

# 자기변형 센서 바이어스 자기계의 요크 위상최적설계

김 윤 영<sup>†</sup> · 김 우 철<sup>\*</sup>

(2003년 7월 18일 접수, 2004년 5월 12일 심사완료)

## Yoke Topology Optimization of the Bias Magnetic System in a Magnetostrictive Sensor

Yoon Young Kim and Wochul Kim

**Key Words :** Magnetostrictive Sensor(자기변형 센서), Bias Magnetic Field(바이어스 자기장), Electromagnet(전자석), Yoke(요크), Flexural Wave(굽힘 파)

### Abstract

A magnetostrictive sensor is a sensor measuring elastic waves. Because of its unique non-contact measurement feature, the sensor receives more attentions in recent years. These sensors have been mainly used to measure longitudinal and torsional waves in ferromagnetic waveguides, but there increases an interest in using the sensor for flexural wave measurement. Since the performance of the sensor is strongly influenced by the applied bias magnetic field distribution, the design of the bias magnetic system providing the desired magnetic field is critical. The motivation of this investigation is to design a bias magnetic system consisting of electromagnets and yokes and the specific objective is to formulate the design problem as a bias yoke topology optimization. For the formulation, we employ linear magnetic behavior and examine the optimized results for electromagnets located at various locations. After completing the design optimization, we fabricate the prototype of the proposed bias magnetic system, and test its performance through flexural wave measurements.

### 1. 서 론

자성 재료(Ferromagnetic material)가 기계적인 힘을 받았을 때 재료 내부에 자기적인 상태가 변화하는 현상을 역 자기변형 효과(Inverse magnetostriction effect) 또는 빌라리 효과<sup>(1)</sup>(Villari effect)라고 한다. 이는 자성을 가진 물체가 자기장 아래 놓일 때 자기장 방향으로 기계적인 변형이 발생한다는 주울 효과<sup>(2)</sup>(Joule effect)의 역 현상이다. 자기변형 센서(MsS)는 자기변형 효과를 이용하여 재료의 탄성파를 측정하는데 많이 사용된다. 빌라리 효과를 이용한 MsS는 측정하고자 하는 대상과 물리적 접촉 없이 측정 대상에서 발생하는 응력을 측정할 수 있다는 장점이 있어 여타의 접촉을 요구하는 센서에 비해 독자적인 응용 가능성을 가지

고 있다.

MsS는 간단히 코일과 자석 또는 요크로 구성되어 있다. 코일 부분은 자성 보에서의 자속 변화를 측정하는데 이용되고 자석 또는 전자석은 적절한 바이어스 자기장(Bias magnetic field)을 가하여 종파(longitudinal wave), 굽힘 파(flexural wave), 또는 뒤틀림 파(torsional wave)를 측정할 수 있다.

Kwun과 Teller<sup>(3)</sup>와 Lee와 Kim,<sup>(4)</sup> Kim<sup>(5)</sup> 등은 굽힘파를 측정하기 위한 단순한 바이어스 자석의 배열을 제시한 바 있다. 최근 Cho 등<sup>(6)</sup>은 굽힘파를 측정할 때 센서 출력 향상을 위해 MsS 바이어스 영구 자석의 형상을 위상 최적화를 통해 Fig. 1과 같은 자석의 형상을 제안하였다. 그러나 영구 자석만으로 바이어스 자기장을 최적화하기 위해서는 임의대로 형상을 제작하거나 그 자기장의 세기를 조절하기 어렵다는 문제점이 있다. 그리고 이러한 문제를 해결하는 대안으로 Fig. 2와 같은 전자석을 이용할 수 있으나, 센서의 민감도를 크게 향상시키기 위해서는 전자석의 요크형상을 최적화할 필요가 있다.

본 논문에서는 실린더 강철 보에서 굽힘 파가 전파될 때 가장 큰 센서 출력을 발생하기 위한

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부, 멀티스케일 설계연구 단장  
Email : yykim@snu.ac.kr  
TEL : (02)880-7154 FAX : (02)883-1513

<sup>\*</sup> 회원, 서울대학교 대학원 기계항공공학부

MsS 바이어스 요크의 최적 형상을 구하는 공학적 설계문제를 제안하고 이것을 처음으로 위상최적화 설계문제로 정식화하였다. 위상최적화를 위해서, 전통적인 SIMP(Solid Isotropic Material Penalization)을 이용한 밀도법(density method)<sup>(7)</sup>을 사용하였으며 민감도 해석을 위해 보조변수(Adjoint variable)<sup>(8)</sup> 방법을 적용하였다. 그리고 최적화 알고리즘으로는 최적화 조건법(Optimality Criterion)<sup>(9)</sup>을 사용하였다.

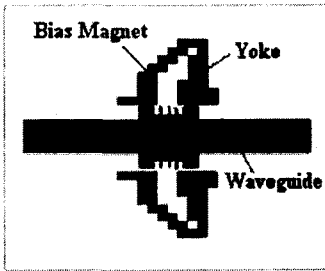


Fig. 1 The optimal design of the bias magnet configuration by the topology optimization formulation

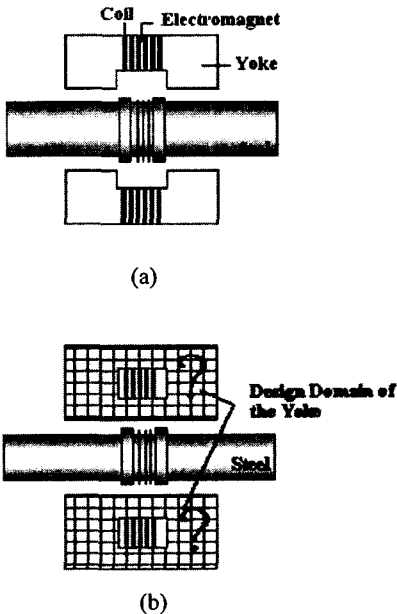


Fig. 2 (a) A baseline bias permanent magnet configuration (b) A schematic description of the topology optimization formulation

## 2. 자기변형 효과 모델링

자기변형 효과<sup>(10)</sup>는 앞에서 언급한 바와 같이 응력이 가해질 때 자화 상태가 변화하는 현상을 말하는데 1차원 문제에서는 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$B = \mu^\sigma H + q\sigma \tag{1}$$

식 (1)에서  $\sigma$  는 재료에 가해지는 응력(stress)을,  $B$  는 자속 밀도(magnetic flux density)를,  $q$  는 자기 변형 효과를 나타내는 계수이고  $H$  는 자석 또는 전자석을 이용해 외부에서 걸어주는 자기장의 세기(magnetic intensity)를, 그리고  $\mu^\sigma$  는 일정한 응력이 걸려 있을 때 투자율(permeability)을 나타낸다.

식 (1)에서  $q$  는 외부 바이어스 자기장에 의해 영향을 받는데, 본 연구에서 다루는 보의 경우에는 다음과 같이 놓을 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$q(x, y) \approx c_0 B^b(x, y) \tag{2}$$

여기서  $c_0$  는 상수이며  $B^b$  는  $H$  에 의해 발생하는 보 내부에서의 자속밀도이다.

보의 길이에 비해 단면치수가 작은 구조물이므로, 축의 단면에 발생하는 축 방향 변위  $u(x, y, t)$  를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$u(x, y, t) = u_0(t) - y\theta(x, t) \tag{3}$$

여기서  $u_0$  는 단면에서 발생하는 종파에 의한 변위로 단면좌표  $y$  에 대해 균일한 분포를 갖는다. 그리고  $\theta$  는 굽힘 파에 의해서 발생하는 단면에 수직인 벡터의 회전을 나타내기 때문에, 굽힘에 의해서는 단면좌표  $y$  에 대해 선형으로 변화하는 변위장을 갖게 된다.<sup>(11)</sup>

축 방향 변위  $u(x, y, t)$  에 의해서 발생하는 응력은 다음과 같으며

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \tag{4}$$

여기서  $E$  는 탄성계수를 나타낸다. 식 (2)와 식 (4)을 식 (1)에 대입하면 식 (5)와 같다.

$$B(x, y, t) = \mu^\sigma H(x, y) + c_0 B^b E \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \tag{5}$$

응력파에 의해 야기되는 자기장의 변화는 전자기 유도 법칙(Faraday Lenz's Law)에 의해서 솔레노이드 양단에 걸리는 전압을 통해서 측정할 수 있다.

$$V(t) = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (6)$$

$N$ 은 코일의 감은 수를 나타낸다.

코일 내부의 자기 자속은 코일에 둘러 쌓여 있는 부분의 면적  $A$ 를 통해서 내부의 자기유도와 관련 되어 있으며 면적이 일정하다고 가정하면, 코일에서 측정되는 전압은 다음의 식으로 표현된다.

$$V(t) = -N \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (7)$$

굽힘파만 전파되는 경우 즉,  $u_0 = 0$  에는, 식 (5)를 식 (7)에 대입하면 다음의 결과를 얻는다.

$$V(t) = Nc_o \frac{d}{dt} \int_A B^b E_y \frac{\partial \theta}{\partial x} dA \quad (8)$$

코일에서 큰 출력을 갖기 위해서는  $B^b$ 의 분포가  $y$ 에 대해 선형적으로 분포되어야 함을 식 (8)로부터 알 수 있다. 다음 절에서는  $B^b$ 를 구하기 위한 기본적인 자기장 해석을 바탕으로, 식 (8)의  $V(t)$ 를 최대화하기 위한 위상최적화 문제를 정식화하고자 한다. 2차원 자속밀도 벡터장  $\mathbf{B}$ 을 이용하여 해석하는 경우, 식 (8)의  $B^b$ 는  $\mathbf{B}$ 의  $x$ 방향 성분으로 간주되어야 한다.

### 3. 자기장 해석이론

일반적으로 2차원 정적자기장 문제에서는 Maxwell 방정식으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = -J_o \quad (9)$$

위 식에서  $A$ 는  $z$ 방향의 자기 벡터포텐셜(magnetic vector potential),  $\mu$ 는 투자율(permeability),  $J_o$ 는  $z$ 방향의 전류밀도(current density)를 나타낸다. 본 연구에서는 해석을 간단히 하기 위해서 선형자기구성방정식을 사용하고자 한다. 식 (9)에 해당하는 다음의 범함수  $I(A)$ 에

$$I(A) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu} \left[ \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int J_o A dx dy \quad (10)$$

자기 벡터포텐셜  $A$ 를 유한요소별로 각 절점에서 자기 벡터포텐셜값  $A_i$ 를 이용하여 형상함수  $N_i(x, y)$ 로 보간한다.

$$A = \sum_{i=1}^4 N_i A_i^e = \mathbf{N}^T \mathbf{A} \quad (11)$$

이제  $I(A)$ 에 대한 극치조건을 적용하면 다음과 같은 시스템 방정식을 얻는다.<sup>(12)</sup>

식 (12)의 행렬  $\mathbf{K}_e$  등의 요소는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{K}_e \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (12)$$

$$K_{ej} = \frac{1}{\mu} \iint \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

$$J_i = J_o \iint N_i dx dy \quad (14)$$

만약 식 (12)의 해  $\mathbf{A}$ 를 구하면, 식 (8)에서 필요한  $B^b$ , 즉  $B_x$ 는 다음의 식으로부터 구할 수 있게 된다.

$$B_x = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \mathbf{A} \quad (15)$$

### 4. 최적화 문제 공식화

본 연구에서는 식 (8)로 주어지는 출력전압을 최대화 하는 것이므로 최적화에 대한 목적함수를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{Maximize : } f = \int B_x(x^*, y) y dA = \sum_i B^b_i y_i \quad (16)$$

여기서  $x^*$ 는 센서의  $x$ 좌표를,  $i$ 는 Fig. 3과 같이 센서 단면의 위치(수직 방향을 따라)를 나타낸다.  $B_x$  즉  $B^b$ 는 자속밀도(magnetic flux density)의  $x$ 방향의 성분을 나타낸다.

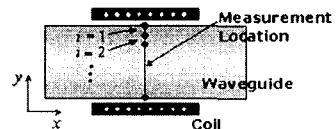


Fig. 3 Schematic diagram of problem

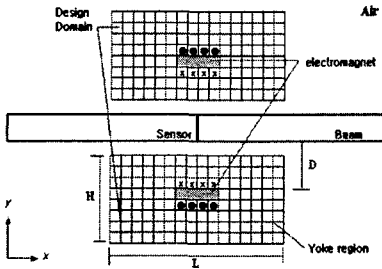


Fig. 4 Schematic diagram of the design problem

식 (16)으로 주어지는 문제에 다음과 같은 질량 제한 조건을 추가하여 위상최적화 문제를 정식화하고자 한다.

$$\text{Subject to : } h(\rho_e) = \sum_{e=1}^{n_e} \rho_e v_e - M_0 \leq 0 \quad (17)$$

식 (17)에서  $\rho_e$  는  $e$  번째 유한요소가 갖는 상대적 밀도로, 이것은 최적화 문제의 설계변수이다. 그리고  $v_e$  는 유한요소의 부피(2차원의 경우 면적),  $n_e$  는 설계변수의 개수,  $M_0$  는 주어진 질량의 상한값을 나타낸다.

Fig. 4는 실제 설계문제를 도시한 것인데, ⊙, × 는 전자석에 흐르는 전류의 방향을 나타낸다.

4.1 위상최적화를 위한 밀도법

자기계에 대한 위상최적설계를 위해 Yoo 등<sup>(13)</sup> 은 균질화법을 사용하였으나, 본 연구에서는 밀도법(density method)<sup>(7)</sup>을 이용하여 위상최적화를 정식화하고자 한다. 밀도법을 사용하는 경우, 각각의 유한요소에 배치되는 밀도  $\rho_e (0 < \epsilon \leq \rho_e \leq 1)$  를 이용하여 투자율  $\mu$  를 다음과 같이 모델링할 수 있다.

$$\mu = \mu_0 \{1 + (\mu_y - 1) \rho^n\}, \quad n = 3 \quad (18)$$

여기서  $\mu_0$  과  $\mu_y$  는 공기에서의 투자율, 요크의 비투자율을 각각 나타낸다.

$\rho_e$  가 0(실제적으로 거의 0 에 가깝다)이면 그 요소는 공기로 간주되며, 반대로  $\rho_e$  가 1 로 가까이 가면 요크로 간주된다.

4.2 민감도 해석

최적화 문제를 풀기 위해서는 식 (16)의 목적함수의 민감도를 구해야 한다. 목적함수  $f$  는 설계영역이 유한요소로 이산화된 문제에서는 설계변수  $\rho_e$  에 대한 함수인 자기 벡터포텐셜값  $\mathbf{A}$  에 의존한다. 즉,

$$f = f([\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho})]) \quad (19)$$

여기서  $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_e\}^T$  이다. 따라서 목적함수의 민감도는 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$\frac{df}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (20)$$

목적함수는 설계변수와 상태변수의 양함수이기 때문에 식 (20)에서  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}} = 0$  이고  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$  는 식 (12)를 설계변수 벡터에 대해 미분하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{A} \quad (21)$$

식 (21)을 식 (20)에 대입하면 최종적인 다음의 식을 얻게 된다.

$$\frac{df}{d[\boldsymbol{\rho}]} = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \right)^T \mathbf{K}^{-1} \left( -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{A} \right) \quad (22)$$

식 (22)를 효율적으로 계산하기 위해 보조변수<sup>(8)</sup>  $\lambda$  를 도입한다.

$$\mathbf{K}\lambda = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} \quad (23)$$

식 (23)을  $\lambda$  에 대해 풀 후, 그  $\lambda$  를 식 (22)에 대입하여 민감도  $\frac{df}{d\boldsymbol{\rho}}$  를 다음과 같이 구한다.

$$\frac{df}{d\boldsymbol{\rho}} = \lambda^T \left( -\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{A} \right) \quad (24)$$

5. 최적 형상

먼저 Fig. 4에서 정의된 최적설계문제를 다루어 보았다. 웨이브가이드를 이루는 보와 요크의 재질은 같은 1018강으로 그 투자율은 529(H/m)이고 공기의 투자율은  $4\pi \times 10^{-7}$  (H/m)이다. 전자석에 흐르는 전류밀도  $J_0$  는  $2\text{A/m}^2$ 로 놓았으며 위상최적설계를 위해서 설계영역은 4096개의 유한 요소로 이산화하였다. 최적화 기법은 최적화 조건법, 즉 OC<sup>(9)</sup>를 사용하였으며, 선형구성방정식을 이용하여 얻은 결과는 Fig. 5에 나타나 있다.

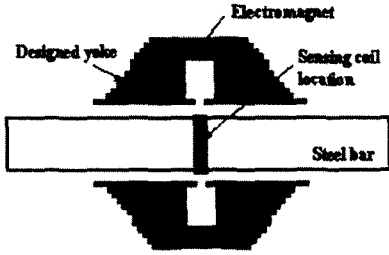


Fig. 5 The optimized design

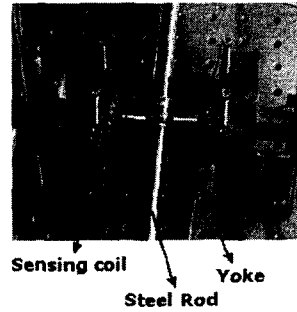


Fig. 7 The proposed bias magnetic system consisting of electromagnets and optimized yokes at installation

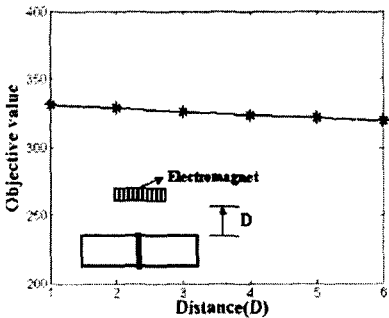


Fig. 6 The variation of the objective function of the optimal design as the function of the distance between the electromagnet and the cylinder

Fig. 6에서는 전자석의 위치를 바꿔가면서 최적의 요크형상을 구한 후, 그때의 목적함수 값이 어떻게 변화되는지를 정량적으로 살펴보았다. 이 해석으로부터, 전자석의 위치변화에 따른 목적함수 값의 변동이 크지 않다는 사실을 알 수 있다. 이것은 실제 센서 설치 시 전자석의 위치를 상당히 자유롭게 조절할 수 있다는 사실을 보여주는 중요한 결과이다.

## 6. 실험 검증

우리는 실험을 통해 제안된 센서가 굽힘파를 측정하는지, 이 센서가 기존의 센서에 비해 더 나은 성능을 가지는지를 알아보려고 한다.

### 6.1 실험 장치

전자석과 요크로 구성된 제안된 바이어스 자기계의 성능을 확인하기 위해 설계된 요크를 이용해 실험을 수행하였다. Fig. 7은 위상최적화로 설계된 요크로 구성된 바이어스 자기계를 보여주고 있다. Fig. 8은 전체 실험장치를 보여주고 있다. 실험

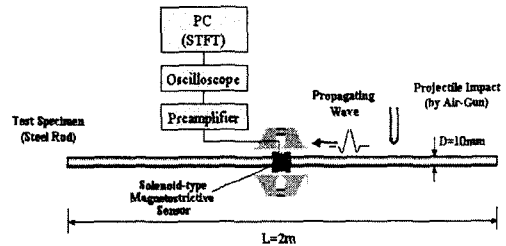


Fig. 8 The schematic diagram of the experiment setup to measure flexural waves by a magnetostrictive sensor

장치는 크게 강자성체인 보, 공기총을 이용해 굽힘파를 발생시키는 가진 시스템, 센서를 포함한 측정장치 등 세 부분으로 구성되어 있다. 이러한 실험장치의 타당성은 Lee<sup>(4)</sup>에 의해 검증된 바 있다. 실험에 사용된 보의 재질은 강으로, 길이와 지름은 각각 2m, 10mm이고 측정코일은 오른쪽에서 1m에 위치에 있으며, 그 지름은 0.1mm이고, 그것의 감긴 횟수는 50회이다. 그리고 전자석에는 지름은 0.6mm인 코일이 250회 감겨있다.

### 6.2 실험 결과

Fig. 9는 최적화된 요크의 형상을 가진 센서로 측정된 신호를 나타낸 것이다. Fig. 9에 있는 신호가 굽힘파의 특성을 보여주고 있지만, 이를 명확히 확인할 필요가 있다. 굽힘파 특성파악은 여러 가지 방법으로 가능하지만, 가장 일반적이면서, 정확한 방법은 그 신호의 분산특성<sup>(14)</sup>을 분석하는 것이다. 본 연구에서는 신호의 분산특성을 파악하기 위해, 단시간 푸리에 변환<sup>(15)</sup>(Short-Time Fourier Transform)을 사용하였으며, 이 변환을 Fig. 9에 있는 신호에 적용한 결과를 Fig. 10에 제시하였다.

Fig. 10에서 시간은 신호에서 특정주파수 성분의 도착시간을 의미하는데, 양끝단에서 반사되는

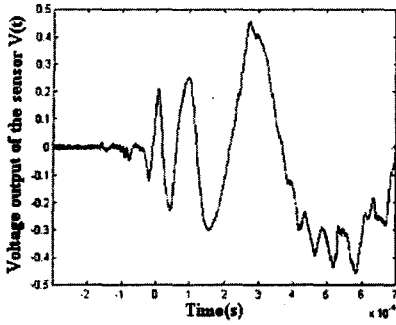


Fig. 9 The long-time history of the signal measured by the present sensor for a flexural wave generated by the projectile-impact gun system

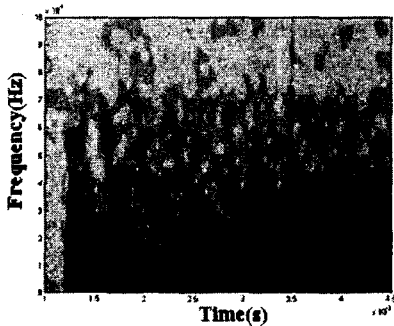


Fig. 10 The short-time Fourier transform of the measured signal shown in Fig. 9

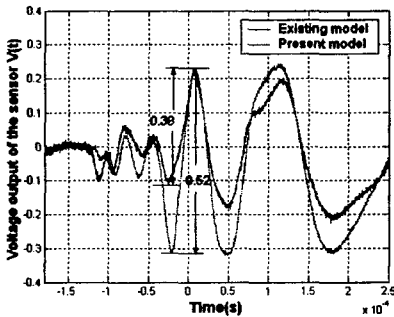


Fig. 11 The bending wave signals measured by the magnetostrictive sensors with the present yoke configuration and the one proposed by Kwun and Teller<sup>(3)</sup>

굽힘파들의 첫 번째 분산곡선 특징이 잘 나타나있다. 이 그림으로부터, 첫번째 분산곡선의 특징인, 고주파 파동이 저주파 파동보다 빨리 전파하는 특

징이 명확히 드러남을 알 수 있다.

Fig. 11은 Fig. 1에 나타난 Kwun과 Teller가 제안한 형태와 유사한 U-Type센서와 본 연구에서 제안한 센서에 의해 측정된 신호를 비교한 그림으로, 제안된 센서로 측정된 출력전압의 최대값이 기존의 센서로 측정된 신호의 최대값과 비교해 출력전압이 약 40% 가까이 증가함을 볼 수 있다. 또한 본 연구에서 제안된 센서는 기존의 센서에 비해, 신호의 왜곡없이 미소한 응력파를 잘 측정함을 알 수 있다.

### 7. 결론 및 제안

본 논문에서는 웨이브가이드에서 전파하는 굽힘 파(flexural wave)를 측정하기 위한 자기변형 센서의 출력 극대화하는 연구를 수행하였다. 기존의 연구에서는 센서 바이어스 영구자석계를 설계하였으나, 본 연구에서는 자기장의 세기를 조절하기 쉬운 전자석을 이용하여 센서를 구성하되, 센서출력 극대화를 위한 요크 위상최적화를 정식화하였다. 위상최적설계를 통해 요크의 최적형상을 결정하였으며, 제안된 요크를 갖는 자기변형 센서의 성능을 확인하기 위해 실제 실험을 수행하였다. 일련의 실험을 통해 제안된 센서가 굽힘파를 측정할 수 있으며, 측정된 출력이 기존의 센서의 센서 출력에 비해 약 40% 가까이 증가함을 확인하였다.

### 참고문헌

- (1) Jiles, D. C., 1995, "Theory of the Magneto-mechanical Effect," *J. Phys. D: Applied Physics*, Vol. 28, pp. 1537~1546.
- (2) Joule, J. P., 1847, "On the Effects of Magnetism Upon the Dimensions of Iron and Steel Bars," *Phi. Mag.*, Vol. 3, pp. 30~76.
- (3) Kwun, H. and Teller, C. M., 1994, "Magnetostrictive Generation and Detection of Longitudinal, Torsional, and Flexural Waves in a Steel Rod," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 3(2), pp. 1202~1204.
- (4) Lee, H. and Kim, Y. Y., 2002, "Wave Selection Using a Magnetomechanical Sensor in a Solid Cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 112(3), pp. 1~8.
- (5) Kim, Y. Y., Cho, S. and Lee, H. C., 2003, "Application of the Magnetomechanical Sensors for Modal Test," *J. Sound. Vib.*, Accepted for Publication.
- (6) Cho, S., Kim, Y. and Kim, Y. Y., 2002, "Optimal Design of the Bias Magnet Configuration for the Magnetostrictive Sensor Measuring Bending Waves," *Proceedings of AIAA Conference Fall*.
- (7) Bendsoe, M. P. and Sigmund, O., 1999, "Material Interpolation Schemes in Topology Optimization," *Arch. Applied Mech.*, Vol. 69, pp. 635~654.

- (8) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York.
- (9) Hassani, B. and Hinton, E., 1999, *Homogenization and Structural Topology Optimization*, Springer-verlag, London.
- (10) Dapino, M. J., Smith, R. C. and Flatau, A. B., 2000, Structural Magnetic Strain Model for Magnetostrictive Transducer, *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 3, pp. 545~556.
- (11) Lee, H. C., 2001, "Design and Analysis of a Mode-Selectable Stress Wave Sensor Using the Villari Effect," Ph. D thesis, *Seoul National University*, Seoul, Korea.
- (12) Salon, S. J., 1995, *Finite Element Analysis of Electrical Machines*, Kluwer Academic Publishers, New York.
- (13) Yoo, J., Kikuchi, N. and Volakis, J. L., 2000, "Structural Optimization in the Magnetic Devices by the Homogenization Design Method," *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36(3), pp. 574~580.
- (14) Achenbach, J. D., 1973, *Wave Propagation in Elastic solids*, Elsevier science Publisher, Netherlands.
- (15) Mallat, S., 1998, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic press, San Diego.