

소음해석과 통계적에너지해석법

김재승*
(한국기계연구원)

여기에서는 우선 SEA방정식을 소개하고 방정식에 나타나는 SEA파라미터의 물리적 의미와 각 파라미터의 산정과 관련한 이론적 배경을 살펴보고자 한다.

1. 머리말

소음레벨은 20 Hz부터 20 kHz까 전 가청주파수 대역에 포함된 음압의 크기를 의미한다. 일반적으로 소음의 주파수 성분은 그림 1(a)에 보인 스펙트럼 레벨의 예와 같이 일정 주파수에서 큰 값을 보이는 피크성분과 넓은 주파수 범위에 걸쳐 완만하게 변화하는 광대역 성분으로 구성되어 있다. 이와 같은 소음의 주파수 성분을 나타내기 위해 실제로 많이 사용하고 있는 방법은 그림 1(b)에서와 같이 1옥타브 혹은 1/3옥타브 밴드레벨을 이용하는 것이다. 따라서, 소음해석 결과를 예측결과와 비교하기 위해서는 밴드레벨을 구할 필요가 있다.

밴드레벨을 구하기 위해 유한요소법이나 경계요소법을 이용할 경우에는 고주파수로 말미암아 발생하는 요소 수의 증가문제 이외에도 주파수를 증가시켜가며 해석을 수없이 반복하여야 한다는 문제점이 있다. 통계적에너지해석법(SEA : Statistical Energy Analysis)은 시스템의 응답에 다수의 공진모드가 참여하고 있다는 가정

하에 1970년대에 Lyon 등⁽¹⁾에 의해 제안된 이론으로서, 바로 이러한 경우에 매우 유용하게 사용될 수 있다. 소음과 구조물의 고차진동은 대부분의 경우에 있어서 상기한 SEA의 기본가정이 성립하므로 자연히 SEA는 이들 문제의 해석수단으로 자리잡게 되었다.

여기에서는 우선 SEA방정식을 소개하고 방정식에 나타나는 SEA파라미터의 물리적 의미와 각 파라미터의 산정과 관련한 이론적 배경을 살펴보고자 한다.

2. 진동계의 에너지 평형식

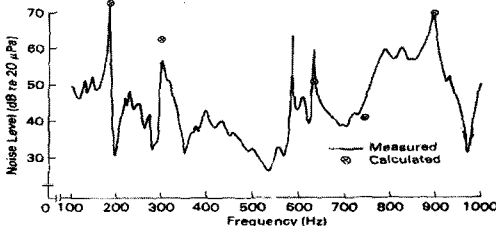
2.1 1자유도 진동계의 에너지 관계식

그림 2에 보인 1자유도 진동계가 운동할 때 댐퍼에 의해 시스템으로부터 소멸되는 파워 Π 는 다음과 같이 주어진다.

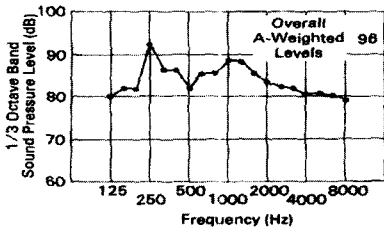
$$\Pi = \omega_0 \eta m \langle \dot{x}^2 \rangle = \omega_0 \eta E \quad (1)$$

단, $\omega_0 (= \sqrt{\frac{m}{k}})$ 는 공진 각주파수를,

* E-mail : jskim@kimm.re.kr



(a) 스펙트럼 레벨



(b) 1/3옥타브 밴드레벨

그림 1 소음의 주파수 분포와 표현방법

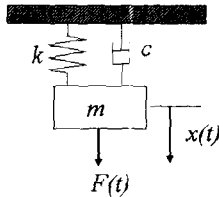


그림 2 1자유도 진동계

$\eta (= \frac{c}{\omega_0 m})$ 는 감쇠계수(loss factor)를, $\langle \dot{x}^2 \rangle$ 는 평균속도를 나타낸다. 또한, $m \langle \dot{x}^2 \rangle$ 는 계의 전체 진동에너지 E 와 동일하다는 사실을 적용하였다.

2.2 SEA 방정식

그림 3은 이중 패널의 차음성능 해석을 위해 수립한 SEA 해석모델의 예이다.²⁾ SEA 모델은 그림에서 보는 바와 같이 전체 시스템을 개념적 혹은 물리적인 특성에 따라서 독립적인 여러 개의 세부시스템으로 나누고 이들 간의 연결을 세부시스템 사이의 에너지 전달 관점에서 정의한 것이다. 예를 들어, 그림 3에서는 차음성능 해석 모

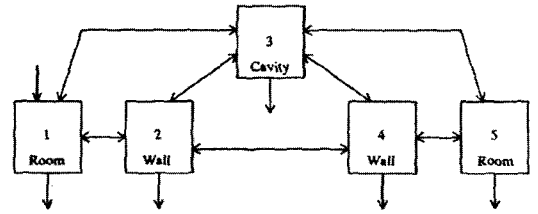


그림 3 2중 패널의 차음성능 해석을 위한 SEA모델

델에 두 인접 공간의 소음전파 경로로서 공통 벽의 진동을 통해 전달되는 공진모드와 함께 질량 법칙에 의존하는 비공진모드를 동시에 고려하고 있음을 알 수 있다.

주어진 문제의 SEA 모델을 정의한 후에는 각 세부시스템의 에너지를 구하기 위해서 모델링에 사용된 K 개의 세부시스템 사이에 성립하는 관계식 (2)를 이용한다.

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \omega \eta_i E_i + \omega \sum_{j=1, j \neq i}^K \eta_{ij} N_j \left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right) \\ i &= 1, \dots, K \end{aligned} \quad (2)$$

SEA방정식이라고 알려진 식 (2)는 유한한 밴드 폭을 갖는 주파수 구간에 대하여 성립하고 동시에 세부시스템의 에너지는 해당 주파수 구간에 존재하는 공진모드에 의해 저장되는 것으로 간주한다. 따라서 식에 나타난 원주파수 ω 는 물론, Π_i , E_i , N_i , η_i 및 η_{ij} 로 표시된 입력파워, 세부시스템의 에너지, 모드카운트(mode count), 자체손실계수(internal loss factor) 및 결합손실계수(coupling loss factor)는 모두 해당 주파수 밴드에 해당하는 전체 값이나 대표값 혹은 평균값을 의미한다. 즉, E_i 는 세부시스템이 지니는 전체 응답에너지로 이 값은 해당 주파수 구간의 모든 고유모드의 응답에너지를 더해 준 값을, η_i 와 η_{ij} 는 해당 고유모드들의 평균값을, 그리고 ω 는 대표값으로 중심주파수를 사용한다. 한편, 모드카운트 N_i 는 해당 주파수 구간에 존재

하는 고유모드의 개수를 의미한다.

식 (2)에 보인 SEA 방정식은 시스템의 에너지 균형이 이루어졌을 때 각 세부시스템의 에너지 E_i 가 만족시켜야 하는 관계식을 표현한 것이다. 이 관계식의 의미를 살펴보기 위해 우선 좌변의 Π_i 항은 외력에 의해 해당 세부시스템으로 유입되는 입력파워 즉, 단위시간당 에너지를 나타내고 있음을 쉽게 알 수 있다.

우변의 첫 번째 항 $\omega\eta_i E_i$ 는 1자유도진동계의 에너지 소멸식인 식 (1)과 동일한 형태인 점으로 미루어 이 항은 세부시스템에서 자체적으로 감쇠되는 파워를 나타내고 있음을 알 수 있다. 이제, 우변의 나머지 항을 풀어 쓰면,

$$\begin{aligned} & \omega \sum_{j=1, j \neq i}^K \eta_{ij} E_i - \omega \sum_{j=1, j \neq i}^K \eta_{ij} \frac{N_i}{N_j} E_j \\ & = \omega \sum_{j=1, j \neq i}^K \eta_{ij} E_i - \omega \sum_{j=1, j \neq i}^K \eta_{ji} E_j \end{aligned}$$

를 얻는다. 상기식의 유도에는 다음과 같이 주어지는 상반(reciprocity)정리⁽¹⁾를 적용하였다.

$$\eta_{ij} N_i = \eta_{ji} N_j \quad (3)$$

마지막 결과에 나타난 항목 $\omega\eta_{ij} E_i$ (혹은 $\omega\eta_{ji} E_j$)를 식 (1)과 비교하면 이 항목 역시 식 (1)과 동일한 표현임을 알 수 있다. 다만 1자유도진동계의 손실계수로서 η_{ij} (혹은 η_{ji})를 사용하고 있다는 점에서 차이가 날 뿐이다. 이 결과로부터 이 항목은 인접한 세부시스템으로 에너지가 전달되어 나타나는 현상을 묘사한 항임을 짐작할 수 있다. 그러나, 이 경우에는 자체손실계수의 경우와 같이 전체 시스템의 에너지가 소멸하는 것은 아니다. 이와 같이 SEA방정식에 나타나는 결합손실계수 η_{ij} (혹은 η_{ji})는 세부시스템 i (혹은 j)에서 인접한 세부시스템 j (혹은 i)로 에너지가 전달되므로 인해 결과적으로 세부시스

템 i (혹은 j)에 나타나는 감쇠효과를 함축적으로 표시하기 위해 SEA 이론에서 새로이 도입하여 사용하고 있는 개념이다.

결론적으로, 식 (2)로 주어지는 SEA방정식은 모든 세부시스템에 대하여 외부에서 유입되는 파워는 감쇠에 의해 자체적으로 소멸되는 파워와 인접한 세부시스템으로 전달되는 파워의 합과 동일하여야 한다는 에너지 평형식임을 알 수 있다.

SEA방정식이 세부시스템 사이의 파워전달과 관련하여 내포하고 있는 중요한 물리적 현상의 하나는 식 (2)의 우변 마지막 항에서 볼 수 있듯이 전달파워가 두 인접시스템간의 전체에너지에 비례하지 않고 모달에너지의 차이에 비례하고 있다는 사실이다. 여기에서 모달에너지란 전체 에너지를 모드카운트로 나눈 값 즉, 공진하는 개개의 모드가 지니고 있는 에너지의 평균값을 말한다.

3. SEA 파라미터

식 (2)로부터 각 세부시스템의 에너지 E_i ($i=1, \dots, K$)를 얻기 위해서는 각 세부시스템을 대상으로 외부 입력 파워 Π_i , 자체손실계수 η_i 와 모드카운트 N_i 를, 그리고 결합손실계수 η_{ij} 등 SEA파라미터를 산정하여야 한다. 이 들 SEA파라미터 중 자체손실계수는 일반적으로 사용하는 감쇠계수와 큰 차이가 없으므로 생략하고 그 외의 파라미터를 대상으로 물리적 배경과 추정법을 살펴보기로 한다.

3.1 입력파워

대부분의 세부시스템에 대하여 입력파워는 0으로 주어지고, 외력이나 소음원이 위치하는 공간에 해당하는 세부시스템에 대하여 그 값을 입력한다. 소음원으로부터 공간으로 유입되는 입력파워는 소음원의 음향출력을 의미한다. 음향

출력은 이미 오래전부터 사용해 오고 있는 개념으로서 용어의 정의, 우리에게 친숙한 음압레벨과의 관계, 측정방법 등은 잘 알려져 있다.⁽⁵⁾ 그러나, 구조물에 유입되는 입력파워는 상대적으로 잘 알려져 있지 않은 물리량의 하나이다.

일반적으로 구조물에 작용하는 외력에 의해 구조물에 유입되는 파워의 크기는 외력은 물론 구조물의 특성에도 영향을 받게 된다. 예를 들어, 외력이 작용하는 지점의 속도가 0일 경우 이 외력으로 인해 구조물로 유입되는 파워는 없다. 이와 같은 이유로 등으로 인하여 구조물에 유입되는 파워의 추정은 여러 가지 면에서 아직까지 음향출력과 같이 충분한 상태에 이르고 있지 못한 상태이다.

최근에는 구조물에 유입되는 파워가 구조물의 특성에도 영향 받고 있음을 고려해 ISO에서 선박에 탑재되는 장비의 진동 소음원 레벨 측정시 장비의 가속도와 함께 지지구조의 임피던스도 동시에 측정하도록 규정하려는 움직임이 있다.⁽⁶⁾

비교적 단순한 경우인 집중외력이 작용할 때 구조물로 유입되는 파워는 다음 식에 의해 추정한다.

$$\Pi = \langle f^2 \rangle \text{Re}\{Y\} = \langle v^2 \rangle \text{Re}\{Z\} \quad (4)$$

단, $\langle f^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$ 는 외력의 제곱평균 값과 외력이 작용하는 지점에서 구조물의 제곱평균 속도를, $\text{Re}\{Y\}$, $\text{Re}\{Z\}$ 는 각각 외력이 작용하는 지점에서의 모빌리티와 임피던스의 실수부를 나타내고 무한평판의 경우 다음 식으로 주어진다.⁽⁶⁾

$$1/Y = Z = 8\sqrt{\rho_p h B}, \quad B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

단, ρ_p , h , B 는 각각 평판의 밀도, 두께 및 굽힘강성을, 그리고 E 와 ν 는 각각 탄성계수와 프아송비를 나타낸다.

3.2 모드카운트

모드카운트는 관심 주파수 구간에 존재하는 고유모드의 수를 의미하고 단순한 세부시스템의 경우 계산에 의한 값을 사용하고 있다. 모드카운트를 구하는 예로서 단순지지된 직사각형 평판의 경우에는 다음과 같은 과정을 거쳐 구하고 있다. 이 결과는 단순지지된 경우에 한정하지 않고 대부분의 평판에 대하여 큰 오차없이 사용할 수 있다.

양변의 길이가 각각 a , b 로 주어지고 네변이 모두 단순지지된 직사각형 평판의 고유진동수는 다음과 같이 주어진다.

$$\omega_{mn} = k_{mn}^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho_p}}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

단,

$$k_{mn} = \sqrt{k_m^2 + k_n^2} \\ k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad k_n = \frac{n\pi}{b} \quad (6)$$

식 (5)와 (6)으로부터 모드의 (m, n) 고유진동수 ω_{mn} 은 k_{mn} 즉, (k_m, k_n) 과 일대일 대응 관계에 있다. 이 관계를 이용할 경우 그림 4와 같이 k_m, k_n 의 크기를 각각 수평 및 수직좌표로 하는 좌표계를 생각하면 그림에서 원으로 표시된 점은 하나의 공진모드에 해당하고 또 원점으로부터 이 점까지의 거리는 고유진동수에 비례하고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 좌표계를 파수공간이라고 부른다.

이제 파수공간에서 반지름이 k_b 인 원을 그렸을 경우 내부에 포함되어 있는 점은 고유진동수

$$\omega = k_b^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho_p}} \text{ 보다 낮은 고유모드}$$

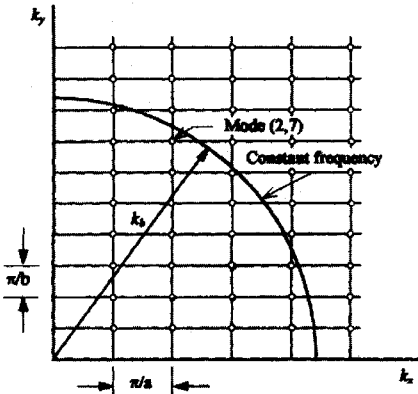


그림 4 파수 공간

에 해당한다. 따라서, 그림 4에서 한 모드가 파수 공간에서 차지하는 면적이 $\frac{\pi^2}{ab}$ 임을 고려하면 고유진동수가 ω 보다 작은 고유모드의 개수 $N(\omega)$ 는

$$\begin{aligned}
 N(\omega) &= \frac{\pi k^2}{4} / \frac{\pi^2}{ab} = \frac{k^2 A_p}{4\pi} \\
 &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho_p}}} \frac{A_p}{4\pi} \\
 &= \frac{\sqrt{3}\omega A_p}{2\pi h} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_p}{E}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

단, A_p 는 평판의 면적을 나타낸다.

한편, 모드카운트와 함께 모드밀도(modal density) $n(\omega)$ 가 사용되기도 하는데 이 값은 단위 주파수당 모드의 갯수를 의미하는 것으로 앞에서 구한 $N(\omega)$ 로부터 다음 식에 의해 구해진다.

$$n(\omega) = \frac{dN(\omega)}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}A_p}{2\pi h} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_p}{E}} \quad (8)$$

또한, 주파수 단위로 Hz를 사용하여 모드밀도

표 1 옥타브밴드 구간의 모드카운트 예

중심 주파수	63 Hz	125 Hz	250 Hz	500 Hz
평판 (4 m ² , 5 t)	11	22	45	90
공간 (36 m ³)	2	18	148	1186
중심 주파수	1 kHz	2 kHz	4 kHz	8 kHz
평판 (4 m ² , 5 t)	180	360	720	1440
공간 (36 m ³)	9495	75962	607697	4861579

를 표시하면 다음과 같다.

$$n(f) = 2\pi m(\omega) = \frac{\sqrt{3}A_p}{h} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_p}{E}} \quad (9)$$

평판과 함께 중요한 SEA 세부시스템인 공간에 대한 모드밀도는 다음과 같이 주어진다.

$$n(f) = \frac{4\pi f^2 V}{c^3} \quad (10)$$

단, V 와 c 는 각각 공간의 체적과 음속을 나타낸다.

표 1은 두께가 5 mm이고 면적이 4 m²인 평판과 3 m x 4 m x 2.5 m인 공간의 옥타브밴드별 모드카운트를 식 (9)와 (10)으로부터 정리한 것이다. 이와 같은 자료로부터 주어진 문제에 주파수 밴드별로 몇 개의 공진모드가 존재하는지를 알 수 있으며 이 정보는 곧 SEA의 결과가 타당한 것인가에 대한 판단 근거로 사용될 수 있다. 참고로, SEA방정식 (2)는 응답에 관여하는 공진 모드수가 충분히 많다는 가정하에 유도된 것이다.

3.3 결합손실계수

결합손실계수는 앞서도 언급하였듯이 인접한 세부시스템과의 경계 즉, 연결지점에서 에너지가 다른 세부시스템으로 전달되어 해당 세부시스템에 유발되는 감쇠효과를 함축적으로 표현하고 있는 SEA 파라미터로서 SEA 이론과 함께 나타난 용어이다.

(1) 음장과 구조물

평균제곱속도 $\langle v^2 \rangle$ 로 진동하고 있는 구조물의 에너지 E_s 와 이로부터 발생하는 음향출력 Π_{rad} 은 각각 다음과 같이 주어진다.

$$E_s = m_s \langle v^2 \rangle, \quad \Pi_{rad} = \sigma_{rad} \rho c A_s \langle v^2 \rangle$$

이 두 식으로부터 식 (1)로 표현되는 관계식을 구하면,

$$\Pi_{rad} = \frac{\sigma_{rad} \rho c A_s}{m_s} E_s = \omega \eta_{sa} E_s$$

를 얻는다. 단, ρ , c 및 σ_{rad} 는 각각 구조물 주위 유체의 밀도, 음속과 방사효율을 나타내고, m_s 와 A_s 는 구조물의 질량과 방사면적을 나타낸다. 또한, η_{sa} 는 물리적 의미에 따라 정의된 구조물에서 음장으로 전달되는 경우의 결합손실계수로서 뒷식으로부터 다음과 같이 정리된다.

$$\eta_{sa} = \frac{\sigma_{rad} \rho c A_s}{\omega m_s} \tag{11}$$

한편, 음장에서 구조물로 전달되는 경우의 결합손실계수는 식 (3)의 상반정리를 식 (11)에 대입하여 구할 수 있다.

(2) 구조물과 구조물

파동이론에 의하면 두 영역을 구분하고 있는 경계면에 입사하는 입사파와 경계면을 투과하여 다른 영역으로 전달되는 투과파가 지니는 에너지의 비 즉, 투과계수 τ 는 다음과 같이 정의된다.

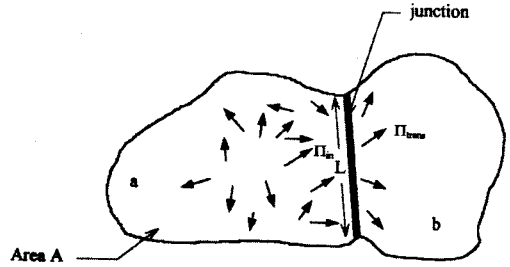


그림 5 구조물 경계에서의 파워전달

$$\tau = \frac{\Pi_{trans.}}{\Pi_{in.}} \tag{12}$$

여기에서 $\Pi_{in.}$ 과 $\Pi_{trans.}$ 는 각각 입사파와 투과파가 지니는 파워를 나타낸다.

이제 그림 5에서 평판 a는 확산진동장 형태의 진동을 하고 있고 이웃한 평판 b와 이루는 경계선의 길이를 L이라고 하면, 평판 a에서 경계선에 입사하는 파동의 단위시간당 입사횟수 ν 는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.⁽⁶⁾

$$\nu = \frac{c_{ga} L}{\pi A_a} \tag{13}$$

단, c_{ga} 와 A_a 는 평판 a의 에너지 전파속도와 면적을 나타낸다. 따라서, 식 (12)로부터

$$\Pi_{trans.} = \tau \nu E_a = \omega \eta_{ab} E_a$$

마지막 관계식은 결합손실계수의 정의를 이용한 결과로서 이로부터 결합손실계수는 다음과 같이 얻는다.

$$\eta_{ab} = \frac{\tau c_{ga} L}{\pi \omega A_a} \tag{14}$$

이상 음장과 구조물, 구조물과 구조물의 결합손실계수 추정방법을 살펴보았다. 그러나, 식

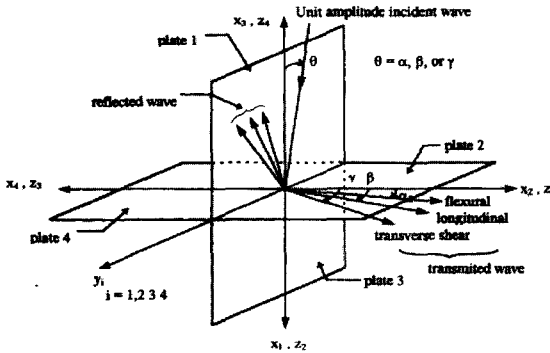


그림 6 '연결부'에서의 투과계수 해석모델

(11)과 (14)로 표현된 최종 결과 식에는 방사효율과 투과계수를 포함하고 있어 이들 계수를 구하기 위해 또 다른 계산을 수행하여야 함을 알 수 있다. 사실상 이들 계수는 구조물의 특성에 따라 결정되는 계수로서 매우 복잡한 계산을 거쳐야 얻을 수 있는 경우가 많다. 예로서 그림 6에는 구조물의 '연결부'에 파동이 입사할 때 투과계수를 얻기 위한 해석모델의 예를 보였는데 연결부에서 반사와 투과현상이 일어나며 새로운 파동이 발생하는 등 매우 복잡한 현상이 일어나고 있다는 사실을 짐작할 수 있다.⁽⁷⁾

4. 맺음 말

지금까지 통계적에너지해석법의 개념과 SEA 파라미터의 산정에 대하여 살펴보았다. SEA는 적용 주파수 범위가 유한요소법 등 전통적인 방법으로는 실용성이 떨어지는 고차모드 해석에 유용한 관계로 구조물의 소음해석 문제에 많이 활용되어 왔다. 과거에는 선박구조 등 비교적 제한된 분야에서 활용되었으나 최근에는 자동차, 철도차량, 파이핑 시스템, 펌프, 건축구조물 등 거의 모든 공학분야의 소음 및 고주파수 진동문제에 응용되는 등 그 영역을 지속적으로 넓혀가고 있다.

그러나, 아직까지 어떤 문제에 SEA를 적용하는 데에 있어서 어려운 점은 입력파워와 결합손

실계수 등 SEA파라미터의 산정에 있다. 따라서, 앞으로 이 분야의 연구가 이루어져야 할 필요가 있다.

참고문헌

- (1) Richard H. Lyon, Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems : Theory and Applications, The MIT Press, 1975.
- (2) Robert J. M. Craik, "Sound Transmission through Buildings using SEA", Proc. of the IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis, Kluwer Academic Pub., 1999.
- (3) ISO 3746, "Acoustics - Determination of Sound Power Levels of Noise Sources - Survey Method".
- (4) ISO/CD 20283-3, "Mechanical Vibration - Vibratory Noise Measurements of Shipboard Equipment", March, 2004.
- (5) M. Cremer, M. Heckl, Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, 1988.
- (6) P. W. Smith Jr., R. H. Lyon, Sound and Structural Vibration, NASA CR-160, Bolt Beranek and Newman, Inc.
- (7) "고체음 차단을 위한 구조최적화 기술 개발", 한국기계연구원, UCN040-223.M, 1995.