

# 모드 국부화와 응답 국부화의 비교연구

## Comparison Study on Mode and Response Localizations

하 동 진\* · 유 흥 희†

Dong Jin Ha and Hong Hee Yoo

(2003년 12월 16일 접수 : 2004년 6월 1일 심사완료)

**Key Words** : Mode Localization (모드국부화), Response Localization(응답국부화), Repeated Structures (반복구조물), Magnification Factor (확대계수), Mode Localization Factor (모드국부화계수)

### ABSTRACT

Vibration localization characteristics of mistuned repeated structures are investigated. The mistuning often creates significant response discrepancies among subcomponents of a repeated structure. As the result of the discrepancies, critical fatigue often occurs in a repeated structure. Therefore, it is of great importance to predict the vibration response of the mistuned repeated structures accurately. In this paper, a simplified model is employed and dimensionless parameters that influence the localization characteristics are identified. Through parameter study, two localization phenomena are investigated and compared.

### 1. 서론

국부화 현상은 고체물리 분야에서 Anderson<sup>(1)</sup>이 처음 발견하였고, 기계공학 분야<sup>(2)</sup>에도 1960년대초에 이르러 처음으로 그 개념이 진동학 분야에 국부화라는 내용으로 소개되기 시작하였다.

일상에서 쉽게 찾을 수 있는 Fig. 1과 같은 MEMS 구조물이나 터빈, 그 밖에 헬리콥터 블레이드, 교량, 그리고 항공기 구조연결에 사용되는 리벳 시스템 등 주기적 반복 형상을 갖는 구조물들은 그 결합이나 마모 등의 이유로 작은 물성치의 차이가 발생할 수 있는데, 이로 인하여 특정구조물에 과대응답이 나타나거나 심지어 파괴가 되는 현상까지 야기되는데 이처럼 구조물의 물성치 상의 작은 차이가 예기치 않은 큰 동적 응답을 야기하는 현상을 진동 국부화라 하며, 최근까

지 이에 관한 많은 연구<sup>(3~6)</sup>가 이루어져 오고 있다.

Ewins<sup>(7)</sup>는 블레이드 시스템의 단순 모델에 대한 해석을 통해 물성치의 불균일이 동적 반응에서의 큰 차이를 야기할 수 있음을 보였고, 진동 국부화 현상이 어떤 범위에서 최대화되는 것을 밝혔다.

어느 부 구조물에서 가장 큰 변형이 발생하는가 하는 문제에 대해서는 두 가지의 서로 다른 연구 결과가 존재하는데, 하나는 부 구조물 중 물성치 차이가 가장 큰 부 구조물에서 가장 큰 변형이 발생한다는 견해이고,<sup>(8)</sup> 또 다른 하나는 일정 수준의 물성치 차이에서 큰 동적변형이 발생한다는 견해이다.<sup>(9)</sup> 전자의 견해는 그러나 동일 가진 주파수에 대한 동적 응답결과를 보여주는 것이라는 점에서 한계를 갖는다고 할 수 있다. 또한 Pierre<sup>(10, 11)</sup>는 인위적인 물성치의 조작으로 구조물의 동적응답의 최소화가 가능함을 밝혀냈다. 이와 아울러 얼마나 큰 동적응답이 발생할 수 있는가에 대해서도 특이섭동법 (singular perturbation method)<sup>(12)</sup>과 축약차수모델링(reduced order modeling)<sup>(13, 11)</sup> 방법을 이용한 연구가 진행되었으며 최근에는 진동시스템의 주파수응답을 관찰함으로써 반복구조물의 진

† 책임저자 : 정희원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr  
Tel : (02)2290-0446, Fax : (02)2293-5070  
\* 정희원, 한양대학교 대학원 기계설계학과

동특성과 진동 국부화 현상이 가장 현저하게 나타날 조건을 찾아내는 연구<sup>(15)</sup>도 진행되었다.

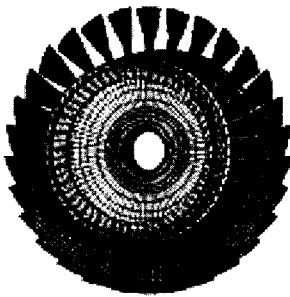
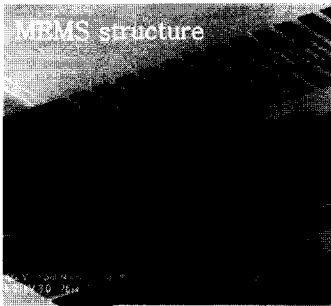
진동 국부화 현상을 규명하기 위한 연구에서는 전통적으로 모드를 관찰하는 방법과 주파수응답을 관찰하는 방법이 많이 쓰여왔다. 모드를 관찰하는 방법을 채용한 연구의 경우는 모드 국부화 현상 자체를 관찰하는 것에 그 의미나 연구목적이 있는 것이 대부분이고, 직접 모드를 관찰하여 국부화 정도를 수치화하여 그 최대 국부화 조건을 찾는 경우는 없었다. 상식적으로 동일한 현상에 대한 연구이기에 모드 국부화를

이용한 접근과 응답의 국부화를 이용한 접근으로 얻은 결과가 서로 어느 정도 일치해야 한다. 따라서, 본 논문에서는 같은 단순화된 진자 모델에 대한 반복 구조물의 응답 국부화와 모드 국부화의 진동 특성이나 최대 국부화 조건을 관찰하여 두 국부화 방법론을 서로 비교, 분석하는 데에 그 연구의 목적을 두고 있다.

## 2. 운동방정식

본 논문에서는 반복구조물의 응답국부화에 의한 최대국부화 조건과 모드국부화에 의한 최대국부화 조건을 서로 비교하기 위하여, Fig. 2와 같은 이상화 과정을 통하여 일반적인 반복 구조물을 다중 진자계로 단순화하여 표현하였다.

단순화된 진자계의 각 부 구조물들의 강성은 각각 굽힘방향 강성 성분인  $k_r$  과 각 구조물간의 연성에 의한 상호 운동의 영향을 나타내는 연성 스프링,  $k_t$  를 통해 그 특성을 대표하였으며, 가공오차나 마모,



Turbine blade assembly

Fig. 1 Repeated structures

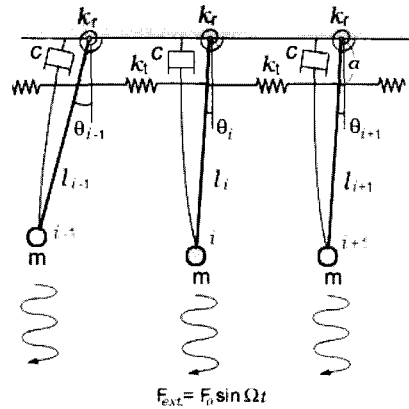


Fig. 3 Idealized repeated multi pendulum

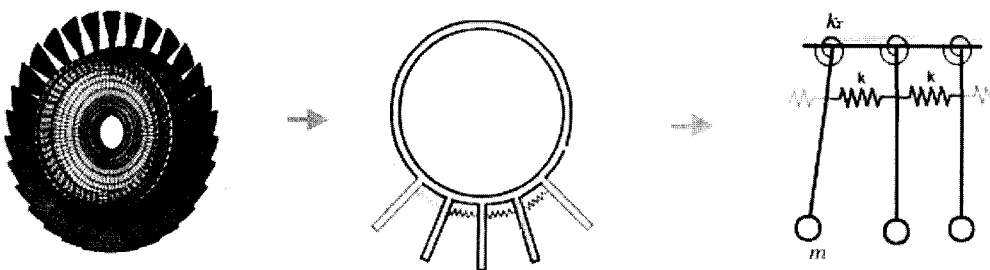


Fig. 2 Idealization of repeated structures

결합 등에 의한 각 부 구조물간의 차이는 진자의 길이 차이로 모델링 하였다. 또한 부 구조물들은 같은 외부 가진력을 받으며 감쇠의 영향을 받는다고 가정하였다.

감쇠기는 해석상의 편이를 위해 비례감쇠를 가정하였고, 그에 맞도록 감쇠기의 위치를 선택하였다.

Fig. 3의 다중 진자계의 운동방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_1^l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2^l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1^l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2^l & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} k_r + 2k_r a^2 & -k_r a^2 & \dots & -k_r a^2 \\ -k_r a^2 & k_r + 2k_r a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_r a^2 & 0 & \dots & k_r + 2k_r a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot F_0 \sin \Omega t \\ l_2 \cdot F_0 \sin \Omega t \\ \vdots \\ l_n \cdot F_0 \sin \Omega t \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

운동방정식을 무차원화 하기 위해서 다음과 같은 무차원 매개변수들과 변수를 도입한다.

$$\alpha_i = \frac{l_i}{l} \quad \beta = \frac{k_r a^2}{k_r} \quad \gamma = \frac{Tc}{m} \quad (2)$$

$$\tau = \frac{t}{T} \quad \omega = \Omega T \quad f = \frac{lF_0}{k_r} \quad (3)$$

여기서  $l$ 은 기준이 되는 길이로서 임의의 값을 사용할 수 있으나, 수치해석 시는 첫번째 진자의 길이를 그 값으로 사용하였다. 또한, 무차원화를 위하여  $T$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$T = \sqrt{\frac{ml^2}{k_r}} \quad (4)$$

식 (2)에서  $a_i$ 는 부 구조물의 물성치 차이를,  $\beta$ 는 부 구조물간 연성정도를, 그리고  $\gamma$ 는 감쇠 정도를 나타내는 매개변수이다.

이 매개변수 및 변수로 식 (1)을 변환하여 얻어진 무차원 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \alpha_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & \dots & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta & 0 & \dots & 1+2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 f \sin \omega \tau \\ \alpha_2 f \sin \omega \tau \\ \vdots \\ \alpha_n f \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 2.1 응답국부화

최대 응답 국부화 조건은 식 (5)에 주어진 무차원 방정식의 정상상태 동적응답을 구함으로써 구할 수 있는데 정상상태의 동적 응답은 다음의 형태로 주어진다.

$$\theta_i = a_i \cos \omega \tau + b_i \sin \omega \tau \quad (6)$$

이 식을 식 (5)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{a} + \omega \mathbf{C} \mathbf{b} = \mathbf{0} \\
 & (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{b} - \omega \mathbf{C} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (7)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n^2 \end{bmatrix} & \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \gamma \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma \alpha_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \alpha_n^2 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1+2\beta & -\beta & \dots & -\beta \\ -\beta & 1+2\beta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\beta & 0 & \dots & 1+2\beta \end{bmatrix} \quad (8)
 \end{aligned}$$

또한  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 는  $a_i$ 와  $b_i$ 로 이루어진 벡터이다. 이때 무차원 운동방정식의 정상상태 동적응답의 크기를 나타내기 위한 확대계수(magnification factor)와 그 최대값을 다음과 같이 정의하였다.

$$\kappa_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} / f \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

$$\kappa_{\max} = \text{Maximum}(\kappa_{i,\max}) \quad (10)$$

### 2.2 모드국부화

최대 모드국부화 조건을 찾기 위하여 무차원 방정식상의 질량행렬과 강성행렬을 통해 얻어진 모드벡터를 다음과 같이 기술한다.

$$\{v\}_i^T = \{v_{i1} \ v_{i2} \ v_{i3} \ \dots \ v_{in}\} \quad (11)$$

여기 주어진 모드벡터는  $i$ 번째 고유진동수에 해당하는 모드벡터를 의미한다. 또한, 각 모드벡터 성분의 국부화 정도를 나타내기 위하여 모드국부화계수(mode localization factor)들을 다음과 같이 정의하였다.

$$\psi_{ij} = \frac{v_{ij}^2}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{ik}^2}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

$\psi_{ij}$ 는  $i$ 번째 고유진동수에 해당하는 모드벡터 성분 중,  $j$ 번째 성분이 다른 성분에 비해 얼마나 국부화되어 있는가를 나타낸다.

### 2.3 모드벡터를 이용한 해석적 해

비례감쇠를 갖는 진자계의 정상상태응답의 해석적 해를 모드벡터를 이용해 나타내면 다음과 같다.

$$\{\theta\} = \sum_{i=1}^n \{v\}_i \{v\}_i^T \{\Gamma\}_i \quad (13)$$

여기서

$$\{\Gamma\}_i = \int_0^t \frac{1}{\omega_{id}} e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin \omega_{id} (t-\tau) \{Q(\tau)\} d\tau \quad (14)$$

여기서  $\omega_{id} = \omega_i \sqrt{1-\zeta_i^2}$  이고  $w_i$ 와  $\zeta_i$ 는  $i$ 번째 고유진동수와 감쇠 비를 나타내며 는 식 (5)의 우변 항을 나타낸다.

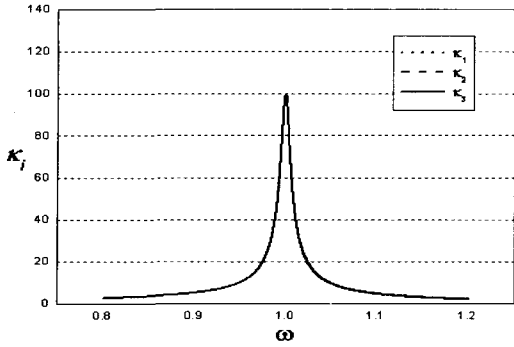
### 3. 수치해석 결과 및 고찰

2장에 유도된 무차원 운동방정식과 계수들을 이용하여 반복구조물의 응답국부화 및 모드국부화 특성을 비교하기 위해 3개의 연성된 진자로 이루어진 시스템을 대상으로 수치해석을 수행하였다.

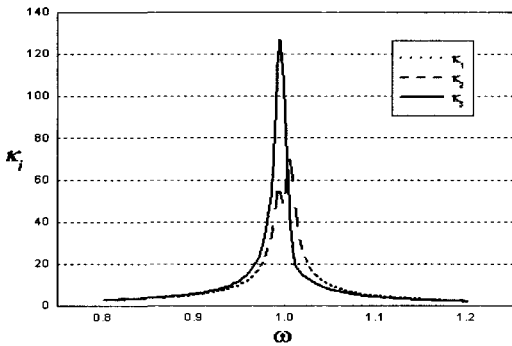
Fig. 4은 응답국부화를 관찰한 경우, 구조물에서 물성치 차이가 진동 국부화 특성에 미치는 영향을 알아보기 위하여  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 로 고정하고  $\alpha_3$ 만 변화시키며 수치 해석을 수행하여 얻은 결과이다. 진자 간 물성치 차이가 거의 없는 Fig. 4(a)의 경우 동적응답 역시 특별한 차이가 없으나 그 차이가 1 %에 이르는 Fig. 4(b)의 경우는  $\kappa_1$ 과  $\kappa_2$  같은 값을 나타내지만  $\kappa_3$ 과의 차이가 커진 것을 확인할 수 있다. 이는 각 진자들의 동적 응답 차이가 현격하게 발생하는 것이 의미한다. 그러나 물성치 차이가 5 %에 이르면 Fig. 4(c)에서 보는 바같이  $\kappa_1$ 과  $\kappa_2$ 는 역시 같은 값을 나타내지만  $\kappa_3$ 과의 차이가 작아진 것을 알 수 있다. 이는 진동 국부화가 다시 감소하고 있는 것을 의미하며 이로부터 응답 국부화는 물성치 차이가 특정 범위 내에서 있을 때에 현격히 발생하고 또한 특정 값에서 최대값에 이른다는 사실을 알 수 있게 한다.

Fig. 5는  $\beta = 0.005$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ 로 고정하고  $\alpha_3$ 만을 변화시켰을 때에 최대 동적응답의 변화를 전체적으로 보여주며, 이를 통해 앞서 유추한 응답국부화의 최대치가 물성치 차이가 1 % 부근에서 나타나는 것을 확인할 수 있게 해준다. 이로부터 본 논문의 연구 결과인 응답국부화의 특성은 이전 연구 결과들과 일치함을 보여준다.

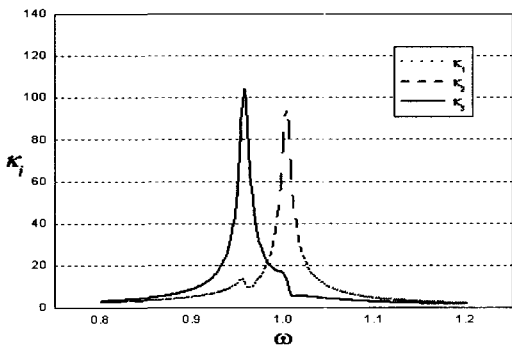
Table 1은 최대 응답국부화 조건을 수치해석을 통해 얻어낸 결과를 나타낸 것이다. 여기서도, 연성 매개변수는  $\beta = 0.005$ 가 사용되었고, 감쇠 매개변수는  $\gamma = 0.01$ 가 사용되었으며 이는 tuned system의 동적 응답을 100이 되게 하므로 표에 나온 값들이 의미하는 국부화 정도를 파악할 수 있다. 도표로부터 알 수 있는 사실은 부 구조물의 수가 늘어남에 따라 최대 응답의 크기도 커진다는 점이다. 그러나 그 증가는 감소를 하는 것을 관찰할 수 있다. 또한 최대 응답 국부화를 위한 조건이 부 구조물의 물성치 차이가 1 % 근처라는 사실도 알 수 있다.



(a)  $\alpha_3 = 1.001, \beta = 0.005, \gamma = 0.01$



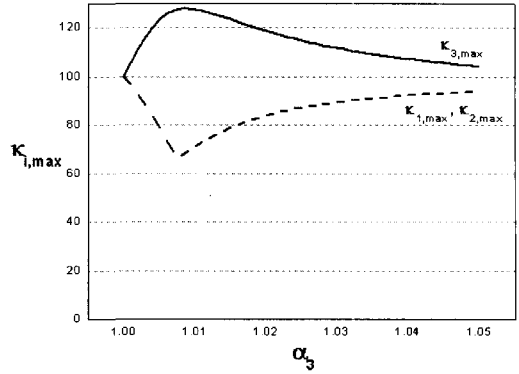
(b)  $\alpha_3 = 1.01, \beta = 0.005, \gamma = 0.01$



(c)  $\alpha_3 = 1.05, \beta = 0.005, \gamma = 0.01$

**Fig. 4** Magnification factor variations

Fig. 6은  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \beta = 0.005, \gamma = 0.01$ 으로 고정하고  $\alpha_3$ 만을 변화시켰을 때 시스템의 첫번째 고유진동수를 대상으로, 앞서 정의한 모드국부화 계수를 살펴본 결과이다. 이 결과로부터 모드국부화는 물성치 변화에 따라 국부화 현상이 발생하는 것은 관찰할 수 있지만, 모드벡터상의 국부화는 물성치의 변화가



**Fig. 5** Comparison of maximum magnification factors

**Table 1** Maximum magnification factors versus the corresponding values and the number of pendulums

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$
	$K_{1,max}$	$K_{2,max}$	$K_{3,max}$	$K_{4,max}$	$K_{5,max}$
$n=2$ ( $\beta=0.005$ )	1.000 62.14	1.012 118.4			
$n=3$ ( $\beta=0.005$ )	1.000 69.24	1.000 69.24	1.009 128.9		
$n=4$ ( $\beta=0.005$ )	1.000 65.95	1.000 92.97	1.001 70.96	1.009 132.9	
$n=5$ ( $\beta=0.005$ )	1.000 85.19	1.000 85.19	1.004 78.44	1.011 134.5	1.004 78.44

(fixed  $\beta = 0.005, \gamma = 0.01$ )

크면 클수록 그 정도가 심해진다는 것을 확인할 수 있게 한다. 이 결과는 모드를 관찰함으로써 응답국부화 정도를 예측하는 것이 부적절할 수 있다는 것을 의미한다. 이러한 사실을 확인하기 위하여 Fig. 7과 Fig. 8을 통하여 응답국부화를 통해 얻은 최대국부화 조건과 Fig. 4(c)에서 볼 수 있듯 국부화가 일어나지 않는 조건에서 모드벡터를 직접적으로 나열하여 보았다. 그 결과, 앞에서 밝혀진 바와 같이 응답국부화가 최대로 일어났던  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.009$  조건에서는 모드국부화 현상 역시 나타났다. 그러나, 응답국부화가 거의 일어나지 않았던 조건인  $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_3 = 1.05$ 에서는 모드국부화가 일어난다는 사실을 확인할 수 있었다.

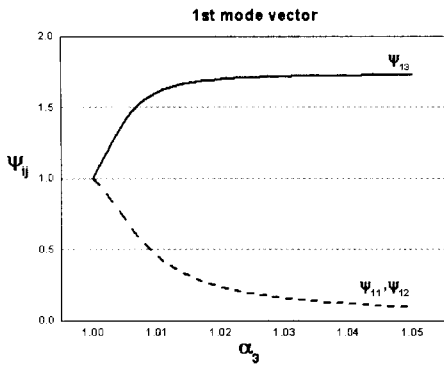


Fig. 6 Comparison of mode localization factor variations

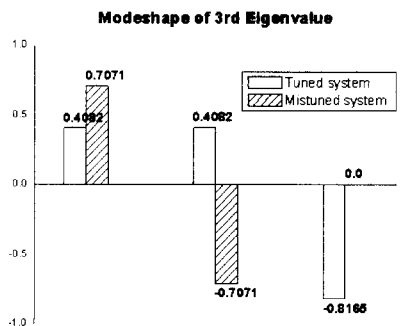
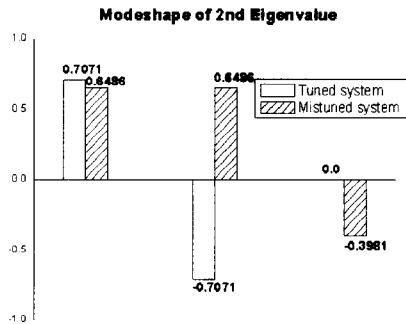
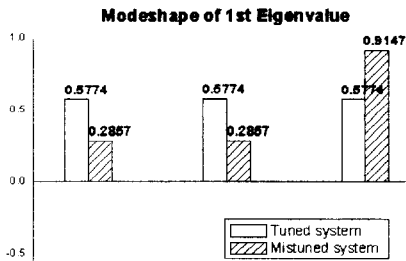


Fig. 7 Mode shapes with maximum response localization condition

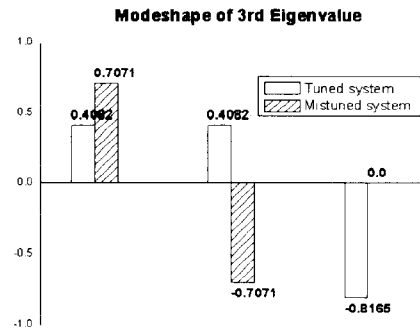
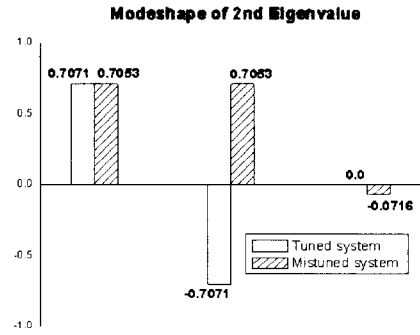
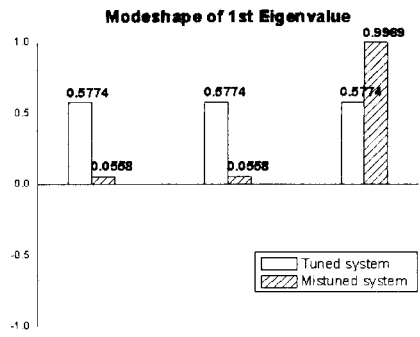


Fig. 8 Mode shapes with following condition

마지막으로 2.3절에서 제시하였던 단순화된 진자시 시스템의 정상상태 응답의 해석적 해를 살펴보면, 응답 함수  $\theta$ 가 모드벡터의 선형적 함수로 나타나지만 모드 국부화가 응답의 국부화로는 연결될 수 없음을 알 수 있다. 다시 말해서 어떤 조건에서 모드국부화가 일어나더라도 그 조건이 응답국부화 현상이 일어날 것인지 판단하는 기준이 되기에는 부적절한 것임을 의미한다. 실제 구조물의 피로는 응답국부화에 의해 결정된다는 점을 고려한다면 모드국부화의 조건을 찾아낸다 하더라도 그것을 피로설계 시에 피해야 할 조건으로 단정할 수는 없다는 의미이기도 하다.

#### 4. 결 론

본 연구는 반복 구조물의 진동 국부화 현상을 규명하기 위한 두 가지 국부화 해석 방법인 모드 국부화와 응답 국부화를 서로 비교하기 위해 간단한 진자 계를 대상으로 운동방정식을 유도하고 주요 매개 변수들을 추출한 후, 이들을 변화시키며 각 방법론에 의한 국부화 정도를 수치해석을 통해 조사 비교하였다. 그 결과 응답국부화의 경우에는 최대 국부화 조건이 일정한 물성 치 차에서 나타나는 것을 보임으로써 앞서 진행되어왔던 연구의 결과와도 일치함을 알 수 있었으나 모드국부화의 경우는 물성 치 차가 클수록 국부화 현상이 심화되는 것을 확인 할 수 있었다. 따라서 최대 응답 국부화 조건에서는 모드국부화가 발생하나 최대 모드 국부화 조건에서는 응답국부화가 발생하지 않는다는 사실을 확인할 수 있었다. 이는 반복구조물의 모드 국부화 조건을 피로설계 등을 위한 기준으로 사용하는 것이 적절치 않다는 것을 의미한다.

#### 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Anderson, P.W., 1958. "Absence of Diffusion in Certain Random Lattices," *Physical Review*, Vol. 109, No. 5, pp. 1492~1505

(2) Whitehead, D. S., 1966. "Effect of Mistuning on the Vibration of Turbomachine Blades Induced by Wakes," *Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol. 81, pp. 15~21.

(3) Ewins, E. J., 1970. "A Study of Resonance Coincidence in Bladed Disks," *Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol. 12, pp. 305~312.

(4) Pierre, C. and Dowell, E. H., 1987. "Localization of Vibrations by Structural Irregularity," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, pp. 549~564.

(5) Ewins, D. J., 1973. "Vibration Characteristics of Bladed Disk Assemblies," *Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol. 15, pp. 165~186.

(6) El-Bayuomy, L. E. and Srinivasan, A. V., 1975. "Influence of Mistuning on Rotor Blade Vibrations," *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, Vol. 13, pp. 460~464.

(7) Ewins, D. J., 1969. "The effect of Detuning upon the Forced Vibrations of Bladed Disks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 9, pp. 65~79.

(8) Afolabi, 1985. "The Frequency Response of Mistuned Bladed Disk Assemblies," *Vibration of Blades and Bladed Disk Assemblies*. ASME.

(9) Griffin, J. H. and Hoosac, T. M., 1984. "Model Development and Statistical Investigation of Turbine Blade Mistuning," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* Vol. 106, pp. 204~210.

(10) Wei, S. T. and Pierre, C., 1988. "Localization Phenomena in Mistuned Assemblies with Cyclic Symmetry [Part I] Free Vibrations, [Part II] Forced Vibrations," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*. Vol. 110, pp. 429~449.

(11) Castanier, P. and Pierre, C., 1997. "Consideration on the Benefits of Intentional Blade Mistuning for the Forced Response of Turbomachinery Rotors," *Analysis and Design Issues for Modern Aerospace Vehicles*. Vol. 55, pp. 419~425.

(12) Happawana, G. S., Nwokah, O. D. I., Bajaj, A. K. and Azene, M., 1998. "Free and Forced Response of Mistuned Linear Cyclic Systems: a Singular Perturbation Approach," *Journal*

of Sound and Vibration. Vol. 211, pp. 761~789.

(13) Castanier, P. and Pierre, C., 1997. "A Reduced Order Modeling Technique for Mistuned Bladed Disks," Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 119, pp. 439~447.

(14) Bladh, R., Castanier, P. and Pierre, C. 1998. "Reduced Order Modeling and Vibration Analysis of Mistuned Bladed Disk Assemblies with Shrouds," in Proceedings of the 43rd ASME

Gas Turbine and Aeroengine Technical Congress, Stockholm, Sweden, June 1998.

(15) Kim, J. Y. and Yoo, H. H., 2001. "Dynamic Response Localization of Simple Periodic Structures Undertaking External Harmonic Forces," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 11, No. 6, pp. 175~180.