

# 실험과 컴퓨터 모사 결과를 동시에 이용하여 직교배열표로 설계하는 방법

박 경 진\*

(2003년 5월 9일 접수, 2004년 5월 24일 심사완료)

## A Design Methodology with Orthogonal Arrays Using Experiments and Computer Simulations

Gyung-Jin Park

**Key Words :** Design of Experiments(실험계획법), Orthogonal Arrays(직교배열표), Computer Simulation (컴퓨터 모사), Error Analysis(오차분석), Design(설계)

### Abstract

Generally, automatic design is carried out with computer simulation and the simulation models are established by investigating the correlations between the simulation and real experiments. Therefore, the experiment results are utilized as complimentary data although they are considered to be precise. Orthogonal arrays have been adopted for discrete design. A method is proposed to directly exploit the experiment results in the design process with orthogonal arrays. Experiments are allocated to some rows of an orthogonal array and computer simulations are allocated to the others. A rule for the allocation is found to keep the orthogonality. Error analysis of the design results is performed. Mathematical examples are made to verify the validity of the proposed method. Error models are defined with the examples and the design solutions from the examples are discussed.

### 1. 서 론

최근 컴퓨터 모사 (simulation)를 이용한 설계를 실시하는 경우가 대단히 많아졌다. 컴퓨터에 의한 모사는 근사화한 지배방정식의 근을 구하게 된다. 모사는 많은 오차를 포함하고 있는데, 예를 들어 모델링 오차, 각종 인위적 파라미터에 의한 영향, 근사화 과정에서의 오차들이 존재한다. 한 편 실험은 실험시의 많은 실수나 오차에도 불구하고 그 결과가 정확하다고 간주한다. 따라서 모사에서의 위와 같은 오차를 줄이기 위해 실험결과와 모사결과를 일치하도록 모사 시의 각종 데이터를 인위적으로 조절한 후, 설계 변수를 바꾸어 가면서 모사를 하여 설계경향을 추출하고 있다. 물론 설계경

향을 도출하는데 있어서 모든 자료를 실험으로 얻을 수 있다면 최상이나 실험비용이 대단히 고가일 때는 제한적으로 실시하고 있다. 즉 모사에서의 데이터 조절이나 설계된 제품의 검증에만 사용하고 있고 실험의 결과를 설계과정에 직접 반영하는 경우는 드물다 하겠다.

비용절약과 편리성으로 인하여 컴퓨터 모사결과를 가지고 자동적으로 설계를 실시하려는 경향이 있는데 대표적인 기술이 최적설계이다.<sup>(1-6)</sup> 최적설계에서는 각종 설계에 관계된 사항을 최적화정식에 반영하여 최적화 프로그램으로부터 설계변수 값을 자동적으로 얻게 된다. 이 때에는 대개 설계 초기값을 가지고 모사결과와 실험결과를 비교하면서 각종 데이터를 조절하게 된다. 그러나 설계값이 변화하면 실험과의 오차가 커지는 것이 잘 알려져 있다. 따라서 모사를 이용하는 설계결과가 정확한 것인가 혹은 모사에 의한 최적값이 실제로 최적인가라는 의문이 발생할 수 있다. 설계자들은

\* 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부  
E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr  
TEL : (031)400-5246 FAX : (031)407-0755

이러한 의문에도 불구하고 다른 좋은 방법이 없으므로 모사를 사용하고 있으며, 설계결과에 대한 확신을 가지기 위해 설계결과에 대한 재 실험을 실시하기도 한다.

최적화 방식의 한 방법으로 최근 실험계획법의 각종 기술을 이용하고 있다.<sup>(6-9)</sup> 그 중의 하나가 직교배열표를 이용하는 것이다.<sup>(10-14)</sup> 직교배열표는 실험만을 실시할 때 실험의 회수를 줄이는 동시에 실험의 배치를 효율적으로 실시하려 할 때 사용하는 것이었다. 그러나 실험이 고가일 때는 직교배열표가 제시하는 최소한의 실험마저도 불가능한 경우가 많다. 따라서 직교배열표가 제시하는 각종 설계의 경우에 대해 모사를 실시하여 이의 결과를 이용하여 성능지수 (목적함수)의 함수를 근사화하여 근사함수의 최적해를 구하는 방법을 가장 많이 사용하고 있다. 최근 직교배열표에 의해 도출된 각 경우의 성능지수를 이용하여 평균분석 (analysis of mean, ANOM)의 개념으로 불연속 공간에서의 설계값을 도출하는 방법이 제안되었다.<sup>(12)</sup> 또한, 직교배열표를 사용하면 이산공간에서의 설계가 용이하다.<sup>(6,12)</sup>

수학적 최적화는 설계변수의 연속공간에서 실시하므로 매우 많은 모사를 요구한다. 본 연구에서는 직교배열표에 의한 설계에서 한정된 수의 모사 회수만 필요하다는 사실로부터, 직교배열표의 각 경우를 실험과 모사를 혼합하여 실시하고 이를 바탕으로 설계를 도출하는 기법을 제시한다. 한편, 앞에서 언급했듯이 실험의 오차가 모사의 오차보다 상당히 적다는 기본 가정을 사용한다. 직교배열표의 각 행에 직교성을 이용하여 최소한 숫자의 실험을 배치하면 평균분석을 하여 설계값을 구할 때 적은 실험오차가 균등하게 분포하게 되어 설계변수의 수준에 대한 효과의 산출 시 오차의 분산을 감소할 수 있게 된다. 따라서 설계변수의 결정에 정확성을 기할 수 있다. 직교배열표의 직교성의 효과를 이용하기 위해 모사와 실험을 가장 적은 비용으로 어떻게 배치해야 하는 가를 제시하였으며 이 때의 오차분산을 산출하였다. 제안한 기법의 효과를 극명하게 보여줄 수 있는 수학적문제를 정의하여 제안한 방법의 타당성을 검증하였으며 이의 응용성에 대해 논의하였다.

## 2. 컴퓨터 모사와 직교배열표를 이용한 기존의 설계방법

일반적으로 컴퓨터 모사 결과를 이용하는 설계

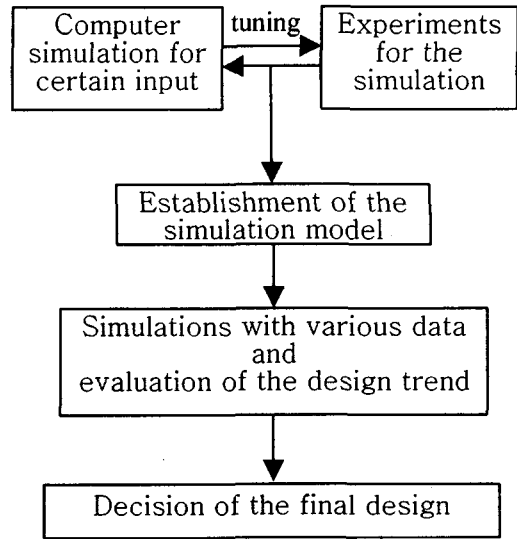


Fig. 1 Design process using computer simulations

방법의 과정이 Fig. 1에 보여지고 있다. 우선 특정한 설계값 즉 입력값에 대해 실험과 모사를 동시에 실시하여 결과를 비교한다. 실험의 결과와 모사의 결과가 일치하도록 모사에서의 각종 파라미터를 조절(tuning)하면서 실험결과에 가장 가까운 결과를 만드는 최종 입력자료를 확정한다. 이후에는 컴퓨터 모사모델이 확립되었다는 가정 하에 설계변수의 변경에 따른 대상 시스템의 성능을 계산하고 가장 적합하고 좋은 성능을 내는 설계변수의 결정을 통해 최종 설계를 확정한다. 컴퓨터 모사를 이용하는 설계방법, 즉 최적화 방법 등은 시스템 성능 계산을 최종 설계에 반영하는 과정에서 사용하여 설계의 결정을 자동적으로 실시하는 것이다. 본 장에서는 이러한 설계과정에 직교배열표를 이용하는 실험계획법을 적용한 종래의 설계방법에 대해 고찰한다.

### 2.1 직교배열표<sup>(6-16)</sup>

직교배열표는 실험계획법의 여러 가지 방법 중 한 방법에서 사용되는 일종의 행렬로 Rao가 1940년대에 제안하였다.<sup>(11)</sup> 다수의 파라미터가 존재하는 실험을 할 때는 각 파라미터의 조합에 대해 실험을 실시할 필요가 있다. 실험효과를 극대화하기 위해서는 효율적인 조합을 선정하는 것이 중요한데, 직교배열표는 사전에 조합에 대한 경우의 수를 제시한다. 예를 들어 설계변수(실험계획법에서는 이를 인자(factor)라 부른다.)의 수가 4개이고 각 설계변수는 3개의 수준값을 가질 수 있다고 가정하자. 모든 경우에 대한 실험을 실시하

**Table 1** A design case of four design variables with three levels

Factor	Level		
	1	2	3
A	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>
B	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>
C	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
D	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>

**Table 2** L<sub>9</sub>(3<sup>4</sup>) orthogonal array

Experiment number	Assignment and levels of factors				Characteristic Value
	A	B	C	D	
1	1	1	1	1	η <sub>1</sub>
2	1	2	2	2	η <sub>2</sub>
3	1	3	3	3	η <sub>3</sub>
4	2	1	2	3	η <sub>4</sub>
5	2	2	3	1	η <sub>5</sub>
6	2	3	1	2	η <sub>6</sub>
7	3	1	3	2	η <sub>7</sub>
8	3	2	1	3	η <sub>8</sub>
9	3	3	2	1	η <sub>9</sub>

는 전조합실험에서는 3<sup>4</sup>회의 실험을 요한다. 설계변수를 A, B, C, D 라 하고 수준을 아래첨자로 표기한 자료가 Table 1에 보여지고 있다. 실험의 배치를 조직적으로 배치하여 그 회수를 줄일 수 있는데, 이 때 직교배열표를 이용할 수 있으며 이에 대한 예가 Table 2에 보여지고 있다. 실험회수를 9회로 감소하여 전조합실험의 효과에 가까운 통계적효과를 도출할 수 있다.

직교배열표에 대한 표기법은 여러 가지가 존재하나 그 중 자주 사용하는 것을 보면 다음과 같다.

$$L_n(\prod_{i=1}^m l_i^{o'_i}) \quad (1)$$

여기서 L은 직교배열표를 의미하며, n은 직교배열표의 행의 수, m은 설계변수의 숫자, l<sub>i</sub>는 i번째 설계변수의 수준의 수, o'<sub>i</sub>는 i번째 설계변수가 차지하는 열의 수이다. 따라서  $\sum_{i=1}^m o'_i$ 는 직교

배열표의 열의 수이다.

Table 2에 보이는 직교배열표를 살펴보면 행렬로 간주할 수 있는데, 각 행은 한 실험에 대한 실험 조건을 의미한다. 한편 각 열은 각 설계변수에 대한 수준을 나타내는데, 특정한 수준이 한 열에 나타나는 회수가 동일하며 각 열을 벡터로 간주하면 각 열이 서로 직교한다. 이러한 직교배열표는 설계변수와 수준 수에 따라 다양한 것이 존재하며 실험계획법 시 많은 수학적, 통계적의미를 지니는데 여기서는 이에 대한 자세한 설명은 생략한다.

일반적인 최적화나 설계문제는 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\text{find } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

$$\text{to minimize } f(\mathbf{b}) \quad (3)$$

$$\text{subject to } h_i(\mathbf{b}) = 0 \quad i = 1, \dots, l \quad (4)$$

$$g_j(\mathbf{b}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$\mathbf{b}_L < \mathbf{b} < \mathbf{b}_U \quad (6)$$

여기서 **b**는 n개의 요소로 이루어진 설계변수 벡터, f는 목적함수, h<sub>i</sub>는 i번째 등제한조건, g<sub>j</sub>는 j번째 부등제한조건, **b**<sub>L</sub>과 **b**<sub>U</sub>는 각각 설계변수의 상한, 하한벡터이다. 한편 l은 등제한조건의 수, m은 부등제한조건의 수이다.

위의 정식화된 문제를 직교배열표를 이용하여 후보점을 선정하고 이를 이용하여 반응표면법을 사용하는 수도 있으나 이는 참고문헌을 참조하기 바란다.<sup>(15)</sup> 직교배열표를 설계에 직접 이용할 때는 Table 2에서 η로 나타난 특성치를 위의 정식화과정에서 사용한 식들을 변형하여 사용하는데 이는 다음 절에서 설명한다.

### 2.2 직교배열표를 이용하는 실험계획법에 의한 설계방법<sup>(6-9)</sup>

실험계획법에는 직교배열표가 정의하는 경우의 수대로 실험을 한 후 실험결과를 분석하고 분석을 토대로 파라미터설계(parameter design)를 하는 방법이 있다. 이러한 개념을 직접 설계에 이용하려는 노력이 일고 있는데 평균분석의 개념을 도입하여 그 결과를 설계에 반영하는데 이를 간략히 설명한다.

4개의 3수준 인자(설계의 경우에는 설계변수로 부른다.)가 존재할 때 직교배열표를 이용하여 실

Table 3 One-way table with  $L_9$

Level	A	B	C	D
1	$m_{A_1} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$	$m_{A_1} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \eta_4 + \eta_7)$	$m_{A_1} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \eta_6 + \eta_8)$	$m_{A_1} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \eta_5 + \eta_9)$
2	$m_{A_2} = \frac{1}{3}(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6)$	$m_{A_2} = \frac{1}{3}(\eta_2 + \eta_5 + \eta_8)$	$m_{A_2} = \frac{1}{3}(\eta_2 + \eta_4 + \eta_9)$	$m_{A_2} = \frac{1}{3}(\eta_2 + \eta_6 + \eta_7)$
3	$m_{A_3} = \frac{1}{3}(\eta_7 + \eta_8 + \eta_9)$	$m_{A_3} = \frac{1}{3}(\eta_3 + \eta_6 + \eta_9)$	$m_{A_3} = \frac{1}{3}(\eta_3 + \eta_5 + \eta_7)$	$m_{A_3} = \frac{1}{3}(\eta_3 + \eta_4 + \eta_8)$

험하는 경우의 예를 보자. 이에 대한 자료를 Table 1, 2에 수록하고 있다.

실계의 목적이 특성치  $\eta$ 를 최소화하는 인자의 수준을 결정하는 것이라 가정하자. Table 2로부터 특성치의 평균을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$m = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 \eta_i \tag{7}$$

각 인자의 수준에 의한 효과를 생각해보자. 인자 A가 A<sub>3</sub>의 값을 가질 때의 평균  $m_{A_3}$ 은 A<sub>3</sub>가 포함된 실험결과의 평균으로 나타내며 다음과 같이 된다.

$$m_{A_3} = \frac{1}{3}(\eta_7 + \eta_8 + \eta_9) \tag{8}$$

따라서 수준 A<sub>3</sub>의 효과는 ( $m_{A_3} - m$ )이다. 이와 같은 방법으로  $m_{A_1}$ 과  $m_{A_2}$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$m_{A_1} = \frac{1}{3}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3) \tag{9}$$

$$m_{A_2} = \frac{1}{3}(\eta_4 + \eta_5 + \eta_6) \tag{10}$$

이상으로부터 Table 3에 보여지는 일원표(one-way-table)를 만들고  $m_{A_1}$ ,  $m_{A_2}$ ,  $m_{A_3}$  중 가장 작은 것을 택하여 해당하는 A의 최종 설계값으로 선정하며 인자 B, C에 대해서도 동일한 수준을 거친다. 이러한 과정을 평균분석(analysis of means, ANOM)이라 부른다.

앞에서의 평균분석은 실험결과  $\eta$ 의 데이터 구조식이 다음의 가법성을 만족한다는 가정 하에 이루어진다.

$$\eta(A, B, C, D) = \mu + a_i + b_j + c_k + d_l + e \tag{11}$$

여기서  $\mu$ 는 모평균이며,  $a_i, b_j, c_k, d_l$ 은 각 인자 A, B, C, D가  $i, j, k, l$ 수준값을 가질 때 모평균으로부터의 편차(deviation)이다. 오차  $e$ 는 실험오차와 가법모형 (additive model)의 오차를 의미한다.

가법모형에서는 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

위의 데이터 구조식의 특성으로부터 식 (12)를 이용하여 식 (8)을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_{A_3} &= \frac{1}{3}(\eta_7 + \eta_8 + \eta_9) \\ &= \frac{1}{3}[(\mu + a_3 + b_1 + c_3 + d_2 + e_7) \\ &\quad + (\mu + a_3 + b_2 + c_1 + d_3 + e_8) \\ &\quad + (\mu + a_3 + b_3 + c_2 + d_1 + e_9)] \\ &= \frac{1}{3}(3\mu + 3a_3) + \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3) + \frac{1}{3}(d_1 + d_2 + d_3) \\ &\quad + \frac{1}{3}(e_7 + e_8 + e_9) \\ &= (\mu + a_3) + \frac{1}{3}(e_7 + e_8 + e_9) \end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)을 보면  $m_{A_3}$ 의 값은 오차를 무시할 경우 에 모평균에  $a_3$ 만을 더한 것이 된다. 이는 직교배열표 상에서 특정인자가 나타난 행들에서 다른 인자의 각 수준수가 동일한 수로 포함되어 식 (12)에 의해 다른 인자 들의 효과가 상쇄되는 직교성

때문이다. 여기서 특기할 것은 오차의 분산을  $\sigma_e^2$  이라 할 때 식 (13)에서  $\frac{1}{3}$  이 곱해지는 이유로 식

(13)의 총오차분산  $\sigma_E^2$  이  $\frac{1}{3}\sigma_e^2$  이 된다는 점이다.

이로 인해 직교배열표에 의한 실험은 적은 수의 실험으로 인자의 각 수준의 영향을 적은 오차로 인해 효과적으로 산출할 수 있게 해 준다.

앞에서는 인자의 최적수준을 선택하는 과정을 설명했다. 최적수준은 직교배열표 상의 한 행이 될 수도 있지만 직교배열표 상에는 없는 인자들의 수준의 조합이 될 수도 있다. 예컨대 앞의 문제에서 최적수준을  $A_1B_1C_2D_2$  라 할 때 이는 직교배열표의 어떤 행과도 다른 조합이다. 이 때는 가법모형의 가법성 (additivity)을 이용하여 각 수준에 대한 평균값을 가지고 최적값  $\eta_{opt}$  를 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\eta_{opt} = m + (m_{A_1} - m) + (m_{B_1} - m) + (m_{C_2} - m) + (m_{D_2} - m) \quad (14)$$

일반적으로 직교배열표에 있지 않은 경우가 최적수준이고 그에 의한 최적값이 식 (14)과 같이 산출되었을 경우에는 항상 확인 실험을 실시해야 한다. 만일 확인 실험에 의한 값이 식 (14)로 추정된 값과 비슷하다면 가법성의 가정을 비롯한 모든 과정이 옳다는 것을 의미한다. 그러나 두 값의 차이가 크다면 처음에 가정한 가법모형에 무리가 있음을 알 수 있다. 즉 식 (11)의 가법모형에서 오차  $e$  에 교호작용에 의한 효과가 교락되어 있는 바 교호작용이 큰 것을 알 수 있다.

교호작용을 고려할 경우에는 사전에 교호작용의 특성을 파악해야 하는 어려움이 있다.<sup>(9)</sup> 이에 대한 별도의 연구에 의하면 교호작용을 사전에 알 때 위의 방법을 사용할 수 있다.<sup>(16)</sup> 본 연구의 결과를 직접 사용하는 한편 직교배열표의 각 행을 반복적으로 실험하거나 모사를 하여 정확성을 기하거나 이를 강건설계의 방법으로 확장하는 방법도 있다.<sup>(6,17-21)</sup> 그러나 여기서는 실험이 대단히 고가인 경우의 응용을 전제로 반복실험에 대한 사항은 고려하지 않는다. 또한 직교배열표의 모든 항에 대해 실험으로 특성치를 구할 수도 있으나 앞의 전제로부터 이는 현실적으로 거의 불가능하며 모든 항의 특성치를 컴퓨터 모사로만 구하여 설계를 하는 예가 많이 존재한다.<sup>(12,22,23)</sup>

식 (2)~(6)까지에 보여지는 최적화정식에 직교배열표를 적용할 때는 제한조건이 존재한다. 이 때는 제한조건을 고려하여 다음과 같은 특성치를 정의할 수 있다.

$$\eta_{augmented} = f + P \quad (15)$$

$$P = \max(0, |h_i|; i=1, \dots, l, g_j; j=1, \dots, m) \times s \quad (16)$$

여기서  $s$  는 조절계수인데,  $P$  는 제한조건의 위배량에 따라 크기가 결정된다. 직교배열표의 각 행에 대하여  $\eta_{augmented}$  를 구하고 앞에서의 수순을 따라 최적값을 구한다. 제한조건이 있을 경우에는 일원표로부터 구한 최적해가 제한조건을 위배할 수 있다. 따라서 가법성만을 이용하여 우수한 설계의 순서를 올림차순으로 정렬하고 위배성을 검사하여 최적값을 구하는 방법이 존재하나 여기서는 그 설명을 생략한다. 이 경우는 컴퓨터 모사에 의해 실험값을 구하는 것이 보통이다. 한편, 앞의 과정을 반복진행 (iterative process)을 실시하여 근을 점차적으로 찾아가는 방법도 있다.<sup>(24,25)</sup>

### 3. 실험과 컴퓨터 모사 결과를 동시에 이용하여 직교배열표로 설계하는 방법

실험과 모사를 동시에 이용하여 직교배열표로 설계에 반영하는 방법을 제안한다. 이를 설명하기 위해 앞에서 채택한 3 수준을 가지는 4개의 설계변수가 존재하는 문제를 가지고 생각해 본다. 역시 Table 2의  $L_9$  직교배열표를 사용하는데, 식 (13)에  $A_3$  의 효과 및 오차분산이 보여지고 있다. 앞에서 설명한 바와 같이 직교배열표의 각 실험에 대한 실험이 동일한 환경이라 가정하면 각 행의 오차분산은  $\sigma_e$  이고  $A_3$  의 효과에 대한 오차분산은  $\frac{1}{3}\sigma_e$  이다.

위에서의 직교배열표의 1, 5, 9 행에 대해서는 실험을 실시하고 나머지 행에 대해서는 컴퓨터 모사를 실시한다고 가정하자. 또한 실험의 오차분산은  $\sigma_{ex}$ , 컴퓨터 모사 시의 오차분산은  $\sigma_{sim}$  라 하면 일반적으로  $\sigma_{ex} \ll \sigma_{sim}$  의 관계를 가정한다. 이는 앞에서 언급했듯이 실험의 오차가 모사의 오차보다는 대단히 작다는 가정으로부터 도출한 것이다.

Table 4 The first, fifth and ninth rows of  $L_9$ 

Experiment number	Levels of design variables			
	A	B	C	D
1	1	1	1	1
5	2	2	3	1
9	3	3	2	1

식 (13)은 다음과 같이 된다.

$$m_{A_3} = (\mu + a_3) + \frac{1}{3}(e_{sim} + e_{sim} + e_{ex}) \quad (17)$$

여기서  $e_{sim}$ 은 모사시의 오차,  $e_{ex}$ 는 실험 시의 오차이다. 이 때 총 오차분산  $\sigma_E^2$ 은 각 오차가 독립일 때 다음과 같이 된다.

$$\sigma_E^2 = \frac{2}{9}\sigma_{sim}^2 + \frac{1}{9}\sigma_{ex}^2 \quad (18)$$

만일  $\sigma_e \cong \sigma_{sim} \gg \sigma_{ex}$  라면 식 (18)의 오차분산은 식 (13)의 오차분산에 비해 현저히 감소하는 것을 알 수 있다. 여기서  $\sigma_e \cong \sigma_{sim}$ 인 이유는 앞에서 설명한 종래의 설계방법에서는 모사만을 사용했기 때문이다.

직교배열표의 1, 5, 9행을 따로 떼어내어 보인 것이 Table 4에 있다. Table 4의 각 열을 살펴보면 설계변수 A, B, C의 수준은 공히 한 번씩 나타난다. 그러나 설계변수 D에 대해서는 동일하게 1 수준만 나타남을 알 수 있다. 이로부터 설계변수 A, B, C의 모든 수준에 대한 효과를 검출할 때는 식 (18)의 오차분산을 포함하게 되나 설계변수 D에 대한 효과를 검출할 때는 그렇지 않음을 알 수 있다. 따라서 적절한 실험의 배치를 통해 오차분산의 감소효과를 얻으려면 직교배열표의 열 중 각 수준이 동일하게 배치되도록 해야 한다. 물론 그렇지 않을 경우에도 오차분산의 감소효과를 얻을 수는 있으나 모든 수준에 대해 동일한 감소를 얻지는 못하게 된다.

위에서 설명한 바와 같이 오차분산의 각 수준에 대한 동일한 감소효과를 얻기 위해서는 실험의 경우의 수로 선정된 열들에 설계변수의 각 수준이 동일하게 나타나는 것이 중요하다. 이를 위해 직교배열표에서 각 수준을 동일하게 나타나는 열을 선정하는 것이 중요하다. 아직 이의 선정에 대한 일반적인 법칙이 없으므로 사용자가 적절히 선정

하는 것이 필요하다. 여기서는  $L_9$ 에 대한 예시만을 보였으나 모든 직교배열표에 동일한 개념을 적용할 수 있다.

#### 4. 수학적 예제

앞에서 제안한 방법의 유용성을 검증하기 위하여 예제문제를 풀어본다. 검증을 위해 실제 실험의 실시를 고려할 수도 있겠으나 실제 실험이 오차를 얼마나 포함하는 지를 정확하게 가늠하는 것은 거의 불가능하다. 따라서 실제 실험으로부터는 제안한 방법의 효용성을 정량적으로 평가하기 어렵다. 따라서 여기서는 제안한 방법의 평가로 수학적인 함수를 선택한다. 즉 수학적인 함수의 값을 참값이라 간주하고 일정한 크기를 가지는 오차를 인위적으로 부가하여 제안한 방법에 대한 사항을 논한다. 정의한 수학적문제는 결과를 확연히 보여주기 위해서 제한조건이 없는 문제이다. 그러나 제한조건이 존재하는 경우에는 제한조건을 포함한 식 (15)를 이용할 수 있다.

##### 4.1 $L_9$ 직교배열표를 이용한 수학적 예제

다음과 같은 함수를 최소화하는 설계변수  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ 를 찾는 설계문제가 있다.

$$f = (x_1 - 3)^4 + (x_2 - 5)^2 + x_3^2 + 0.3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \quad (19)$$

여기서 설계변수  $x_1, x_2, x_3$ 는 Table 5에 보이는 바와 같이 각각 세 개의 수준을 가진다고 하자. Table 5의 값들은 수학적인 문제이므로 물리적의미는 없고 임의로 선정하였다. 위의 식으로부터 함수  $f$ 의 참값  $f_{true}$ 을 계산할 수 있다. 실험이나 모사의 경우에는 오차를 포함하므로 근사화한다는 의미에서 이를  $f_{app}$ 라 하고 오차모델을 다음과 같이 정의한다.

$$f_{app} = [(x_1 + e_1) - 3]^4 + [(x_2 + e_2) - 5]^2 + [(x_3 + e_3)]^3 + 0.3[(x_1 + e_1)(x_2 + e_2) + (x_2 + e_2)(x_3 + e_3) + (x_3 + e_3)(x_1 + e_1)] \quad (20)$$

Table 5에 있는 설계변수의 값을 이용하여  $f_{true}$ 를 전조합실험법 (full-factorial design)으로 검증하

**Table 5** Levels of design variables and the full-factorial experiment for the first example

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	remark
Level 1	1.5	2.0	2.0	
Level 2	3.0	4.0	3.0	
Level 3	4.5	6.0	4.0	
Optimum from the full-factorial experiment	Second level	Second level	First level	When error appears, $x_i = x_i + e_{ex}$ (in experiments) $x_i = x_i + e_{sim}$ (in simulations) $i = 1, 2, 3$

면 최적값은  $\mathbf{x}^* = [3.0 \ 4.0 \ 2.0]$  이다. 전조합실시법에 의한 최적화의 결과가 Table 5에 있다. 식 (20)에서 실험시의 오차를  $e_{ex}$ , 모사에서의 오차를  $e_{sim}$  이라 하고 실험 시와 모사에서의 오차를 다음과 같이 치환한다.

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_{ex} \text{ (실험시)} \quad (21)$$

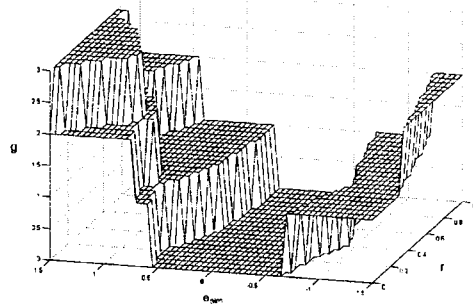
$$e_1 = e_2 = e_3 = e_{sim} \text{ (모사시)} \quad (22)$$

한편 실험시의 오차가 작다는 일반적인 사실로부터 다음의 관계를 설정한다.

$$e_{ex} = r e_{sim} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (23)$$

직교배열표에 의한 설계를 하기 위해 식 (19)에 선정한 함수가 세 수준을 가지는 세 가지의 설계변수를 보유하므로 Table 2에 보이는  $L_9$  을 선택한다. 설계변수  $x_1, x_2, x_3$  을 Table 2의 A, B, C 열에 배치한 후 앞장에서 설명한 바와 같이 실험 시 모든 변수의 효과가 동일하도록 1, 5, 9 번 제 행에 실험을 배치하고 나머지 행에는 모사를 배치한다.

위의 조건으로 실험과 모사를 동시에 배치하여 시행한 직교배열표에 의한 설계결과가 Fig. 2에 있다. 모사와 실험 시 오차의 크기와 그들 간의 비율에 따른 설계경향을 보기 위하여 모사의 오차  $e_{sim}$  을 -1.5부터 1.5까지, 식 (23)의 비율  $r$  을 0부터 1까지 변화시키면서 모든 경우에 대한 설계결과를 평가하였다. 이러한 범위에서 식 (20)이 가법성을 만족하여 교호작용을 무시할 수 있다는 것을 확인하였다. 잘 알려져 있는 바와 같이 가법성을 만족하면 직교배열표에 의한 설계결과와 전조합실시법에 의한 설계결과는 동일하며 Table 5의 전조합실시법에 의한 설계결과를 기준값으로 사용할 수 있다.



**Fig. 2** Design results of Example 1 according to errors

오차가 없다고 가정하면 Table 5에서 보는 바와 같이 각 수준이 (2, 2, 1)일 때가 최적값이다. 오차가 존재할 경우의 최적값이 오차가 없는 경우와 어떻게 다른가를 비교하기 위해 다음의 함수를 정의한다.

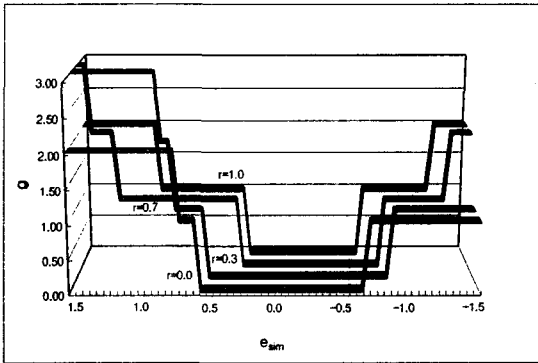
$$g = |l_{1,opt} - 2| + |l_{2,opt} - 2| + |l_{3,opt} - 1| \quad (24)$$

여기서  $l_{i,opt}$  는 오차가 존재할 때 직교배열표로부터 도출한 최적수준이다.

여기서 주목할 사실은  $g$  가 0이 아닌 경우는 오차로 인해 원하지 않는 설계값이 도출되었다는 것을 의미한다는 것이다. 식 (24)의  $g$  가 Fig. 2에 보여지고 있는데  $g=0$  이면 오차가 없을 때의 최적값과 동일한 것을 의미한다. 그림을 살펴보면 오차가 적을 때는  $g=0$  이 되나 오차가 커질수록  $g$  값이 커지므로 오차가 존재하지 않을 때와 다른 설계값을 구하게 됨을 알 수 있다. Fig. 3은  $e_{sim}$  을 수직축으로 하고 각  $r$  값에 대한  $g$  의 변화 추세를 좀 더 자세히 보여주고 있다. Fig. 3의 결과를 분석하면 모사의 오차  $e_{sim}$  이 다소 크더라도  $r$  이 작으면, 즉 실험을 설계과정에 이와 같이

**Table 6** Levels of design variables and the full-factorial experiment for the second example

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
Level 1	1.0	2.0	0.8	2.0	1.5	1.3
Level 2	2.0	3.0	4.0	3.8	2.6	2.4
Level 3	3.1	4.0	5.2	5.6	3.7	3.5
Optimum from the full-factorial experiment	Second level	First level	First level	First level	First level	Second level



**Fig. 3** Design of Example 1 for various  $r$ 's

고려하면 정확한 해를 구할 확률이 크다.

4.2  $L_{18}$  직교배열표를 이용한 수학적 예제

또 하나의 예제로서 다음과 같은 함수를 가지는 설계모델이 있다 가정하자.

$$h_{true} = \sum_{i=1}^6 (x_i - 2)^2 \tag{25}$$

여기서  $x_i$ 는  $i$  번 째 설계변수로 총 6개이다. 식 (25)에는 교호작용이 존재하지 않는다. 각 설계변수는 3 수준을 가지며 각 수준의 값과 오차가 없을 때의 최적값 및 설계자료가 Table 6에 있다. 앞 문제와는 달리 오차가 존재할 때의 근사화된 오차 모델을 다음과 같이 가정해 본다.

$$h_{app} = h_{true} + h_{error} \tag{26}$$

여기서  $h_{error}$  를 평균 0, 표준편차  $\sigma = qh_{true}$  ( $0 \leq q \leq 1$ ) 를 가지는 정규분포  $N(0, \sigma^2)$  로 가정한다.<sup>(26)</sup> 예를 들어 모사의 경우에 대한 표준편차  $\sigma_{sim} = qh_{true}$  이다.

이상의 예제를 풀기 위해 3 수준의 설계변수 6 개를 다룰 수 있는 Table 7에 보여지는  $L_{18}$  직교배

**Table 7**  $L_{18}$  orthogonal array

Experiment number	Assignment and levels of factors							
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

열표를 선정한다.  $L_{18}$  직교배열표의 각 열에 6개의 설계변수를 배치하고, 실험 시 모든 수준이 동일한 횟수로 나타나도록 하기 위해 첫 번째부터 여섯 번째의 행에 실험을 배치하고 나머지 행에 모사를 배치한다. 7부터 18 번째의 행에 해당하는 모사의 경우  $h_{error}$  를 정규분포  $N(0, \sigma_{sim}^2)$  을 가지는 난수표로부터 도출한다. 한편 1부터 6 번째의 행은 실험에 해당하며  $h_{error}$  를 정규분포  $N(0, \sigma_{ex}^2)$  를 가지는 난수표로부터 도출한다. 여기서 실험과 모사에 대한 오차의 표준편차의 관계를 다음과 같이 정의한다.

$$\sigma_{ex} = r\sigma_{sim} \quad (0 \leq r \leq 1) \tag{27}$$



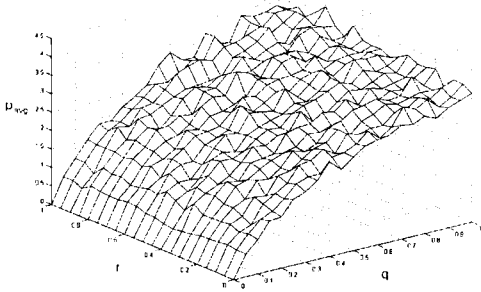


Fig. 4 Trend of design results for Example 2

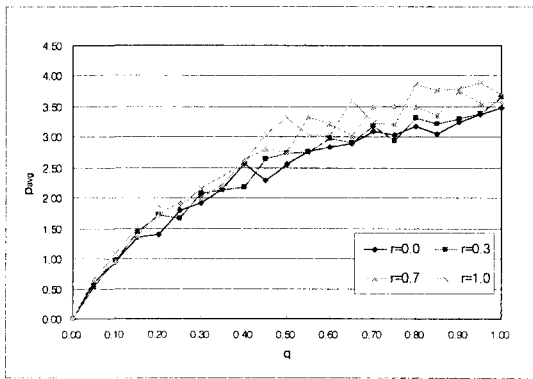


Fig. 5 Trend of design results for Example 2

이로부터 식 (26)을 이용하여  $h_{app}$  를 구하여 각 항에 대해 오차를 포함한 목적함수값을 구한다. 이 후 직교배열표를 이용하여 최적값을 구한다. 오차가 없다고 가정하면 Table 6에서 보는 바와 같이 각 수준이 (2, 1, 1, 1, 1, 2)일 때가 최적값이다. 앞의 예제와 같이 오차가 존재할 경우의 최적값이 오차가 없는 경우와 어떻게 다른가를 비교하기 위해 다음의 함수를 정의한다.

$$p = |l_{1,opt} - 2| + |l_{2,opt} - 1| + |l_{3,opt} - 1| + |l_{4,opt} - 1| + |l_{5,opt} - 1| + |l_{6,opt} - 2| \quad (28)$$

여기서의 예제에서는 오차를 난수표로부터 도출하였기 때문에 앞에서의 예제와는 다르게  $p$  의 값이 시행 시 마다 다르게 산출된다. 따라서  $p$  의 값을 여러 번 산출하여 그 평균값을  $p$  의 최종값으로 사용하는 것이 타당하므로 다음과 같은  $p_{avg}$  를 정의한다.

$$p_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \quad (29)$$

여기서  $p_i$  는  $i$  번 째 설계에서 식 (28)의 값이며  $n$  은 설계의 숫자이다. 본 문제에서는  $n=100$  일 때의 결과를 산출하였다.

Fig. 4에  $0 \leq q \leq 1$  이고  $0 \leq r \leq 1$  의 모든 경우에 대한 식 (29)의  $p_{avg}$  의 값이 보여지고 있다. 여기서도  $p_{avg} = 0$  이 오차가 없을 때의 최적값을 도출한 것을 의미하며  $p_{avg} > 0$  이면 오차로 인해 최적값과 다른 설계값을 구한 것이며  $p_{avg}$  가 커질수록 최적값에서 먼 설계가 도출되었다는 것을 의미한다. Fig. 5에는 이에 대한 좀 더 자세한 결과가 보여지고 있다. 결과를 분석해 보면  $q$  와  $r$  이 커질수록  $p_{avg}$  의 값이 적어지는 현상을 볼 수 있는데 Fig. 4, Fig. 5의 결과가 일정한 추세가 아닌 울퉁불퉁한 곡선으로 나타나는 이유는 오차의 크기를 난수표로부터 추출했기 때문이다. 따라서  $p_{avg}$  를 다시 구하면 다르게 나타날 수 있으나 전반적인 추세는 동일하게 나타난다. Fig. 5를 분석해 보면  $r$  이  $q$  에 비해 설계결과 변화에 적은 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 따라서  $q$  와  $r$  의 영향도를 분석해보면  $q$  의 크기가 더 중요하다는 것을 알 수 있다.

## 5. 결론

공학설계는 실험을 통해 수행하는 것이 좋은 방법이나 이를 위해서는 여러 번의 실험이 필요하다. 따라서 실험이 대단히 고가일 때는 실험을 설계의 결정에 사용하기 보다는 설계결과에 대한 검증으로 사용하고 있다. 많은 경우에 설계의 결정에는 컴퓨터에 의한 모사를 사용하고 있으나 다양한 원인으로 인해 모사에는 많은 오차가 포함되어 있다. 본 연구에서는 이러한 문제의 제기로부터 다음과 같이 새로운 방법을 제안하고 결론을 도출하였다.

(1) 실험에는 모사보다는 오차가 적다는 가정하에 실험결과를 설계결정에 포함하기 위한 방법을 제안하였다. 제안한 방법의 주된 아이디어는 종래의 직교배열표를 이용한 설계방법에서 각 행에 실험과 모사를 혼합해서 배치하는 것이다.

(2) 제안한 방법은 직교배열표의 장점인 이산설

계를 실시할 수 있고 실험횟수를 줄이는 동시에 각 설계변수에 대한 직교성을 유지한다. 이에 대한 증명으로 오차분석을 하였다. 직교성을 유지하기 위해 실험의 배치 방법도 제안하였다.

(3) 제안한 방법의 타당성의 실례를 보여주기 위해 두 개의 수학적 예제와 그에 대한 오차모형을 만들었다. 오차의 크기에 따라 설계결과가 크게 달라질 수 있다는 결과가 도출되었다. 따라서 오차가 적은 실험을 제안한 방법에 의해 직교배열표에 배치할 때 정확한 설계를 할 수 있음이 입증되었다.

본 연구의 결과를 바탕으로 앞으로는 두 방향의 연구를 진행할 수 있겠다. 첫 째, 기존에 교호작용을 고려하여 직교배열표에 의한 설계연구가 존재한다.<sup>(12)</sup> 따라서 여기서의 방법과 유사한 것으로 교호작용을 고려한 오차분석과 설계방법을 제안할 예정이다. 둘째, 제안한 방법으로 실험과 모사를 혼합하여 실제 설계에 적용하려 한다. 실제 실험을 사용할 경우 오차의 크기를 정량적으로 산출할 수 없으므로 설계결과에 대한 우수성을 입증하기가 대단히 어려우므로 본 연구의 결과를 이론적 근거로 사용할 예정이다.

## 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Haug, E.J. and Arora, J.S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA.
- (2) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, USA.
- (3) Haftka, R.T. and Gürdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- (4) Vanderplaats, G.N., 1984, *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, USA.
- (5) Gill, P.E., Murray, W. and Wright, M.H., 1981, *Practical Optimization*, Academic Press, New York, NY, USA.
- (6) Park, G.J., 2005, *Analytic Methods in Design Practice*, Springer-Verlag, Germany. (in preparation)
- (7) Park, S.H., *Modern Design of Experiments*, Minyoungsa, Seoul, Korea, 1991. (in Korean)
- (8) Taguchi, G., 1987, *Systems of Experimental Design (Vol. I, II)*, Kraus International Publications, New York, NY, USA.
- (9) Phadke, M.S., 1989, *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- (10) Yi, J.W., Ha, D.Y., Lee, S.W., Lim, J.M. and Park, G.J., 2003, "Development of Design System for EPS Cushioning Package of Monitor Using Axiomatic Design," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 27, No. 10, pp. 1644~1652. (in Korean)
- (11) Hedayat, A.S., Sloane, N.J.A. and Stufken, J., 1999, *Orthogonal Arrays*, Springer, New York, NY, USA.
- (12) Lim, J.M. and Park, G.J., 1999, "Design Recommendation of the Occupant Protection Systems Using Orthogonal Arrays," *J. of KSAE*, Vol. 7, No. 8, pp. 208~215. (in Korean)
- (13) Hong, D.K., Choi, S.C. and Ahn, C.W., 2003, "The Size Optimization Design of Crane Using the Table of Orthogonal Array and Finite Element Analysis," *Spring annual conference of KSPE*, pp. 1471~1474. (in Korean)
- (14) Kim, Y.I., Yi, J.W., Yoon, J.Y. and Park, G.J., 2003, "A Design Methodology and Software Development with Sensitivity Information," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 27, No. 12, pp. 2092~2100. (in Korean)
- (15) Myers, R.H. and Montgomery, D.C., 1995, *Response Surface Methodology*, John Wiley & Sons, New York, NY, USA.
- (16) Hwang, K.H., Kwon, W.S., Lee K.H. and Park, G.J., 2000, "Design of Structure Using Orthogonal Arrays Considering Interactions in Discrete Design Spaces," *Trans. of KSME (A)*, Vol. 24, No. 12, pp. 2952~2962. (in Korean)
- (17) Hwang, K.H., Lee, K.W. and Park, G.J., 2001, "Robust Optimization of an Automobile Rearview Mirror for Vibration Reduction," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, No. 4, pp. 300~308.
- (18) Lee, K.H., Eom, I.S., Park, G.J. and Lee, W.I., 1996, "Robust Design for Unconstrained Optimization Problems Using Taguchi Method," *AIAA Journal*, Vol. 34, No. 5, pp. 1059~1063.
- (19) Lee, K.H. and Park, G.J., 2002, "Robust Optimization in Discrete Design Space for Constrained Problems," *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 4, pp. 774~780.
- (20) Lee, K.H. and Park, G.J., 2001, "Robust Optimization Considering Tolerances of Design Variables," *Computers and Structures*, Vol. 29, pp. 77~86.
- (21) Fowlkes, W.Y. and Creveling, C.M., 1995, *Engineering Methods for Robust Product Design*, Addison Wesley, Reading, MA, USA.
- (22) Lim, J.M., Wuh, D.H. and Park, G.J., 2000, "Analysis and Design Consideration of an Energy Absorbing Steering System using Orthogonal Arrays," *International Journal of Crashworthiness*, Vol. 5, No. 3, pp. 271~278.
- (23) Song, S.I., Bae, K.J., Lee, K.H. and Park, G.J., 2002, "Lightweight Design for Automotive Door Using Optimizations and Design of Experiments," *J. of KSAE*, Vol. 10, No. 1, pp. 125~132. (in Korean)
- (24) Ku, K.J., Rao, S.S. and Chen, L., 1998, "Taguchi-

- Aided Search Method for Design Optimization of Engineering Systems," *Engineering Optimization*, Vol. 30, pp. 1~23.
- (25) Yi, J.W., Park, J.S., Lee, K.H. and Park, G.J., 2003, "An Optimization Algorithm Using Orthogonal Arrays in Discrete Design Space for Structures," *Finite Element Method and Design*, Vol. 40, No. 1, pp. 121~135.
- (26) Walpole, R.E., 1982, *Introduction to Statistics*, Macmillan, New York, NY, USA.