

## 차체구조의 구조기인 내구 설계

김 효 식\* · 임 흥 재

국민대학교 자동차공학 전문대학원

## Structure Borne Durability Design of a Vehicle Body Structure

Hyosig Kim\* · Hongjae Yim

Graduate School of Automotive Engineering, Kookmin University, Seoul 136-702, Korea  
(Received 19 February 2004 / Accepted 9 April 2004)

**Abstract** : This paper presents an optimal design method for structure-borne durability of a vehicle body structure. Structure-borne durability design requires a new design that can increase fatigue lives of critical areas in a structure and must prohibit transition phenomenon of critical areas that results from modification of the structure at the same time. Therefore, the optimization problem for structure-borne durability design are consists of an objective function and design constraints of 2 types; type 1-constraint that increases fatigue lives of the critical areas to the required design limits and type 2-constraint that prohibits transition phenomenon of critical areas. The durability design problem is generally dynamic because a designer must consider the dynamic behavior such as fatigue analyses according to the structure modification during the optimal design process. This design scheme, however, requires such high computational cost that the design method cannot be applicable. For the purpose of efficiency of the durability design, we presents a method which carry out the equivalent static design problem instead of the dynamic one. In the proposed method, dynamic design constraints for fatigue life, are replaced to the equivalent static design constraints for stress/strain coefficients. The equivalent static design constraints are computed from static or eigen-value analyses. We carry out an optimal design for structure-borne durability of the newly developed bus and verify the effectiveness of the proposed method by examination of the result.

**Key words** : Computer aided engineering (전산원용공학), Structure-borne durability design (구조기인 내구설계), Transition phenomenon of critical area (취약부 전이현상), Stress/strain coefficient(응력/변형률 계수), Static design constraint(정적설계구속)

### 1. 서 론

차량의 개발과정 중에서 설계비용은 제품원가의 10% 정도에 불과하지만 설계단계에서 전체비용의 90%를 결정한다는 것은 잘 알려진 사실이다. 주지 하듯이 개발기간의 단축, 개발비용의 절감 등의 요구를 고려하면서 인건비의 상승, 시장 확보의 어려

움 등을 감안할 때 설계단계에서 차량 성능에 대한 sign-off를 기할 수 있는 고도화된 설계가 21세기의 새로운 설계 패러다임이라고 할 수 있다. 개발되는 차량의 내구력을 설계목표까지 증대하고자 할 때, CAE(Computer Aided Engineering), 즉 전산원용공학을 이용한 내구 설계는 매우 효과적인 정보를 설계자에게 제공하고 있다.<sup>1-4)</sup>

차체구조와 같은 거대 구조물 내에 발생하는 내구문제는 국소부위의 결함 때문에 발생하는 국소

\*To whom correspondence should be addressed.  
hskim001@kookmin.ac.kr

형상 기인내구와 구조적 결합 때문에 발생하는 구조기인 내구로 분류할 수 있다. 따라서 차체구조의 내구설계는 구조기인 내구문제 및 국소형상기인 내구문제에 대한 설계로 분류된다. 차량을 개발하는 과정중 실차 평가단계에서 차체구조에 내구문제가 발생하면 먼저 그 내구문제가 구조적 보안을 요구하는 구조기인 내구문제인지 국소적 보장을 요구하는 국소형상기인 내구문제인지를 검토해야 한다. 왜냐하면 구조기인 내구문제의 경우에 내구 취약부를 국소적으로만 보강하면 내구 취약부는 일종의 압력처럼 인접한 타 취약부로 전이되는 취약부 전이 현상(Transition phenomenon of critical area)이 발생한다. 일단 취약부 전이현상이 발생하면 구조적인 설계보안이 적용되지 않는 한, 내구문제를 근본적으로 해결하기 어렵게 된다. 더욱이 평가단계에서 구조적인 설계변경을 적용하려고 할지라도 Layout 조정, 조립공법 변경, 급형 수정 등의 많은 문제로 인하여 구조적 설계변경 자체가 어렵게 되어 결국 내구문제를 해결하는 데, 많은 시간 및 비용이 요구된다. 따라서 차량 개발 과정중 설계단계에서는 무엇보다도 구조기인 내구문제의 발생 유무에 대한 예측 및 그에 대한 최적설계를 수행하는 것이 필요하다.

내구설계는 최적화 과정중 설계변수의 변화에 따른 구조물의 거동을 고려하는 방법에 따라서 정적 내구설계와 동적 내구설계로 구분해 볼 수 있다.<sup>5)</sup> 일반적으로 내구설계는 피로수명을 최대화하거나 피로수명 제한조건을 만족하도록 해서 구조물의 피로수명을 증대하는 동적 내구설계이다. 그런데 동적 내구설계는 최적화 과정중 설계변수의 변화에 따라서 구조물의 동적거동을 고려해야 하므로 최적설계의 효율성이 저하된다. 반면 정적 내구설계는 이러한 동적 내구설계의 문제점을 개선할 수 있는 방법으로서 최적화 과정중 설계변수의 변화에 따라서 구조물의 정적해석 또는 고유치 해석만이 단순히 수행되어 최적설계의 효율성이 증대된다.

정적 내구설계의 주요한 연구를 알아보면 다음과 같다. 공창덕 등<sup>6)</sup>은 복합재 풍력 터빈 블레이드의 구조설계를 수행하면서 Spera의 실험식<sup>7)</sup>을 이용하여 피로수명을 만족하는 허용응력을 계산하고 블레

이드 구조의 형상을 결정하였다. Hiragawa 등<sup>8)</sup>은 신간선 고속철도 차축의 피로설계를 수행하면서 일본 및 유럽의 차축의 굽힘응력에 대한 허용응력을 비교하고 응력집중부위의 필렛(fillet) 곡률(curvature)을 결정하였다. Koh 등<sup>9)</sup>은 압력용기의 피로설계를 수행하면서 응력집중이 발생하는 용접연결부의 최대응력을 감소시켜서 피로수명을 증대하는 설계안을 도출하였다. Uys 등<sup>10)</sup>은 호이스트 구조물의 수평 프레임에 대한 단명형상 최적설계를 수행하면서 IIW(international institute of welding)의 요구조건을 만족하는 피로응력 구속조건을 도출하고 프레임의 단명형상을 결정하였다.

반면 동적 내구설계에 대한 주요한 연구는 다음과 같다. Agrawal 등<sup>11)</sup>은 자동차 속타워(shock tower)의 내구설계를 수행하면서 속타워의 피로수명에 대한 반응표면모델(Response Surface Model)을 만들고 확률론적 강건설계를 수행하여 피로수명을 증대하였다. Schnack 등<sup>12)</sup>은 인장하중하의 노치를 갖는 바에 대한 형상 최적설계를 수행하면서 최대 분미세스(von Mises) 등가응력, 등가 손상응력 및 상수 하중 Cycle에 대한 피로손상 등의 비용함수(cost function)를 각각 최소화하고 비용함수에 따른 응력 진폭과 수명의 관계선도를 이용해서 최적화 결과를 비교하였다. Zeiler 등<sup>13)</sup>은 9자유도의 단순 차량모형을 이용해서 구조물의 동적응답을 고려한 피로성능 인자(fatigue performance index)의 설계민감도를 계산하였다. Martikka 등<sup>14)</sup>은 기차 프레임의 단명형상 최적설계를 수행하면서 단순한 공진하중에 대한 구조물의 동적응답을 구하고 목표피로수명과의 차(diffenence)로 정의되는 목적함수를 최소화하는 최적설계를 수행하였다. Hsu 등<sup>15)</sup>은 알루미늄 디스크 휠의 최적설계를 수행하면서 동적 코너링 피로시험 조건하에서 알루미늄 휠디스크의 피로수명 제한조건을 가지고 무게 감소를 위한 통기공(vent hole)의 위치 및 사양을 결정하였다.

주요한 연구에서 보는 바와 같이 정적 내구설계는 구조물의 허용응력(allowable stress)이 알려져 있는 경우 주로 적용되고 동적 내구설계는 하중의 형태 및 종류가 단순한 경우 주로 적용되어 왔다. 최근까지의 내구설계에 관한 연구를 검토해 보면 차체

구조와 같은 거대 구조에 대해 실제 시험조건 또는 실사용 조건하에서 내구설계를 원활히 수행할 수 있는 설계방법은 제시되지 못하고 있다.

본 연구에서는 차체구조의 구조기인 내구문제에 대한 설계방법을 다음과 같이 제안한다. 제안된 방법은 차체구조의 무게를 최소화하는 목적함수와 주요 취약부위의 피로수명을 설계 허용치 이상으로 증대하는 Type 1 구속조건과 취약부 전이현상을 방지하는 Type 2 구속조건으로 구성된다. 구조기인 내구설계를 효과적으로 수행하기 위해서는 설계변수의 변화에 따른 구조물의 동적거동에 대한 정보를 효율적으로 계산해야 한다. 이를 위하여 차체구조의 동적 내구설계문제를 단순한 등가의 정적 내구설계문제로 변경하여 수행하는 방법을 제안한다. 제안된 방법에서 피로수명에 대한 Type 1 및 Type 2 구속조건은 정적 및 고유치 해석에 대한 등가의 Type 1 및 Type 2의 구속조건으로 각각 변경된다. 또한, 차체구조의 구조적 설계변수의 선정과 모델링 방법이 제안된다. 설계목표 내구력을 만족하는 차체구조의 최적사양은 내구해석 cycle과 내구설계 cycle이 연계되어 수행되는 전산 통합해석 과정중에 도출된다. 제안된 방법의 유효성은 벨지안 가속 내구 시험조건하에서 개발되는 도시형 버스 차체구조의 내구력 확보에 적용하고 그 결과를 검토하여 검증하고자 한다.

## 2. 본 론

### 2.1 절 전산 통합 해법

제안된 통합해법은 Fig. 1에서 보는 바와 같이 좌측의 내구해석 cycle과 우측의 내구설계 cycle로 구성된 ∞형태로 수행된다.

내구평가cycle은 제시된 설계사양에 대해서 차량 동역학 해석, 동용력 해석 및 피로수명 예측의 순서로 수행되며 설계과정중 내구평가는 벨지안모드와 같은 내구시험 조건으로 수행되어 내구설계cycle로부터 주어진 차체구조 사양의 내구력을 예측한다. 내구설계 cycle은 내구해석cycle로부터 하중경로 및 취약부위에 대한 정보를 입력 받아서 주요 취약부와 그에 대한 주요 하중경로를 구한다. 그리고 피로수명 설계목표를 만족하는 주요 하중경로에 대한 주요취약부의 응력 또는 변형률 계수에 대한 허용값을 구한 후, 구속조건으로 사용한다. 이어서 민감도해석 및 최적설계를 수행하여 새로운 차체구조의 사양을 도출하고 차체구조의 사양에 대해서 내구해석cycle을 수행하여 내구력을 확인한다.

### 2.2 절 내구 해석(Durability analysis)

내구해석을 위한 차량 동역학 해석방법에는 구조 동역학 해석방법<sup>16)</sup>과 다물체 동역학 해석방법<sup>17)</sup>이 있다. 그런데 차량과 같이 차체구조와 함께 여러 가

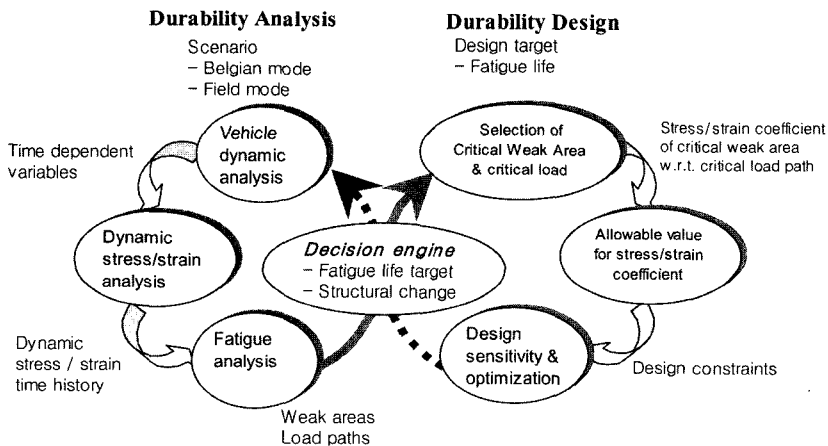


Fig. 1 Procedure of the computer-integrated method for durability

지의 부품이 조인트와 부쉬류, 감쇠기 및 스프링 등의 힘요소들로 구성된 다물체계의 경우, 구조 동역학 해석방법은 연산비용 즉 연산시간 및 하드웨어의 사양측면에서 비효율적이어서 장시간의 동역학 해석이 요구되는 차체구조의 내구해석을 수행하기 어려운 방법이다.<sup>18)</sup> 따라서 1990년대 이후에는 유연 다물체 동역학 해석방법과 연계된 내구해석이 주로 사용되고 있으며 이에 관한 연구가 많이 수행되고 있다.<sup>1,4,18)</sup>

다물체 동역학 해석과 연계된 동응력 또는 동변형률 해석방법으로서 최근까지 제안된 해법들<sup>18,19)</sup>을 차체구조와 같은 거대 구조물의 피로수명 예측을 위한 동응력이력 또는 동변형률이력의 계산에 적용하기 위해서는 동응력이력 또는 동변형률이력을 정밀하게 계산하는 동시에 해석을 경제적으로 수행할 수 있는 효율적인 해법이 개발되어야 한다. 이를 위해 중첩법을 이용한 해석방법<sup>20)</sup>이 부록 1에서와 같이 제안된 바 있다.

$$\xi_i^e(x_0, y_0, z_0, t) = \sum_{m=1}^{N_t} \prod_{im}(x_0, y_0, z_0) P_m(t) \quad (1)$$

여기서  $\xi_i^e(x_0, y_0, z_0, t)$ 는 시간 t에서 위치  $x_0, y_0, z_0$ 의 절점 i에 대한 탄성 동응력 또는 동변형률 이력이다.  $\prod_{im}(x_0, y_0, z_0)$ 는 절점 i의 시간의존변수 m에 대한 형상의존함수로서 응력 또는 변형률계수이고  $p_m(t)$ 는 m번째 시간의존함수이다.

구조물의 피로균열 발생수명을 예측하는 방법으로는 하중-수명법, 응력-수명법 및 변형률-수명법등이 있다. 본 연구에서는 피로수명이 짧고 소성변형의 영역이 상대적으로 큰 경우 많이 사용되는 변형률-수명법(strain-life method)을 사용해서 차체구조내 피로균열 발생수명을 예측하고자 한다. 변형률수명법을 이용해서 피로수명을 계산하는 과정을 간략히 알아보면 다음과 같다. 먼저 차체구조내 각각의 절점에 대한 변형률이력을 계산한 후, Rainflow 계수법을 사용해서 탄성 변형률진폭( $\Delta \epsilon_i^e(x_0, y_0, z_0)/2$ )과 cycle을 계수한다. 본 연구에서는 탄성변형률이식 (1)과 같이 계산되므로 탄성변형률 진폭은 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta \epsilon_i^e(x_0, y_0, z_0)/2 = \sum_{m=1}^{N_t} \prod_{im}(x_0, y_0, z_0) \Delta p_m(t) \quad (2)$$

여기서  $\Delta$ 는 해당되는 물리량의 Rainflow 계수법을 이용해서 구한 진폭을 의미한다. 식 (2)의 탄성변형률진폭에 소성변형 효과를 고려한 수정된 국소 변형률진폭( $\Delta \epsilon_i(x_0, y_0, z_0)/2$ )과 수명( $2N_{fi}$ )의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{\Delta \epsilon_i(x_0, y_0, z_0)}{2} = \left(\frac{\sigma'_f}{E}\right)(2N_{fi})^b + \epsilon'_f(2N_{fi})^c \quad (3)$$

상기식에서  $\sigma'_f, b, \epsilon'_f$  및 c들은 재료의 피로특성치이며 E는 탄성계수이다.

### 2.3 내구 설계 (Durability design)

차체구조내 주요 취약부위의 피로수명을 설계 허용치 이상으로 증대하는 Type 1 구속조건과 취약부전이현상을 방지하는 Type 2 구속조건을 갖는 구조기인 피로수명 최적화 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Minimize } W(x) \quad (4)$$

subject to

$$\text{Type 1 : } N_j(x) - N_j^{allowable} \leq 0, j = 1, N_d$$

$$\text{Type 2 : } N_k(x) - N_k^0 \leq 0, k = 1, N_e$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u, i = 1, N_D$$

$$\text{where } x = (x_1, x_2, \dots, x_{N_d})$$

여기서 W는 목적함수이며 x는 설계변수벡터이고 NC1과 NC2는 각각 Type 1구속조건 및 Type 2구속조건이 적용되는 유한요소모델내 절점의 수이며 ND는 설계변수의 수이다.  $N_j(x)$  및  $N_k(x)$ 는 각각 설계변수벡터 x에 대한 절점 j 및 k의 피로수명이고  $N_j^{allowable}$ 는  $N_j(x)$ 에 대한 설계 허용치이며  $N_k^0$ 는  $N_k(x)$ 의 초기설계안에 대한 수명이다.

상기된 최적화 문제는 피로수명의 제한조건 및 설계변수의 제한조건을 만족하면서 목적함수의 최소화 작업을 수행하는 일반적인 동적설계문제이다. 이와 같이 최적설계를 수행할 경우 최적설계 과정에서 설계변수의 변화에 따라서 구조물의 동적거동, 즉 동변형률해석 및 변형률 진폭의 계산과 동적거동에 따른 피로수명의 계산 과정이 반복적으로 수행되어야 하므로 매우 많은 연산비용이 요구된다. 그런데 설계변수의 변화에 따라서 재료 특성치

의 변화가 없다면 피로수명은 탄성 변형률진폭에 의해서 결정되므로 피로수명을 증대하는 최적화 문제는 탄성 변형률진폭의 구속조건을 갖는 최적화 문제로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize } W(x) \tag{5}$$

subject to

$$\text{Type 1 : } \Delta \epsilon_j^e(x)/2 \leq \Delta \epsilon_j^{\text{allowable}}/2, j = 1, N_{C1}$$

$$\text{Type 2 : } \Delta \epsilon_k^e(x)/2 \leq \Delta \epsilon_k^0/2, k = 1, N_{C2}$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, i = 1, N_D$$

where  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{ND})$

여기서  $\Delta \epsilon_j^e(x)/2$  및  $\Delta \epsilon_k^e(x)/2$ 는 각각 설계변수 벡터  $x$ 에 대한 절점  $j$  및  $k$ 의 변형률진폭이고  $\epsilon_j^{\text{allowable}}/2$ 는  $\Delta \epsilon_j^e(x)/2$ 에 대한 설계 허용치이며  $\Delta \epsilon_k^0/2$ 는  $\Delta \epsilon_k^e(x)/2$ 의 초기설계안에 대한 값이다.

상기된 최적화 문제는 시간에 따른 변형률진폭의 제한조건을 만족하면서 목적함수의 최소화 작업을 수행하므로 식 (4)와 같은 방법 보다 효율적이다. 그러나 최적설계 과정에서 설계변수의 변화에 따라서 구조물의 동적거동, 즉 동변형률해석 및 변형률 진폭의 계산이 반복적으로 수행되어야 하므로 많은 연산비용이 요구된다. 그런데 변형률진폭이 식 (2)에서와 같이 시간의존함수의 진폭과 이에 대응하는 공간의존함수의 선형중첩으로 계산되고 설계변수의 변화에 따른 시간의존함수의 변화가 적어서 무시할 수 있다면 변형률진폭의 변화는 공간의존함수인 변형률 계수의 변화에 의해서 결정된다. 차체구조의 경우 부분적인 구조변경에 따른 민감도를 검토해 보면 공간의존함수가 시간의존함수보다 매우 큰 것을 알 수 있다. 따라서 식 (5)의 최적화 문제는 공간의존함수, 즉 변형률 계수의 구속조건을 갖는 최적화 문제로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize } W(x) \tag{6}$$

subject to

$$\text{Type 1 : } U_{jm}(x) - U_{jm}^{\text{allowable}} \leq 0$$

$$\text{Type 2 : } U_{jm}(x) - U_{km}^0 \leq 0$$

where  $j = 1, N_{C1}; k = 1, N_{C2}; m = 1, N_T$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, i = 1, N_D$$

where  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{ND})$

여기서  $N_T$ 은 시간의존변수의 수이며  $U_{jm}(x)$  및  $U_{km}(x)$ 은 각각 설계변수벡터  $x$ 에 대해 구해진  $m$ 번째 시간의존함수에 대한 절점  $j$  및  $k$ 의 변형률계수이다.  $U_{jm}^{\text{allowable}}$ 는 설계목표수명을 만족하는  $U_{jm}(x)$ 에 대한 변형률계수의 허용값이며  $U_{km}^0$ 은  $U_{km}(x)$ 의 초기설계안에 대한 변형률계수이다. 상기된 최적화 문제는 설계목표수명을 만족하는 변형률계수의 제한조건을 가지고 최적설계를 수행하는 정적설계문제이다. 이와 같이 최적설계를 수행할 경우 최적설계 과정에서 설계변수의 변화에 따라서 변형률계수를 계산하는 정적해석 및 고유치해석만이 반복적으로 수행되므로 식 (4) 또는 (5)의 방법대비 연산비용이 크게 절감되는 반면 최적화 사양이 설계목표수명을 만족하므로 최적설계의 효율성이 증대된다.

본 연구에서는 식 (6)에 제안된 방법을 사용해서 구조기인 내구문제에 대한 최적설계 방법을 Table 1과 같이 제안하고자하며 실 적용례를 이용해서 제안된 방법의 유효성을 검증하고자 한다.

Table 1 Optimal design algorithm for structural borne durability

**Step1. 주요 취약부(Critical weak area)의 선정**

변형률계수  $U_{im}, i = 1, N_N; m = 1, N_T$ 중 각각의 시간의존변수에 대해서 최대 변형률계수값이 발생하는 절점들을 선택하여 취약부로 정리한다. 취약부에 대한 피로수명을 계산하고 피로수명이 가장 낮은 부위  $N_C$ 개를 주요 취약부  $G_i^C, i = 1, N_C$ 로 선정한다. 이어서 주요 취약부를 피로수명을 증대할 취약부  $G_j^C, j = 1, N_{C1}$ 와 취약부 전이현상을 방지할 취약부  $G_k^C, k = 1, N_{C2}$ 로 분류하고 변형률 계수를 각각의 취약부에 대해서 다음과 같이 정리한다.

$$U_{jm}, j = 1, N_{C1} m = 1, N_T \quad \text{for } G_j^C, j = 1, N_{C1}$$

$$U_{km}, k = 1, N_{C2} m = 1, N_T \quad \text{for } G_k^C, k = 1, N_{C2}$$

where  $N_C = N_{C1} + N_{C2}$

**Step 2. 주요 하중경로(Critical load path) 계산**

취약부  $G_j^C, j = 1, N_{C1}$ 에 대한 총  $N_T$ 개의 시간의존변수의 피로수명 기여도  $N_{jm}, m = 1, N_T$ 를 다음과 같이 계산하고 기여도가 큰  $N_L$ 개의 시간의존변수를

주요 하중경로로 선정한다.

$$N_{jm} = \frac{\Delta N_{jm}}{\Delta N_j^{Max}}, \quad j = 1, N_C; m = 1, N_T$$

where  $\Delta N_{jm} = N_j^F - \hat{N}_{jm}^F$ ,

$$\Delta N_j^{Max} = \max(\Delta N_{jm}, m = 1, N_T)$$

여기서  $N_{jm}$ 는 취약부  $G_j^C$ 에 대한  $m$ 번째 시간의존 변수의 피로수명 기여도이다.  $N_j^F$ 는 취약부  $G_j^C$ 의 피로수명이며  $\hat{N}_{jm}^F$ 는 전체 시간의존변수에서  $m$ 번째 시간의존변수만을 제외했을 때의 취약부  $G_j^C$ 의 피로수명이다.  $\Delta N_{jm}$ 는  $m$ 번째 시간의존변수만을 제외했을 때의 피로수명 증대량이며  $\Delta N_j^{Max}$ 는  $\Delta N_{jm}$ 의 최대값이다. 여기서 피로수명 기여도  $N_{jm}$ 의 값이 "0"이면 주요 취약부위  $G_j^C, j = 1, N_C$ 의 피로수명에 대해서  $m$ 번째 시간의존변수는 영향이 없음을 의미하며 "1"이면 반대로  $m$ 번째 시간의존변수만이 영향을 미침을 의미한다.

**Step 3. 변형률계수 설계허용값 계산**

취약부  $G_j^C, j = 1, N_C$ 의 피로수명을 설계목표수명으로 증대하기 위한 변형률계수의 설계허용치  $U_{jm}^{allowable}$ 를 초기설계안에 대해서 표현하면 다음과 같다.

$$U_{jm}^{allowable} = \alpha_j^* U_{jm}^0, \quad \text{where } j=1, N_C; m = 1, N_T$$

여기서 변형률계수 저감비  $\alpha_j^*$ 는 뉴턴-랩슨 반복법을 이용해서 다음과 같이 계산된다.

$$\alpha_j^*: N_j^{allowable} - N_j^F(U_{jm}^*, U_{km}^0, U_{jn}^0, U_{kn}^0) = 0$$

$$\text{with } \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{\alpha_{j-1}} < \epsilon_\alpha$$

$$\text{where } U_{jm}^* = \alpha_j U_{jm}^0$$

$$\text{and } j = 1, N_C; k = 1, N_C; m = 1, N_T; n = N_T + 1, N_T$$

여기서  $N_j^{allowable}$ 는 주요 취약부위  $G_j^C, j = 1, N_C$ 의 설계목표수명이고  $U_{jm}^*$ 는 초기 설계사양에 대한 변형률계수  $U_{jm}^0$ 의 저감비  $\alpha_j$ 에 따른 변형률계수이며  $U_{km}^0, U_{jn}^0$  및  $U_{kn}^0$ 는 초기 설계사양에 대한 변형률계수이다.  $N_j^F(U_{jm}^*, U_{km}^0, U_{jn}^0, U_{kn}^0)$ 는 변형률 계수  $U_{jm}^*, U_{km}^0, U_{jn}^0$  및  $U_{kn}^0$ 에 대해 식 (1)로부터 계산된 동변형률이력에 대한 피로수명이다.

**Step 4. 최적설계용 차체 유한요소모델 제작**

차체구조의 변형률 계산용 유한요소모델에 설계용 등가 보요소가 장착된 최적설계용 차체모델을 다음과 같이 제작한다. 주요하중경로상에 존재하는 골격부재 또는 구조결합부는 등가 보요소<sup>21)</sup>로 Fig. 2(a)와 같이 대체하고 최적화과정중 변형률계수가 계산되는 주요 취약부의 구조결합부에는 등가 보요소를 추가하여 Fig. 2(b)와 같이 장착한다. 등가 보요소의 단면계수  $I_y, I_z$  및  $J_x$ 는 각각 등가 보요소 좌표계에 대한  $y$ 축에 대한 2차 단면모멘트,  $z$ 축에 대한 2차 단면모멘트 및  $x$ 축에 대한 비틀림 상수이다.

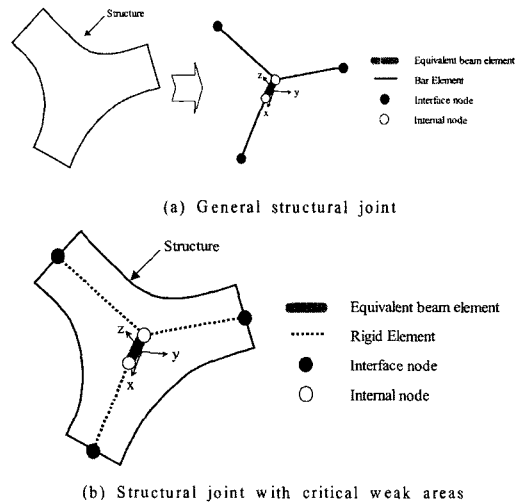


Fig. 2 Design models for structure joints using equivalent beam element

**Step 5. 구속조건의 선정**

주요 취약부위의 변형률계수를 설계목표수준으로 저감하는 구속조건(type 1) 및 취약부 전이현상을 방지하는 구속조건(type 2)를 아래와 같이 부과한다.

$$\text{Type 1 : } U_{jm}(x) - \alpha_j^* U_{jm}^0 \leq 0$$

$$\text{Type 2 : } U_{km}(x) - U_{km}^0 \leq 0$$

$$\text{where, } j = 1, N_C; k = 1, N_C; m = 1, N_T$$

**Step 6. 설계변수의 선정**

골격부재의 형상변수 (두께(t), 폭(a) 및 너비(b)) 그리고 구조 결합부의 등가 보요소 단면계수 ( $I_y, I_z$  및  $J_x$ )를 설계변수로 하여 설계 민감도해석을 수행하고 결과를 검토하여 최적설계 방향 및 설계변수

를 선정한다.

**Step 7. 최적설계 및 피로수명 확인**

최적설계용 차체모델에 대해 설계변수의 구속조건을 부과하고 목적함수를 최소화하는 최적설계를 수행한다. 최적설계의 결과를 검토하여 골격부재 및 구조결합부의 사양을 결정<sup>22)</sup>한 후 피로해석을 수행하여 차체구조의 피로수명이 설계목표치를 만족하는지 확인한다.

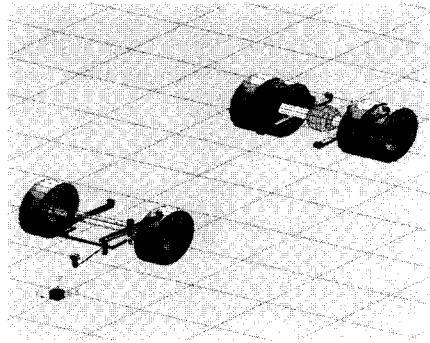


Fig. 4 Flexible multibody dynamic model of the bus

**2.3 내구 해석<sup>4)</sup>**

본 연구를 수행하기 위해서 해석에 사용된 소프트웨어로서 유연 다물체 동역학 해석은 LMS/DADS, 유한요소해석은 MSC/NASTRAN, 피로해석은 MSC/FATIGUE를 사용하였다. 본 연구에서는 벨지안 모드 내구시험을 진산 시뮬레이션하여 차체구조의 내구력을 예측하고 취약부에 대한 내구설계를 하고자 한다. 내구해석의 상세한 내용은 본 저자의 이전연구<sup>4)</sup>에 상세히 설명되어 있으며 본 논문에서 간략히 알아보면 다음과 같다.

현재 양산중인 도시형 버스의 차체구조의 내구력을 예측하기 위해 제작된 전산모델이 Fig. 3 및 Fig. 4에 주어져 있다. 변형률계수 계산을 위한 차체구조의 유한요소모델은 Fig. 3과 같으며 절점자유도는 총 445,686으로서 차체구조내 용접부, 만곡부 및 볼트 체결부등과 같은 국소부위의 응력을 정밀하게 계산하기 위해서 제작된 모델이다. 또한, 전체 차량의 다물체모델은 Fig. 4와 같으며 총 92자유도를 갖고 이 중에는 차체구조의 유연성을 고려하기 위한 탄성자유도로서 16자유도가 포함되어 있다.

벨지안모드(Belgian mode) 내구시험은 자동차회사에서 수행되는 대표적인 가속 내구 시험방식으로

서 총 길이 800m인 벨지안로를 반복적으로 주행하여 차량의 내구력을 단기간내에 검증한다. 내구해석조건은 실차 시험조건과 동일한 조건으로 하였으며 차량의 하중조건은 1/2 GVW(Gross Vehicle Weight)이고 주행속도는 25Km/h 이며 총 주행시간은 벨지안로 진입(time = 0.0 sec)에서 이탈(time = 100.0 sec)까지이다.

동역학 해석을 수행해서 구한 결과들 중에서 차체구조내 동변형률이력을 계산하기 위해서 사용된 시간의존변수는 총 68개로써 판스프링 동하중 이력 24채널, 속업소버 동하중이력 12채널, 모달속도 시간이력 16채널 및 모달가속도 시간이력 16채널 등으로 구성된다. 동변형률 이력은 총68개의 시간의존변수는 각각 대응하는 von-Mises 변형률계수를 매 적분시간마다 식 (1)에서와 같이 선형 중첩하여 계산하였다.

차체구조에 대한 피로해석 방법은 2장에서 설명한 바와 같이 변형률-수명법을 사용하였으며 SAE1020-HR의 피로 물성치를 이용하여 피로 크랙 발생시점을 예측하였다. 대표적인 주요 취약부로서 Cant rail 결합부에 대해서 기준 설계사양의 시험차와 설계사양이 변경된 시험차의 균열발생시점 (crack initiation life)대비 피로수명을 검토해보면 발생위치는 Fig. 5에서와 같이 매우 유사하며 피로수명 오차는 최대 12.1%이었다. 상기의 결과들을 검토해 보면 제안된 방법에 의한 차체구조의 내구력이 비교적 정확하게 계산되었으며 설계변경에 따른 경향도 정밀하게 예측할 수 있음을 알 수 있다.

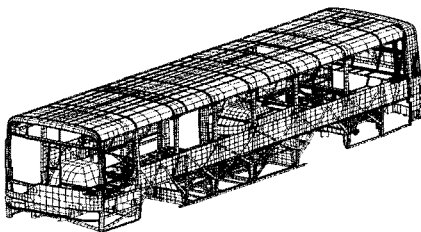


Fig. 3 Finite element model of the body structure

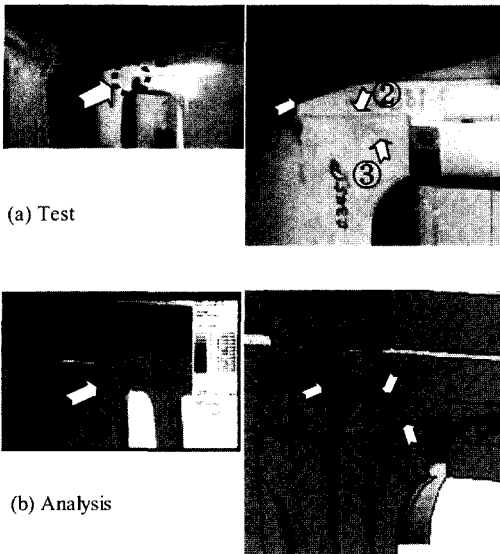


Fig. 5 Fatigue life of Cant rail joint

### 2.4 내구 설계

본 장에서는 벨지안모드 내구해석에서 다뤄진 Cant rail결합부에 대해서 설계목표 피로수명 15,000km를 만족하는 설계사양을 도출하고자 한다.

먼저 차체구조내 주요 취약부는 다음과 같이 선정된다. 현가계가 차체에 작용하는 36개의 동하중과 16개의 모달속도 및 16개의 모달가속도 등으로 구성되는 총 68개의 시간의존변수에 대한 von-Mises 변형률계수 68개중 각각의 변형률계수에 대해 최대 변형률이 발생하는 100개의 부위를 각각 선택하고 취약부로 정리하면 Fig. 6 (a)와 같다. 선정된 취약부에 대해서 벨지안 모드 내구해석을 수행하였을 때, 피로수명이 가장 낮은 4개의 부위를 주요 취약부위로 선정하면 Fig. 6 (b)와 같다. 최적설계의 목표는 Fig. 6 (b)의 주요 취약부중에서 Cant rail결합부(J1)의 피로수명을 설계목표수명 15,000km까지 증대하는 것이며 동시에 다른 주요 취약부(J2 ~ J4)의 피로수명이 감소하지 않도록 취약부 전이현상을 방지하는 것이다.

Cant rail결합부(J1)의 피로수명에 큰 영향을 미치는 주요 하중경로를 계산하기 위해서 총68개의 시간의존변수를 Table 1의 Step 2에 제안된 피로수명 기여도에 따라서 비교해보면 판스프링의 동하중에 대한 시간의존변수가 큰 영향을 미치는 것을 알 수

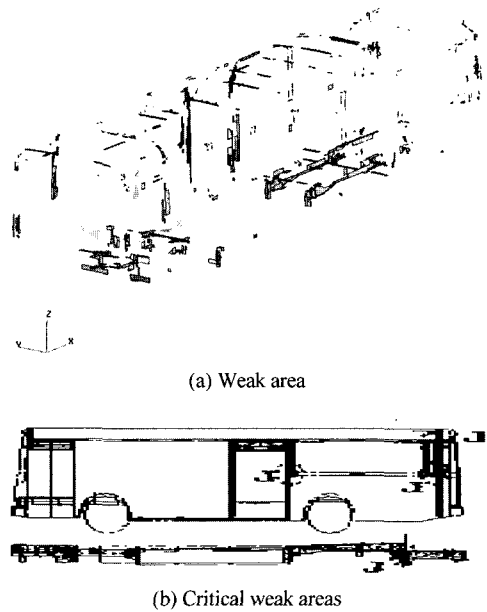


Fig. 6 Selection of critical weak areas

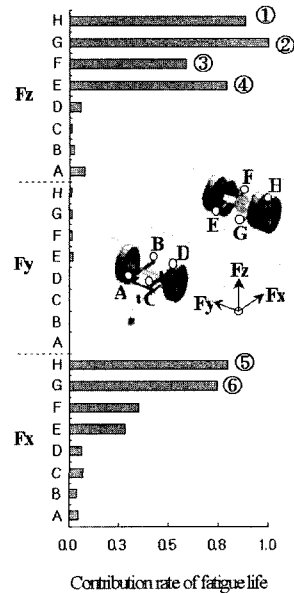
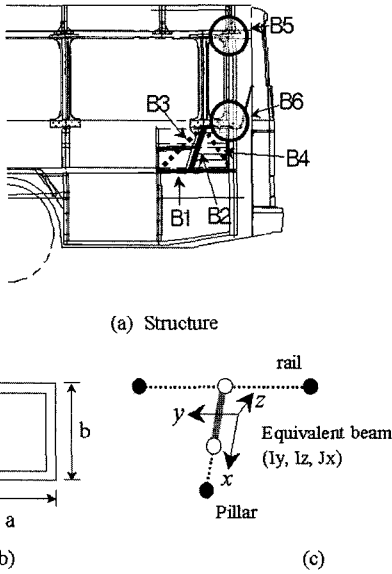


Fig. 7 Critical load paths

있다. 이들을 그래프로 표현하면 Fig. 7과 같으며 주로 후방차축의 판스프링 장착부에서 차체에 작용하는 x 및 z방향 하중경로가 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 주요 하중경로는 Fig. 7에서 보는 바와 같이 기여도가 0.5이상인 총 6개를 선택하였다.





(b) Design variables for skeleton beam (B1~B4)  
 (c) Design variables for structural joints (B5~B6)  
 Fig. 8 Design variables

Cant rail결합부(J1)의 피로수명을 설계목표수명까지 증대하기 위한 변형률계수의 허용값을 주요 하중경로(①~⑥)에 대해서 Table 1의 Step 3에서와 같이 구하면 초기 설계안에 대한 변형률계수의 저감비( $\alpha^*$ )가 0.73519로 구해진다.

설계방향의 선정 및 설계변수의 선택을 위해서 하중부재 및 구조적 결합부에 대한 설계변수의 민감도를 검토한 후 최적설계용 차체구조의 유한요소 모델을 제작하면 Fig. 8(a)에서 보는 바와 같다. 기존의 하중부재(굵은 실선)가 등가 보요소(B1과 B2)로 대체되었으며 추가될 경우 구조적으로 유효한 하중부재(굵은 점선)가 등가 보요소(B3과 B4)가 추가로 장착되었다. 또한, 구조 결합부(원형)의 등가 보요소(B5 및 B6)은 Fig. 2(b)와 같은 방식으로 추가로 장착되었다.

변형률계수의 구속조건은 Cant rail결합부(J1)내 최대 von-Mises 변형률 발생 절점에 대해서는 변형률계수의 저감계수 0.73519를 사용하여 변형률을 저감시키는 동시에 타 취약부위(J2 ~ J4)에 대해서는 변형률계수가 초기설계안대비 증가되지 않도록 하였다.

설계변수는 Fig. 8에서 보는 바와 같이 기존의 하

중부재의 단면변수( $a, b, t$ ), 추가될 경우 구조적으로 유리한 하중부재의 단면 변수( $a, b, t$ ) 및 구조결합부의 등가 보요소 단면계수( $I_y, I_z, J_x$ ) 등으로 총 18개이며 Fig. 8의 구조가 좌우 대칭구조이므로 설계변수는 좌측 및 우측구조에 대해서 동일하게 적용하고 설계변수의 구속조건은 구조변경에 따른 Layout, 제작 용이도 및 조립공법 등을 검토하여 선정하였다.

Cant rail 결합부(J1)의 피로수명을 증대하고 주요 취약부(J2 ~ J3)로의 취약부 전이현상을 방지하기 위한 최적설계는 다음과 같다.

Minimize Weight of the body structure :  $W(x)$

subject to

Type 1 :  $U_{jm}(x) - \alpha_j^* U_{jm}^0 \leq 0$  for J1

Type 2 :  $U_{km}(x) - U_{km}^0 \leq 0$  for J2, J3 and J4

where  $\alpha^* = 0.73519$  ;  $j = 1$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $m = 1, 5$

and

$$x = (a_1, b_1, t_1, \dots, a_4, b_4, t_4, I_{y5}, I_{z5}, J_5, I_{y6}, I_{z6}, J_6)$$

$$a_i \leq 1.5 \times a_i^0, i = 1, 2; b_i \leq 2.0 \times b_i^0, i = 1, 2$$

$$t_i \leq 2.3, i = 1, 2; a_i \leq 100.0, i = 3, 4$$

$$b_i \leq 60.0, i = 3, 4; t_i \leq 2.3, i = 3, 4$$

$$I_{y_i} \leq 1.2 \times I_{y_i}^0, i = 5, 6; I_{z_i} \leq 1.2 \times I_{z_i}^0, i = 5, 6$$

$$J_i \leq 1.2 \times J_i^0, i = 5, 6$$

여기서  $a_i^0, b_i^0, I_{y_i}^0, I_{z_i}^0$  및  $J_i^0$ 는 각각 초기 설계사양에 대한 값이다.

최적설계 수행후 변경된 차체구조의 사양에 대해

Design	Critical area	Fatigue life
Baseline		5,430 Km
Optimal		15,589 Km

Fig. 9 Fatigue life of Cant rail joint

서 벨지안모드 내구력 예측을 수행하여 Cant rail 결합부의 피로수명을 구하고 설계목표 만족여부를 확인하였으며 최적설계 및 내구평가의 반복수행에 따른 Cant rail 결합부(J1)의 피로수명이 Fig. 9에 제시되어 있다. 최적설계의 결과로써 Cant rail 결합부의 피로수명이 설계목표 15,000Km보다 589Km 만 큼 더 증대된 15,589Km가 얻어졌다.

초기사양과 최적사양의 목적함수 및 구속조건으로서 주요 결합부의 최대 von-Mises 변형률 계수를 비교해 보면 Table 3 (a)에서와 같다. 차체구조의 질량은 0.77Kg이 감소하였으며 Cant rail 결합부(J1)의 변형률 계수 감소비는 설계 초기값대비 0.72407 ~ 0.73519으로 모두 감소계수 0.73519이하인 것을 볼 수 있으며 그 외의 주요 취약부(J2 ~ J4)의 감소비는 0.98101 ~ 0.99990으로 초기 설계사양대비 약간 감소한 것을 볼 수 있다. 이 결과로부터 구해진 최적설계사양에 따라서 Cant rail 결합부의 피로수명 증대를 위한 설계변경을 수행할 경우, Cant rail 구조결합부의 목표수명을 만족하면서 동시에 다른 주요 취약부의 피로수명이 저하되는 취약부 전이현상이 발생하지 않을 것을 예상할 수 있다. 또한, 초기사양과 최적사양의 설계변수 값을 비교해 보면 Table 3 (b)에서와 같다. 골격부재의 등가 보요소중 B1과 B2는 기존에 존재하는 골격부재로서 Skid rail 부재 B1은 단면의 크기가 증가되었으나 Waist rail과 Skid rail을 연결하는 부재 B2는 골격부재의 역할을 수행하지 못할 정도로 단면의 크기가 감소하였고 가상으로 장착한 대각방향의 등가 보요소 B3과 B4는 단면의 크기가 증가되어 골격부재로서 주요한 역할을 수행하는 것을 볼 수 있다. 또한, 구조 결합부의 등가 보요소 B5와 B6은 공통적으로 Iz값이 증대되어 구조 결합부의 경우 면내 굽힘방향의 강성을 증가하는 방향으로 설계변경이 되어야 함을 알 수 있다.

설계변수의 변화에 따른 차체구조의 형상을 비교해 보면 Fig. 10과 같다. 주요한 차이는 Waist rail하부에 장착된 하중부재(Fig. 8의 B2)의 역할이 매우 감소하고 대신 Truss구조물 형태(Fig. 8의 B1, B3 및 B4)로 보강되어 있음을 알 수 있다. 또한, 구조결합부의 경우 초기 설계사양의 부재들이 삭제되고 대신 조인트 강성 증대용 부재들이 대체 장착되어 있음을 볼 수 있다.

Table 3 Results of optimal design

(a) Object function and Constraint

Object Function					
		Baseline design	Optimal design	Change	
Weight of B.I.W.		2726.82 Kg	2726.04 Kg	-0.77 Kg	
Constraint					
Strain coefficient ( $\mu\epsilon$ )	Joint	Critical load	Baseline design	Optimal design	Ratio*
	J1	1	8.95638E-02	6.58392E-02	0.73511
2		7.92325E-02	5.82509E-02	0.73519	
3		7.08390E-02	5.14625E-02	0.72647	
4		5.25679E-02	3.80626E-02	0.72407	
5		5.24084E-03	3.83111E-03	0.73101	
6		6.65021E-03	4.88790E-03	0.73500	
J2	1	8.15031E-02	8.06880E-02	0.99000	
	2	7.28939E-02	7.19630E-02	0.98723	
	3	6.72970E-02	6.28426E-02	0.93381	
	4	5.78246E-02	5.73690E-02	0.99212	
	5	5.08361E-03	5.03791E-03	0.99101	
	6	6.51720E-03	6.48461E-03	0.99500	
J3	1	7.97118E-02	7.80852E-02	0.97959	
	2	7.12300E-02	7.04856E-02	0.98955	
	3	6.53206E-02	6.38850E-02	0.97802	
	4	4.92902E-02	4.85867E-02	0.98573	
	5	3.96616E-03	3.90362E-03	0.98423	
	6	6.36850E-03	6.23864E-03	0.97961	
J4	1	7.34423E-02	7.12390E-02	0.97000	
	2	7.21895E-02	7.12676E-02	0.98723	
	3	6.52561E-02	6.48522E-02	0.99381	
	4	4.91136E-02	4.82355E-02	0.98212	
	5	4.47678E-03	4.39176E-03	0.98101	
	6	5.46208E-03	5.46153E-03	0.99990	

\*Ratio = Optimal design / Baseline design

(b) Design variables Unit a, b, t : m ; Iy, Iz, Jx : m<sup>4</sup>

Design variables		Baseline design	Optimal design	Ratio
B1	a	60.000	88.692	1.499
	b	40.000	64.843	1.621
	t	2.000	2.999	1.500
B2	a	100.000	19.175	0.192
	b	40.000	29.628	0.741
	t	2.300	1.240	0.539
B3	a	1.0E-05	99.517	9.952E+06
	b	1.0E-05	58.924	5.892E+06
	t	1.0E-05	2.298	2.298E+05
B4	a	1.0E-05	62.308	6.231E+06
	b	1.0E-05	38.282	3.828E+06
	t	1.0E-05	2.299	2.299E+05
B5	Iy <sup>#</sup>	6.3170E-09	6.372E-09	1.009
	Iz <sup>#</sup>	2.2035E-08	3.303E-08	1.499
	Jx <sup>#</sup>	9.6702E-09	9.530E-09	0.986
B6	Iy <sup>#</sup>	3.0362E-10	3.109E-10	1.024
	Iz <sup>#</sup>	5.7754E-09	8.652E-09	1.498
	Jx <sup>#</sup>	1.1870E-10	1.184E-10	0.997

# Section properties of the equivalent beam with respect to the equivalent beam for design and the corresponding structural joint

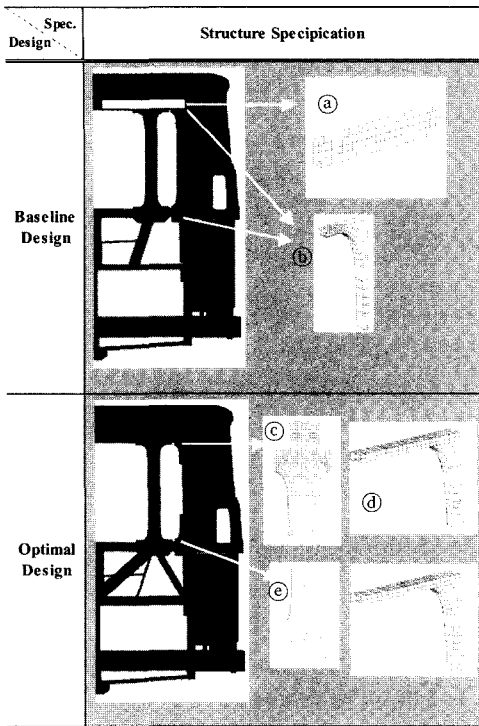


Fig. 10 Comparison of design specifications

### 3. 결론

본 연구는 차체구조의 내구력 확보를 위한 방안으로서 구조기인 내구설계를 위한 방법을 제안하였다.

- 1) 제안된 방법은 내구설계를 위해 일반적으로 사용되는 동적설계방법대신 등가의 단순한 정적설계방식으로 변환해서 최적설계의 효율성을 증대하였다. 또한, 문제부위의 피로수명을 증대하면서 동시에 취약부 전이를 방지할 수 있는 구조기인 내구문제에 대한 설계방법을 제안하였다.
- 2) 벨지안 가속내구 시험조건하에서 신 개발되는 도시형버스 차체구조의 내구력 확보를 위해서 제안된 방법을 적용한 결과 차체구조의 상부에 위치하는 Cant rail 구조 결합부의 피로수명을 증대하기 위해서는 차체구조의 하부에 위치하는 Waist rail과 Skid rail사이의 연결구조를 Truss 형태의 구조로 변경하는 것과 구조 결합부의 면내 방향 굽힘강성을 증대하는 것이 효과적임을 알

수 있다. 또한, 제안된 방법대로 구조를 변경할 지라도 타 취약부위의 피로수명이 저감되지 않는 것을 알 수 있다.

### References

- 1) W. K. Baek, R. I. Stephens, B. Dopker, "Integrated Computational Durability Analysis," ASME J. of Eng. for Industry, Vol.115, Nov. 1993.
- 2) G. Fischer, V. V. Grubisic, "Design Criteria and Durability Approval of Wheel Hubs," SAE 982840, pp.1-8, 1998.
- 3) W. Steiner, G. Steinwender, B. Unger, "Fatigue Simulation of Power Train Components During the Design Process," Int. J. of Automotive Technology, Vol.2, No.1, pp.9-16, 2001.
- 4) H. S. Kim, H. J. Yim, C. B. Kim, "Computational Durability Prediction of Body Structures in Prototype Vehicles," Int. J. of Automotive Technology, Vol.3, No.4, pp.129-135, 2002.
- 5) E. Schnack, W. Weikl, "Shape Optimization under Fatigue using Continuum Damage Mechanics," Computer-Aided Design 32, pp. 929-938, 2002.
- 6) C. D. Kong, J. H. Bang, "Structural Design and Experimental Investigation of A Medium Scale Composite Wind Turbine Blade Considering Fatigue Life, The Korea Society for Aeronautical and Space Sciences, Vol.31, No.3, pp.23-30, 2003.
- 7) D. A. Spera, "Dynamic Loads in Horizontal-Axis Wind Turbines in Part I ; Empirical Equations, Windpower93, pp.282-289, 1993.
- 8) K. Hirakawa, M. Kubota, "On the Fatigue Design Method for High-Speed Railway Axles," Proc. IMechE. Vol. 210 Part F, pp.73-82, 2001.
- 9) S. K. Koh, S. I. Lee, S. H. Chung, K. Y. Lee, "Fatigue Design of an Autofrettaged Thick-Walled Pressure Vessel using CAE Techniques," Int. J. Pres. Ves. & Piping, Vol.74, pp.19-32, 1997.
- 10) P. E. Uys, K. Jarmai, J. Farkas, "Optimal

Design of a Hoist Structure Frame,” Applied Mathematical Modeling 27, pp.963-982, 2003.

11) H. Agrawal, A. Sudjar, L. Jun, “Robust Design of an Automotive Structure using Durability CAE,” SAE 971533, pp.179-193, 1997.

12) E. Schnack, W. Weikl, “Shape Optimization under Fatigue using Continuum Damage Mechanics,” Computer-Aided Design, Vol.34, pp.929-938, 2002.

13) T. Zeiler, M. E. Barkey, “Design Sensitivities of Fatigue Performance and Structural Dynamic Response in an Automotive Application,” Struc. Multidisc. Optim., Vol.21, pp.309-315, 2001.

14) H. Martikka, “Optimum Design of Locomotive Frame using Fuzzy Goals and FE Methods,” Advances in Engineering Software, Vol.31, pp.411-415, 2000.

15) Y. L. Hsu, M. S. Hsu, “Weight Reduction of Aluminum Disc Wheels under Fatigue Constraints using a Sequential Neural Network Approximation Method,” Computers in Industry, Vol.46, pp.167-179, 2001.

16) Bathe, Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Prentice Hall, Inc., U.S.A., 1982.

17) W. S. Yoo, E. J. Haug, “Dynamics of Articulated Structures, Part I. : Theory,” J. of Struc. Mech., Vol.14, No.1, pp.105-126, 1996.

18) H. J. Yim, “Computational Methods for Stress Analysis of Mechanical Components in Dynamic Systems,” Ph. D. Thesis, The Univ. of Iowa, 1990.

19) J. Ryu, H. S. Kim, H. J. Yim, “An Efficient and Accurate Dynamic Stress Computation by Flexible Multibody Dynamic System Simulation and Reanalysis,” KSME Int. J., Vol.11, No.4, pp.386-396, 1996.

20) H. S. Kim, C. B. Kim, S. W. Won, S. H. Kang, “Local Dynamic Stress Analysis of a Flexible Body in Multibody System,” Spring Conference of KSAE, pp.105-126, 2001.

21) H. J. Yim, Y. Y. Kim, S. B. Lee, M. Y. Song, “Modeling and Vibration Analysis of Vehicle Structures Using Equivalent Beam Stiffness for Joints,” KSNVE, Vol.5, No.4, pp.537-542,

1995.

22) S. B. Lee, J. R. Park, H. J. Yim, “Numerical Approximation of Vehicle Joint Stiffness by using Response Surface Method,” Int. J. of Automotive Technology, Vol.3, No.3, pp. 117-122, 2002.

## 부 록

### 동응력 이력 또는 동변형률 이력

다물체계내 유연체내 절점 i에서의 동응력 이력  $\sigma_i^e(x_0, y_0, z_0, t)$  또는 동변형률 이력  $\varepsilon_i^e(x_0, y_0, z_0, t)$  은 동역학 해석으로부터 계산되는 시간의존함수(time dependent function)와 유한요소해석으로부터 계산되는 형상의존함수(geometry dependent function)의 복합중첩을 통해서 다음과 같이 계산된다.<sup>20)</sup>

$$\begin{aligned} \xi_i^e(x_0, y_0, z_0, t) = & \sum_{j=1}^{Nk} \prod_{S_{ij}}(x_0, y_0, z_0) P_{S_{ij}}(t) \\ & + \sum_{k=1}^{Nk} \prod_{B_{ik}}(x_0, y_0, z_0) P_{B_{ik}}(t) \\ & - \sum_{l=1}^{Nk} \left( \frac{2\xi_l}{\omega_l} \right) \prod_{K_{il}}(x_0, y_0, z_0) \dot{q}_{K_{il}}(t) \\ & - \sum_{m=1}^{Nk} \left( \frac{1}{(\omega_m)^2} \right) \prod_{K_{im}}(x_0, y_0, z_0) \ddot{q}_{K_{im}}(t) \end{aligned} \quad (B.1)$$

where  $\xi_i^e = \sigma_i^e$  or  $\varepsilon_i^e$

$$\prod = S \quad \text{when} \quad \xi_i^e = \sigma_i^e$$

$$\prod = U \quad \text{when} \quad \xi_i^e = \varepsilon_i^e$$

상기식에서  $\xi_i^e(x_0, y_0, z_0, t)$ 는 시간 t일 때의 물체 좌표계에 대한 유한요소 절점위치  $x_0, y_0, z_0$ 의 절점 i의 탄성변형에 의한 응력( $\sigma^e$ ) 또는 변형률( $\varepsilon^e$ )이다. 형상의존함수인  $\prod(x_0, y_0, z_0)$ 는 응력계수(stress coefficient) S 또는 변형률계수(strain coefficient) U로서  $\prod_{S_{ij}}, \prod_{B_{ij}}$ 는 각각 표면력 및 체력에 대한 계수이며 및  $\prod_{K_{il}}, \prod_{K_{im}}$ 는 선택된 진동모드에 대한 계수이다. 시간의존함수인  $P_{S_{ij}}(t)$  및  $P_{B_{ij}}(t)$ 는 각각 표면력 및 체력에 대한 동하중 이력이며  $\dot{q}_i(t)$  및  $\ddot{q}_m(t)$ 는 각각 모달속도 및 모달가속도 이력이다. 또한,  $\xi_i$ 와  $\omega_i$ 는 각각 모달감쇠상수와 고유진동수이다.

식(B.1)을 행렬형으로 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \xi_i^e(x_0, y_0, z_0, t) &= \prod_i(x_0, y_0, z_0) P(t) \\ &= \sum_{m=1}^{N_t} \prod_{im}(x_0, y_0, z_0) P_m(t) \end{aligned} \quad (B.2)$$

where

$$\begin{aligned} \prod_i(x_0, y_0, z_0) &= \begin{bmatrix} \Pi_{Si} & & & \mathbf{0} \\ & \Pi_{Bi} & & \\ & & \Pi_{Ki} & \\ \mathbf{0} & & & \Pi_{Ki} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Pi_{i1} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \Pi_{im} & \\ \mathbf{0} & & & \Pi_{iN_t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_S(t) \\ \mathbf{p}_B(t) \\ \mathbf{q}_K(t) \\ \mathbf{\ddot{q}}_K(t) \end{Bmatrix} = (p_1(t) \ \cdots \ p_m(t) \ \cdots \ p_{N_t}(t))^T$$

여기서  $\prod_i(x_0, y_0, z_0)$ 는 응력 또는 변형률계수행렬이며  $P(t)$ 는 시간의존함수 벡터이다.