물리량을 보간 하기 때문에 종래의 수치 해석법과는 달리 수치확산이 적고 shape conserving, compact 한 특성을 가지고 있다. 특히 이 방법은 고차의 이류 수치 해석법이면서 적은 stencil 을 사용하기 때문에 격자 분할법에 적용하였다.

한편 격자 분할 방법으로서는 간편하고 정확하게 격자를 분할할 목적으로 Level set 법을 이용하였다. Level set 법(Osher 등, 1988)은 VOF 법(Hirt 등, 1981)과 같이 Eulerian 격자계에서 상경계면을 추적하기 위해서 사용된 방법이다. 이 방법은 VOF 법과는 달리 연속함수를 사용함으로써 보다 정확하게 상경계를 정의 할 수 있다는 장점이 있다. 그래서 본 연구에서는 Level set 법과 CIP 법을 기초로 한 AMR-CIP 법을 제안하고 이 방법을 이류 방정식에 적용하였다. 정량적인 검토를 위해서 rotating slotted cylinder 문제와 fronto- genesis 문제에 대해서 제안된 방법을 적용하였고 수치해결을 해석해와 비교하여 본 방법의 정확성과 효율성에 대해서 검토하였다.

2. 이류 방정식 계산

본 연구에서 해석하고자 하는 방정식은 이류 방정식으로써 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0 \quad \mathbf{x} \in R^d, t > 0 \quad (1)$$

$$f(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{x}) \quad (2)$$

여기서  $f_0$ 는 초기값이고 상첨자  $d$ 는 차원수를 나타낸다.

본 연구에서는 이류 방정식 계산을 위해서 CIP 법을 사용하였다. Semi-Lagrangian 법의 한

종류인 CIP 법은 공간적으로 3 차 정도의 정확도와 수치확산이 적고 shape conserving 특성이 있기 때문에 압축성 유동과 다상 유동 해석에 많이 이용되어 왔다.(Yabe 등, 1991; Yoon 등, 1999; Nakamura 등, 2001) 일차원 이류방정식을 이용하여 이 방법을 간략히 설명하면 다음과 같다.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = RHS \quad (3)$$

위 식에서 우변 항이 영이면 물리량,  $f(x,t)$ 는 입자가 움직이는 궤적을 따라서 그 물리량의 변함이 없다는 것을 나타낸다.

따라서 입자가 시각  $t$ 에서 점  $D$ 를 출발하여 시각  $t + \Delta t$ 에 점  $A$ 에 도달하였다고 한다면 그때 두 지점에서의 물리량 사이에는 다음과 같은 관계가 존재한다.

$$f(x, t + \Delta t) = f(x^*, t) \quad (4)$$

여기서  $x^*$ 는 출발점을 나타내고 그것은 일반적으로 Eulerian 격자점과 일치하지 않는다. 그래서 출발점에서의 물리량을 구하기 위해서는 먼저 출발점의 위치를 알아야 한다. 그 다음으로 출발점  $D$ 에서의 물리량을 보간법을 이용하여 구해야 한다.

CIP 법에서는 보간 함수로서 다음과 같은 Cubic Piecewise Polynomial 을 사용한다.

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (5)$$

$$[x_{i-1} < x \leq x_i \text{ if } u \geq 0]$$

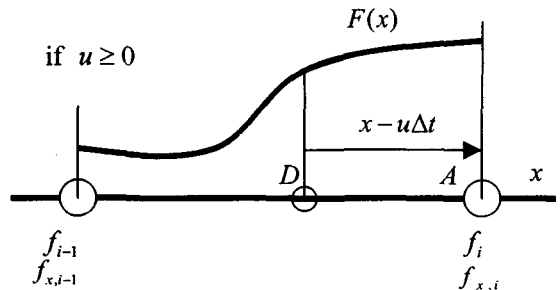


Fig. 1 The procedure for constructing the cubic piecewise interpolation

식 (5)로 주어진 다항식의 계수  $a_0, a_1, a_2$  그리고  $a_3$  는 Fig. 1 에서와 같이 출발점을 둘러싸고 있는 두 점에서의 물리량과 1 차 미분값을 가지고 결정할 수 있다

결과적으로 식 (5)의 계수는 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} a_0 &= f_i \\ a_1 &= f_{x,i} \\ a_2 &= \frac{f_{x,i} - f_{x,i-1}}{\Delta x^2} - 2 \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x^3} \\ a_3 &= 3 \frac{f_{i-1} - f_i}{\Delta x^2} + \frac{2f_{x,i} + f_{x,i-1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)에서  $f_x$  는 함수  $f$  의  $x$  에 대한 공간 1 차 미분으로서 이것은 식 (3)을  $x$  에 대하여 미분한 다음과 같은 식을 계산해서 얻을 수 있다.

$$\frac{df_x}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial t} + u \frac{\partial f_x}{\partial x} = RHS_x - f_x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7)$$

2 차원의 경우는 보간 함수를 완전한 Bi-Cubic Piecewise Polynomial 을 사용하거나 일차원 보간 함수를  $x$  방향과  $y$  방향으로 순차적으로 적용하는 directional splitting 방법을 사용할 수 있다.

만약 식 (3)에서 우변항의  $RHS$  값이 0 이 아니라면 시각  $t + \Delta t$  와  $t$  에서의  $RHS$  값으로 결정할 수 있다.

### 3. 적응 격자 분할법

압축성 또는 다상 유동과 같은 문제를 해석할 때 충격파가 발생되거나 서로 다른 상이 존재하는 그 상경계면에서 수치해의 정확도는 매우 중요하다. 따라서 이 지점에서의 격자를 세분화하여 공간 분해능을 향상시키는 것이 필요하다.

이를 위한 방법으로 고해상도의 필요성 유무에 따라서 격자를 분할 또는 결합하는 적응 격자 분할법을 도입하였다.

본 연구에서는 계산영역 내에서 격자를 분할/결합과정을 효율적으로 수행하기 위해서 Level Set 개념을 이용하였다. 우선 격자를 분할하려는 기준을 모니터 함수로 표시한다. 일반적으로 이 함수는 공간과 시간의 함수로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M = M(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

이 모니터 함수 값을 기준으로 하여 격자의 분할 또는 결합할 영역을 결정한다. 그리고 격자 분할의 레벨을 선정하기 위해서 Level set 법 개념을 도입한다. 우선 격자를 분할할 경계면에서 레벨함수를 0 으로 하고 내부를 음의 값, 그리고 외부를 양의 값으로 초기화한다.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} +1 & \text{if } M > M_s \\ 0 & \text{if } M_s < M \leq M_l \\ -1 & \text{if } M \leq M_s \end{cases} \quad (9)$$

위 식으로 표시된 레벨함수를 다음 식으로 거리함수로 만든다.  $M_s$  와  $M_l$  은 계산을 하기 전에 설정한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = S(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|) \quad (10)$$

여기서  $S(\phi_0) = \phi_0 / \sqrt{\phi_0^2 - \epsilon^2}$  이고,

$$|\nabla \phi| = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2} \text{ 이다.}$$

식 (10)으로 얻어진 거리함수를 기준으로 계산 공간 내에서 분할의 정도를 계산한다. 이 과정은 격자의 분할과 동시에 결합과정도 이루어진다.

격자분할은 거리함수에 의해서 분할이 결정되고 격자분할은 Fig. 2 와 같이 한번에 한 변이 2 분에 1 씩 분할하도록 하였다.

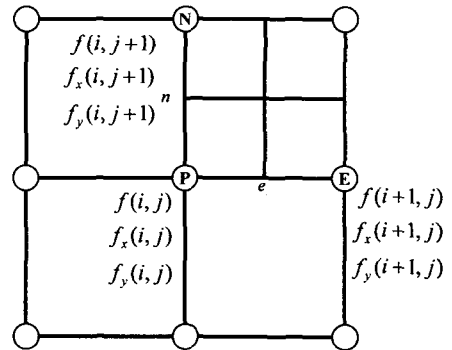


Fig. 2 The interpolation of the properties on the generated grid points

초기에 주어진 격자를 Level 0이라하고 한번 분할한 격자를 level 1 그리고 또 한번 더 분할된 격자를 level 2라고 한다. 계산의 안정성을 고려하여 격자 분할은 인접하고 있는 cell과 분할 level의 차이가 1이 넘지 않도록 하였다.

분할될 점 즉 Fig. 2에서 점 *e*와 점 *n*에서 물리량을 보다 정확하게 보간 하기 위해서 3차 보간식을 사용하였다.

점 *e*에서 물리량 보간은 점 *P*와 점 *E*에서의 물리량  $f, f_x, f_y$ 을 가지고 계산한다. CIP법은 모든 계산점에서 물리량 및 공간 1차 미분값도 계산하기 때문에 Fig. 2에서와 같이 분할될 점에서의 물리량을 고차 보간식을 사용하여 보다 정확하게 계산할 수 있다.

#### 4. 수치해석 결과

이장에서는 제안된 알고리즘을 해석해가 알려져 있는 문제에 대해서 적용하였으며 얻어진 수치해를 해석해와 정량적으로 비교하였다. 비교의 척도로서 Bermejo 와 Staniforth(1992)가 사용한 1차 모멘트(normalized first moment)와 2차 모멘트(normalized second moment)를 사용하였다.

$$RFM = \frac{\iint F(x,t) dx dy}{\iint f(x,0) dx dy} \quad (11)$$

$$RSM = \frac{\iint F^2(x,t) dx dy}{\iint f^2(x,0) dx dy} \quad (12)$$

여기서  $F(x,t)$  는 수치해이고  $f(x,t)$  는 해석해를 나타낸다.

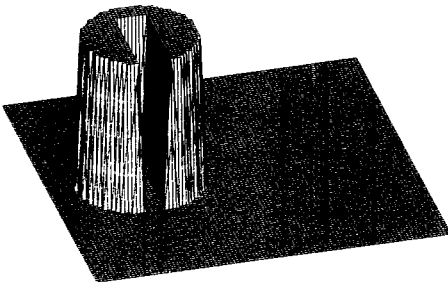


Fig. 3 Initial field in the rotating slotted cylinder problem

#### 4.1 Zalesak 강체 회전

Zalesak 의 강체 회전문제(1979)는 홈이 파진 원형 실린더의 내부의 초기치는  $f = 4.0$  , 그 외에는  $f = 0.0$  인 상태에서 일정한 각속도  $\omega$ 로 회전한다.  $x, y$  방향으로의 속도는 각각  $u = -\omega y$  ,

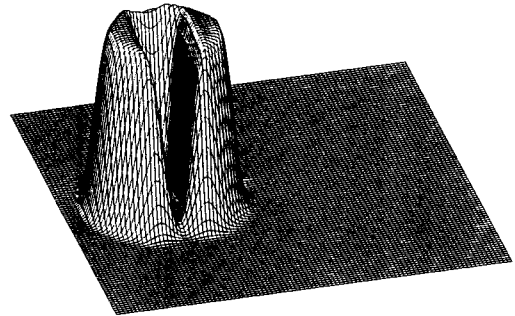


Fig. 4 Numerical simulation by full grid method (100 x 100)

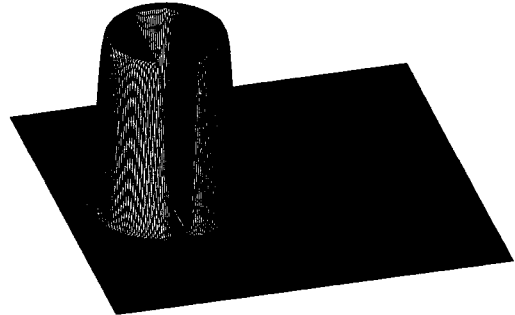


Fig. 5 Numerical simulation by full grid method (200 x 200)

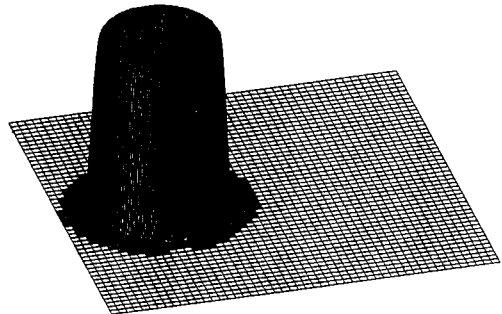


Fig. 6 Numerical simulation by AMR method (Initial uniform grid: 50x50)

$v = \omega x$  로 한다. 초기 홈이 파진 원형 실린더의 형상은 Fig. 3 에 나타나 있다.

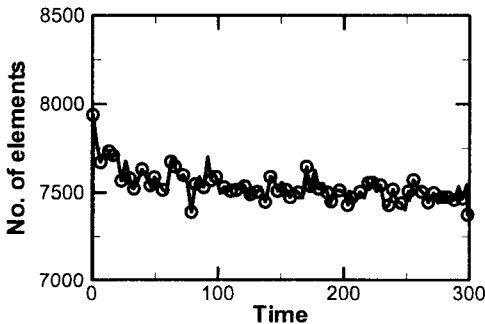
이 문제에 대해서 일반 구조격자와 적응 분할 격자를 사용하여 계산하였으며 그 결과를 비교하였다. 일반 구조 격자인 경우는 Fig. 4, 와 5 에서와 같이 100 x 100 (FG1)과 200 x 200 (FG2)의 균일 격자를 사용하였다. 정량적인 비교를 위해서 적응 분할격자는 2 차 분할까지 하여 총 격자수가 FG1 모델의 총격자수를 초과하지 않도록 하였다.

FG2 모델은 2차 분할된 적응 분할 격자의 최소격자 간격이 같도록 하였다. 적응 분할 격자의 결과와 일반 균일격자를 사용한 결과를 비교하면 같은 수의 격자의 경우 즉 Fig. 4와 6을 비교하면 알 수 있는 바와 같이 적응 분할 격자의 결과가 보다 정확하다는 것을 알 수 있다.

동일한 최소 격자 간격을 사용한 경우에는 Fig. 5 와 6 에서 보는 바와 같이 거의 동일한 결과를 얻을 수 있었다. 이들에 대한 정량적 비교 결과는 Table 1 에 정리되어 있다. 이 Table 에서 나타난 바와 같이 AMR 이 다른 두 가지 모델 즉 FG1, FG2 보다도 더 정확한 결과를 얻었다. 그리고 계산 속도 면에서는 모델 FG2 보다 1.75 배 더 빠른 결과를 얻었다. 따라서 이 문제의 경우 적응 격자 모델이 더 효율적인 것을 알 수 있다.

**Table 1** Numerical accuracy and performance for the rotating slotted cylinder problem

Model	Min	Max	RFM	RSM	CPU
FG1	0.0	4.0	0.9278	0.7525	13.73
FG2	0.0	4.0	0.9628	0.8554	114.6
AMR	0.0	4.0	1.0090	0.8936	65.5



**Fig. 7** The time evolution of total grid numbers

Fig. 7은 시간에 따른 총 격자수의 변화를 나타낸 것이다. 격자의 생성과 결합이 동시에 이루어지기 때문에 시간의 경과함에 변화는 있지만 7500정도 격자를 사용하고 있는 것을 알 수 있다.

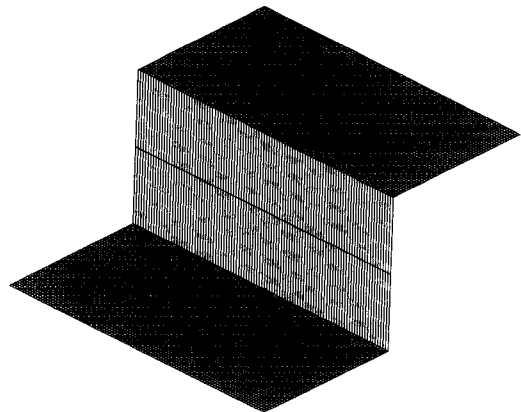
**4.2 Doswell 전선 발달**

Doswell 의 전선 발달 문제(1984)는 단순 강제 회전 문제보다는 복잡한 유동을 가지기 때문에 많이 인용되는 문제이다(Doswell, 1984; Rancic, 1992; Cote 등, 1999). 본 계산에서는 Rancic (1992)가 개량한 초기 분포를 가지고 계산을 수행하였다. Rancic 가 제안한 초기 함수의 분포는 Fig. 8 에서 나타난 바와 같이  $y=0$  에서 초기함수가 급격하게 변하므로 사용된 수치 방법의 정확도를 더 잘 검증할 수 있다. 사용된 초기 분포 함수는 식 (13)에 나타나 있다.

$$f(x, y, 0) = -\tanh\left(\frac{y}{\delta}\right) \tag{13}$$

여기에서  $\delta$  는 상수로서 0.05 값을 사용하였다.

그리고 수치계산은 균일 격자에서는 200 x 200 개의 격자를 사용했으며 적응 분할 격자에서는 50 x 50 개의 균일 격자계에서 계산을 시작하여 두 단계까지 격자를 분할하여 계산 하였다. 계산 영역은  $-5 < x \leq 5$  ,  $-5 < y \leq 5$  이며 수치 적분은  $t = 5.0$  까지 수행하였다. 수치 계산의 결과는 식 (14)로 주어지는 해석해와 비교하였다.



**Fig. 8** The initial field in the frontogenesis problem

$$f(x, y, t) = -\tanh\left\{\frac{y}{\delta}\cos(\omega t) - \frac{x}{\delta}\sin(\omega t)\right\} \quad (14)$$

Fig. 9는 CIP법으로 균일격자를 사용한 수치해를 나타낸 것이다. 균일 격자 200 x 200을 사용하였을 경우 전선발달의 구조와 그 분포가 식 (14)로 주어지는 해석해와 잘 일치하는 결과를 얻었다.

Fig. 10 은 복잡한 형상을 나타내는 전선 주위로 격자의 분할 상태를 나타낸 것이다. 그림에서와 같이 급격한 물리량의 구배를 가지는 전선 주위로 격자가 세밀하게 분할 되어 있는 것을 보여주고 있다.

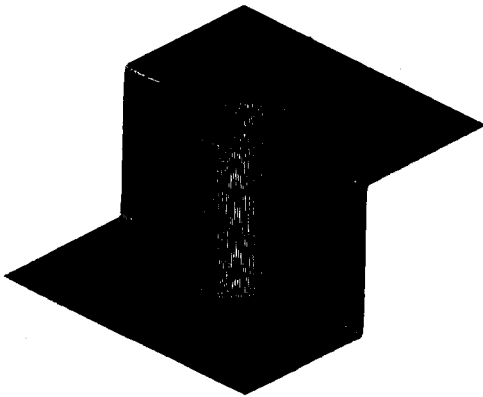


Fig. 9 The numerical solution of the frontogenesis experiment by uniform grid

이 결과로부터 본 연구에서 사용한 level set 법에 의한 격자 분할이 잘 적용되고 있다는 것을 알 수 있다.

본 연구에서 사용한 적응 격자 분할법에 의한 수치결과를 3 차원으로 나타낸 것이 Fig. 11 이다. 이 결과를 균일 격자(200 x 200)를 사용하여 얻은 수치결과 즉 Fig. 9 와 비교하면 적은 격자수를 사용한 계산결과임에도 불구하고 복잡한 전선을 잘 추적하고 그 구조를 잘 수치적으로 묘사하는 것을 알 수 있다.

이 적응 격자 분할법에 의한 결과를 특정 단면에 대해서 해석해와 비교한 것이 Fig. 12 이다.

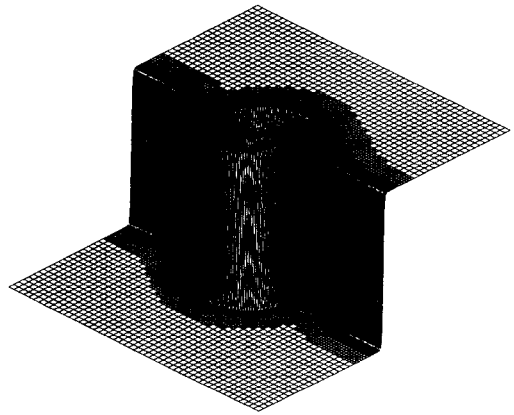


Fig. 11 The numerical solution of the frontogenesis experiment by AMR-CIP method

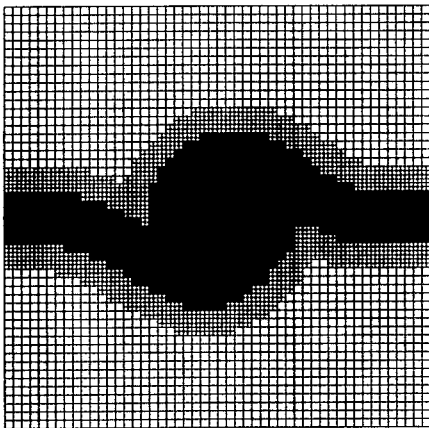


Fig. 10 The mesh profile adaptively generated around the front (the front well captured by the fine mesh)

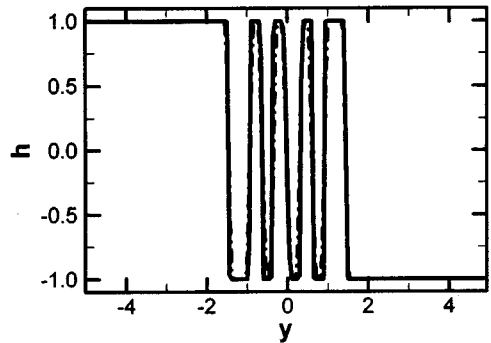


Fig. 12 The comparison of the field profile along the vertical line(x=0). The solid and dash dotted line denote the analytic and numerical solution, respectively

이것은 계산영역의 중심(0,0)를 지나는 수직 단면상에서의 물리량의 분포를 해석해와 수치해를 비교한 것이다. 그림에서 실선이 해석해이고 일점쇄선이 수치해를 나타낸 것이다. 그림에서와 같이 급격한 구배를 가지는 형상임에도 불구하고 큰 수치적인 diffusion이나 dispersion 오차도 없이 해석해와 잘 일치하고 있는 것을 알 수 있다. Fig. 13은 시간에 따른 1차 모멘트와 1차 모멘트량의 보존성의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 13에서 알 수 있는 바와 같이 1차 모멘트는 거의 보존이 되지만 그러나 2차 모멘트는  $t = 5.0$ 에서 0.985값으로써 1.5%의 감소를 나타내고 있다. 이것은 Naire등(1999)의 연구 결과와도 비슷한 경향을 보여주고 있다.

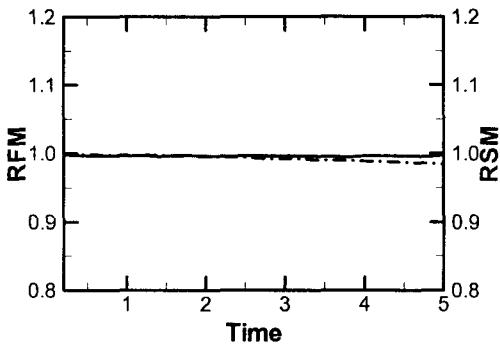


Fig. 13 The time evolution of errors (RFM-solid line, RSM-dash dotted line)

Table 2 Numerical accuracy and performance for frontogenesis problem

Model	Min	Max	RFM	RSM	CPU
FG2	-1.0	1.0	0.999	0.983	166.1
AMR	-1.0	1.0	0.997	0.982	89.0

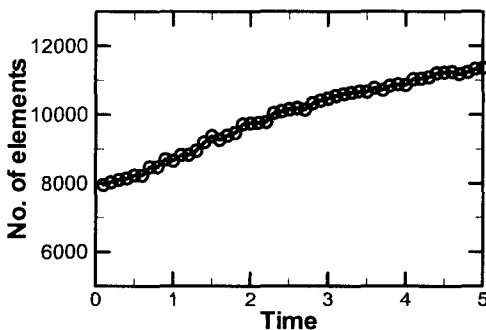


Fig. 14 The time evolution of the total elements

균일격자(모델 FG2)와 적응격자(AMR)를 사용하여 계산한 수치오차와 계산성능은 Table 에 정리하였다. 그리고 계산에 사용된 격자수의 변화는 Fig. 14 에 나타나 있다. 계산을 수행함과 동시에 초기에 2500 개의 계산 요소 수에서 바로 8000 개로 증가한다. 그 이후에는 전선의 형태가 시간에 따라서 점차 복잡해지기 때문에 격자도 점차 분할되어서 총 계산요소수가 11353 까지 증가하고 있는 것을 Fig. 14 에서 알 수 있다.

Table 2 와 Fig. 14 로부터 AMR 을 사용하였을 경우 총 계산시간은 균일격자를 사용하는 경우 보다 적게 소요되지만 한 격자당 계산 시간은 AMR 의 경우가 더 걸리는 것을 알 수 있다. AMR 의 경우 계산에 사용된 격자수가 Fig. 14 에 나타난 것과 같이 변화하기 때문에 계산에 사용된 격자수를 정확한 계산은 어렵지만 평균적으로 계산하면 AMR 을 사용할 경우가 균일 격자를 사용할 경우보다 한 격자당 계산시간은 2 배 이상 소요되는 것을 알 수 있다.

이것은 매회 격자를 분리하고 결합하는 과정을 수행하기 때문에 발생하는 overhead 로서 이것은 프로그램을 최적화하여 개선할 부분이다.

### 5. 결론

본 연구에서는 공간적으로 3차의 정확도를 가지는 CIP법과 효율적으로 격자를 분할하기 위한 level set 법을 사용한 적응 격자 분할법을 제안하였다.

제안된 방법을 해석해가 알려져 있는 2차원 이류문제에 적용하였다. 수치 해석 결과와 해석 해를 비교한 결과 다음과 같은 것을 알 수 있었다.

같은 격자수를 사용한 경우, 적응 분할 격자를 사용한 결과가 일반 격자를 사용한 경우보다 더 정확한 결과를 얻었다. 그리고 최소 격자간격을 같이 하였을 경우, 해의 정확도는 거의 비슷 하였지만 계산 시간 면에서 적응 분할 격자를 사용한 경우가 1.75 더 빠른 것을 알 수 있었다.

전선 발달 문제에 있어서는 복잡한 분포를 가진 함수에도 level set에 의한 격자 분할이 잘 생성되었고 그것으로부터 얻어진 수치해를 해석 해와 비교했을 때 높은 정확도를 가진다는 것을 알 수 있었다.

이상과 같은 결과로부터 본 연구에서 제안한 CIP법과 level set법을 기초로 한 적응 격자 분할법이 계산의 정확도 면에서도 높은 신뢰도를 얻었고 계산시간 면에서도 기존의 균일 격자보다 효율적이라는 것을 알 수 있었다.

## 후 기

이 연구를 수행하는데 있어서 BK21 의 지원에 감사 드립니다.

## 참고문헌

- (1) Berger, M.J. and Olinger, J., 1984, "Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations," *Journal of Computational Physics*, 53, pp. 484~512.
- (2) Bermejo, R. and Staniforth, A., 1992, "The Conversion of Semi-Lagrangian Advection Schemes to Quasi-Monotone Schemes," *Monthly Weather Review*, 120, pp. 2623~2632.
- (3) Borthwick, A.G.L., Cruz Leon, S. and Jozsa, J., 2001, "The Shallow Flow Equations Solved on Adaptive Quadtree Grids," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37, pp. 691~719.
- (4) Doswell III, C.A., 1984, "A Kinematic Analysis of Frontogenesis Associated with a Nondivergent Vortex," *Journal of the Atmospheric Sciences*, 41, pp. 1242~1248.
- (5) Hirt, C.W. and Nichols, B.D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," *Journal of Computational Physics*, 39, pp. 201~225.
- (6) Hundsdorfer, W. and Trompert, R.A., 1994, "Method of Lines and Direct Discretization: a Comparison for Linear Advection," *Applied Numerical Mathematics*, 13, pp. 469~490.
- (7) Nair, R., Cote, J. and Staniforth, A., 1999, "Monotonic Cascade Interpolation for Semi-Lagrangian Advection," *Q. J. R. Meteorol. Sci.*, 125, pp. 197~212.
- (8) Nakamura, T., Tanaka, R., Yabe, T. and Takizawa, K., 2001, "Exactly Conservative Semi-Lagrangian Scheme for Multi-Dimensional Hyperbolic Equations with Directional Splitting Technique," *Journal of computational physics*, 174, pp. 171~207.
- (9) Osher, S. and Sethian, J.A., 1988, "Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations," *Computer Physics Communications*, 79, pp.12~49.
- (10) Rancic, M., 1992, "Semi-Lagrangian Piecewise Biparabolic Scheme for Two-Dimensional Horizontal Advection of a Passive Scalar," *Monthly Weather Review*, 120, pp. 1394~1406.
- (11) Yabe, T. and Aoki, T., 1991, "A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation," *Computer Physics Communications*, 66, pp. 219~232.
- (12) Yoon, S. Y. and Yabe, T., 1999, "The Unified Simulation for Incompressible and Compressible Flow by the Predictor-Corrector Scheme Based on the CIP Method," *Computer Physics Communications*, 119, pp. 149~158.
- (13) Zalesak, S.T., 1979, "Fully Multi-Dimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids," *Journal of Computational Physics*, 31, pp. 335~362.