

논문 2004-41SC-3-2

파라미터 불확실성과 시간지연을 가지는 특이시스템의 견실 H_∞ 출력궤환 제어

(Robust H_∞ Output Feedback Control of Descriptor Systems with Parameter Uncertainty and Time dDelay)

김 종 해*

(Jong Hae Kim)

요 약

본 논문에서는 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력궤환 제어기 설계방법을 단 하나의 선형행렬부등식 조건을 이용하여 제시한다. 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 모든 변수의 견지에서 완벽한 하나의 선형행렬부등식으로 표현하여 블록최적화가 가능하도록 한다. 제어기의 설계과정은 제안한 하나의 충분조건으로부터 직접 구해진다. 구한 충분조건은 하나의 선형행렬부등식으로 표현되어지므로, 슈어 여수정리와 변수치환 및 특이치 분해의 기법에 의하여 궤환이득과 추정이득을 포함하는 모든 해로부터 관측기 기반 H_∞ 출력궤환 제어기를 동시에 구할 수 있다. 또한 제안한 알고리즘을 이용하여 파라미터 불확실성과 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 견실 H_∞ 출력궤환 제어기 설계도 가능함을 보인다. 마지막으로, 제안한 알고리즘의 타당성을 수치예제를 통하여 확인한다.

Abstract

This paper provides an observer-based H_∞ output feedback controller design method for descriptor systems with time-varying delay by just one LMI(linear matrix inequality) condition. The sufficient condition for the existence of controller and the controller design method are presented by perfect LMI approach, which can be solved efficiently by convex optimization. The design procedure involves solving an LMI. Since the obtained condition can be expressed as an LMI form, all variables including feedback gain and observer gain can be calculated simultaneously by Schur complement, changes of variables, and singular value decomposition. Moreover, The proposed controller design algorithm can be extended to the observer-based robust H_∞ output feedback controller design method for descriptor systems with parameter uncertainty and time delay. An example is given to illustrate the results.

Keywords: Descriptor systems, robust H_∞ output feedback control, observer-based controller, time delay, parameter uncertainty, LMI

I. 서 론

상태공간으로 표현되는 시스템에 제어이론을 적용하기 위해서는 비선형 형태의 미분방정식이나 차분방정식

으로 표현되는 모델이 필요하다. 하지만, 비선형 방정식을 적절한 방법으로 선형화하는 과정에서 계수의 문제가 발생하는 특이시스템(descriptor systems)에 직면하게 된다. 일반적인 기존의 제어기 설계기법은 특이 현상을 피하기 위하여 제약조건을 주거나 시스템을 변화시켜 원래의 동특성(dynamics)을 무시한다. 따라서, 불확실성이나 모델링 오차 등이 증가하여 실제 적용에서 예상하지 못한 임펄스(impulse)나 히스테리시스(hysteresis) 등의 물리적 현상이 일어나고, 이러한 현상은 기존

* 선문대학교 전자정보통신공학부
(Division of Electronics, Information and Communication Engineering, Sunmoon University)

※ 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음. (KRF-2002-041-D00210)

접수일자: 2003년7월30일, 수정완료일: 2004년4월13일

의 상태공간 모델로는 적절히 다룰 수가 없다^[1,2]. 지난 수십 년 동안 활발히 연구되고 있는 H_∞ 제어는 자동제어 분야에서 중요한 개념의 하나였다. H_∞ 이론을 바탕으로 하는 제어기 설계 알고리즘이 수학적으로 완벽히 개발되었다 할지라도 대부분의 설계방법은 비특이시스템의 상태공간 모델을 다루었다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 최근 특이시스템에 대한 H_∞ 제어연구가 활발해지면서 여러 가지 설계기법들이 개발되었다. 결국, 특이시스템을 다룰 경우 비특이시스템을 포함하는 여러 가지 동특성을 다룰 수 있다는 장점이 있다.

특이시스템에 대한 해석과 설계방법은 특이시스템의 특별한 특징들로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동이론, 제약적 기계시스템 등에 광범위하게 적용되어지기 때문에 최근 특이시스템의 연구가 활발히 진행되고 있다. 하지만, 대부분의 특이시스템에 대한 연구결과가 상태궤환에 대해 집중되어 있고, 특이시스템의 출력궤환 문제에 대한 연구결과들은 2개 이상의 대수 리카티 방정식이나 행렬부등식으로부터 해를 얻기 때문에 상호결합성에 의하여 최적의 해를 구하기가 힘들다는 단점이 있다. 특이시스템에 대한 연구결과들은 다음과 같다. Wang 등[3]은 특이시스템의 H_∞ 제어를 위한 유계실수정리(bounded real lemma)를 제시하였다. Cobb^[4]은 특이시스템의 가제어성(controllability), 가관측성(observability), 쌍대성(duality)의 문제를 다루었다. Lewis[5]는 특이시스템의 최적제어 문제를 다루었다. 최근에는 상태가 모두 측정되어지지 못하는 경우에 대한 특이시스템의 H_∞ 출력궤환 제어기 설계문제가 다루어져 왔다. 특히, Masubuchi 등^[1]은 임펄스 모드와 허수축 제로를 가지는 특이시스템에 대한 가정을 없애는 특이시스템의 H_∞ 제어기 설계방법을 구하고자 하는 해가 상호결합된 3개의 리카티 행렬부등식을 이용하여 제시하였다. 그러나, 3개의 행렬부등식이 서로 구하려는 해의 견지에서 상호 결합되어 있어서 최적의 해를 구하기 힘들다는 단점이 있다. Rehm과 Allgöwer^[6]는 시스템 행렬에 노음한계를 가지는 불확실성을 가지는 비정규(non-regular) 특이시스템의 H_∞ 제어문제를 다루었다. 하지만, 제어기 설계방법이 아니라 파라미터 불확실성이 있는 특이시스템을 파라미터 불확실성이 없는 등가의 시스템으로 변형하는 방법에 대하여 언급하였다. 또한, Takaba 등^[7]은 불확실 특이시스템의 H_2 제어문제를 다루었다. Hung과 Lee^[8]는 시간지연을 가지는 특이시스템에 대하여 변형한 리카티 방정식 방법으로 상태궤환 H_∞ 제어기 설계방법을 제시하였다. 하지만, 제어기를 설계하기 위해서

는 몇 개의 변수의 값을 미리 선정해야 하는 등 최적의 해를 구할 수 없다. 또한, 상태가 모두 측정가능(measurable)하지 못한 경우에는 사용할 수 없다. 또한, 시간지연이 시스템의 안정성과 성능에 영향을 끼치기 때문에 시간지연에 대한 연구^[10,11,12]가 활발히 진행 중이다. 따라서, 시간지연을 가지는 특이시스템의 H_∞ 출력궤환 문제를 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 하나의 선형행렬부등식으로 해결하는 방법이 필요하다.

본 논문의 목적은 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력궤환 제어기 설계방법과 제어기 존재 충분조건을 볼록 최적화가 가능한 단 하나의 선형행렬부등식(linear matrix inequality)으로 표현하고자 한다. 제안한 알고리즘은 궤환이득(feedback gain)과 추정이득(observer gain)을 포함하는 모든 변수의 견지에서 하나의 선형행렬부등식으로 표현하기 때문에 한번에 모든 해를 구할 수 있다. 뿐만 아니라, 제안하는 알고리즘은 시간지연이 없는 시스템과 파라미터 불확실성과 시간지연을 동시에 가지는 시스템에도 직접 적용할 수 있음을 보인다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. $(\cdot)^T$, $(\cdot)^{-1}$, $\deg(\cdot)$, $|\cdot|$, $\text{tr}(\cdot)$ 및 $\text{rank}(\cdot)$ 는 (\cdot) 에 대한 전치(transpose), 역(inverse), 차수(degree), 행렬식(determinant), 대각합(trace), 계수(rank)를 각각 나타낸다. 그리고, I , I_r , $x_r(t)$ 및 \mathbb{R}^r 은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, $r \times r$ 차원을 가지는 단위행렬, $r \times 1$ 차원의 벡터 및 $r \times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다.

*는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소를 나타낸다. 또한, 특이시스템의 성질에 대하여 간략히 정리한다. $E\dot{x}(t) = Ax(t)$ 의 시스템에 대하여, $|sE - A| \neq 0$ 이면 (E, A) 는 정규적(regular)이고, 특이시스템이 임펄스프리(impulse free)이기 위한 필요충분조건은 $\text{rank}(E) = \deg |sE - A|$ 를 만족하는 것이다. 그리고, 특이시스템이 가지는 모든 모드가 감소하면 시스템은 점근적으로 안정(asymptotically stable)하다.

II. 문제 설정

시변 시간지연을 가지는 선형 특이시스템

$$\begin{aligned}
 E\dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 u(t) + B_2 w(t) \\
 z(t) &= C_1 x(t) + D_1 u(t) \\
 y(t) &= C_2 x(t) + D_2 w(t) \\
 x(t) &= \phi(t), \quad t \in [-\bar{d}, 0]
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

을 고려한다.

여기서, $x(t) \in R^n$ 는 상태, $z(t) \in R^l$ 는 제어될 출력, $y(t) \in R^q$ 는 측정 출력, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $w(t) \in R^p$ 는 외란입력, E 는 $rank(E) = r \leq n$ 을 만족하는 특이행렬, $\phi(t)$ 는 연속 벡터 값을 가지는 초기함수, 모든 행렬은 적절한 차원을 가지고, 특이시스템 (1)은 정규적이고 임펄스프리라고 가정한다. 그리고, D_1 은 완전 열계수(full column rank)이다. 여기서 시변 시간지연은

$$0 \leq d(t) \leq \bar{d} < \infty, \quad \dot{d}(t) \leq \beta < 1 \tag{2}$$

을 만족한다. 시스템 (1)에 대하여 관측기 기반 H_∞ 출력 제한 제어기를

$$\begin{aligned}
 E\dot{\zeta}(t) &= A\zeta(t) + B_1 u(t) + L[y(t) - C_2 \zeta(t)] \\
 u(t) &= K\zeta(t)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

으로 선정한다.

여기서, $\zeta(t) \in R^n$ 는 추정치, L 은 추정이득, K 는 제한이득이다. 오차상태를 $e(t) = x(t) - \zeta(t)$ 로 두면, 오차 다이내믹스는

$$E\dot{e}(t) = (A - LC_2)e(t) + A_d x(t-d(t)) + (B_2 - LD_2)w(t) \tag{4}$$

이다. 또한, 페루프시스템의 상태방정식은

$$E\dot{x}(t) = (A + B_1 K)x(t) - B_1 Ke(t) + A_d x(t-d(t)) + B_2 w(t) \tag{5}$$

으로 표현되고 제어될 출력 $z(t)$ 는

$$z(t) = (C_1 + D_1 K)x(t) - D_1 Ke(t) \tag{6}$$

이다. 또한, H_∞ 성능지수는

$$\int_0^\infty [z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)] dt \tag{7}$$

이다. 여기서, 본 논문의 목적은 페루프시스템의 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성 뿐만 아니라 미리 선정한 H

∞ 노음 한계, 즉 $\sup_{w(t) \neq 0 \in L_2[0, \infty)} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} < \gamma$ 를 만족

하는 추정이득 L 과 제한이득 K 를 결정하는 것이다. 여기서, 증명을 위해 필요로 되는 정의와 보조정리를 서술한다.

정의 1^[8]. 주어진 행렬 $E \in R^{n \times n}$, $A^* \in C^{n \times n}$ 에 대하여, $|\alpha E + A^*| \neq 0$ 또는 다항식 $|sE - A^*| \neq 0$ 를 만족하는 상수 $\alpha \in C$ 가 존재하면 (E, A^*) 는 정규적이다.

보조정리 1^[8].

$(E, A + A_d e^{-s\bar{d}})$ 가 정규적일 필요충분조건은,

$$E \equiv Q^* E P^* = \text{diag}(I_{n_1}, N) \text{와}$$

$$A \equiv Q^* A P^* = \text{diag}(A_1^*, I_{n_2}) \text{을 만족하는 비특}$$

이 행렬 Q^* 와 P^* 가 존재하는 것이다.

여기서, $A^* = A + A_d e^{-j\omega\bar{d}}$, $n_1 + n_2 = n$, $A_1^* \in C^{n_1 \times n_1}$,

$N \in R^{n_2 \times n_2}$ 는 거듭제곱이 영(nilpotent)인 행렬이다.

참조 1^[8]. 아래의 성질들은 모두 동일하다.

(i) 특이시스템 (1)이 임펄스프리하다.

(ii) $rank(E) = deg |sE - A^*|$

(iii) 보조정리 1에서 행렬 N 은 영행렬(null matrix)

이다.

(iv) $(sE - A^*)^{-1}$ 이 진유리함수(proper function)이다.

III. 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기 설계

본 절에서는 시변 시간지연을 가지는 특이시스템의 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기가 존재할 충분조건과 제어기 설계방법을 하나의 선형행렬부등식의 견지에서 다룬다. 우선, 정리 1에서는 제어기가 존재할 충분조건을 제시한다.

정리 1. 주어진 양의 실수 γ 에 대하여, 아래의 행렬 부등식

$$E^T P_c = P_c^T E \geq 0 \tag{8}$$

$$E^T P_o = P_o^T E \geq 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 - P_c^T B_1 K - (C_1 + D_1 K)^T D_1 K & P_c^T A_d & P_c^T B_2 \\ * & \Gamma_2 & P_o^T A_d & P_o^T (B_2 - LD_2) \\ * & * & -(1-\beta)Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

을 만족하는 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_c , P_o , 양의 정부호(positive-definite) 행렬 Q , 추정이득 L , 제한이득 K 가 존재하면, (3)은 페루프시스템을 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성을 만족하게 하는 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기이다. 여기서, 각 변수들은 $\Gamma_1 = A^T P_c + P_c^T A + K^T B_1^T P_c + P_c^T B_1 K + Q + (C_1 + D_1 K)^T (C_1 + D_1 K)$, $\Gamma_2 = A^T P_o + P_o^T A - P_o^T L C_2 - C_2^T L^T P_o + K^T D_1^T D_1 K$ 이다.

증명: 시스템 (4)와 (5)의 점근적 안정성을 위하여, $E^T P_c = P_c^T E \geq 0$ 와 $E^T P_o = P_o^T E \geq 0$ 의 성질을 만족하는 리아푸노프 후보함수(Lyapunov function candidate)

$$V(x(t)) = x(t)^T E^T P_c x(t) + e(t)^T E^T P_o e(t) + \int_{t-d(t)}^t x(\tau)^T Q x(\tau) d\tau \quad (11)$$

를 잡는다. 여기서, Q 는 양정의 행렬이다. 식 (11)의 시간에 대한 미분은

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &\leq x(t)^T E^T P_c x(t) + x(t)^T P_c^T E x(t) + e(t)^T E^T P_o e(t) + e(t)^T P_o^T E e(t) \\ &\quad + x(t)^T Q x(t) - (1-d'(t))x(t-d(t))^T Q x(t-d(t)) \\ &\leq x(t)^T E^T P_c x(t) + x(t)^T P_c^T E x(t) + e(t)^T E^T P_o e(t) + e(t)^T P_o^T E e(t) \\ &\quad + x(t)^T Q x(t) - (1-\beta)x(t-d(t))^T Q x(t-d(t)) \\ &:= V_a(x(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

와 같다. 따라서, $V_a(x(t)) < 0$ 은 식 (4)와 (5)로 구성되는 페루프시스템을 점근적으로 안정시킨다. 식 (7), (11)와 (12)로부터 페루프시스템의 H_∞ 노음 한계를 만족하기 위하여

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq V_a(x(t)) < -z(t)^T z(t) + \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0 \quad (13)$$

의 관계^[13]를 얻는다. 따라서, (13)의 관계로부터

$$\pi(t)^T \begin{bmatrix} \Gamma_1 - P_c^T B_1 K - (C_1 + D_1 K)^T D_1 K & P_c^T A_d & P_c^T B_2 \\ * & \Gamma_2 & P_o^T A_d & P_o^T (B_2 - LD_2) \\ * & * & -(1-\beta)Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \pi(t) < 0 \quad (14)$$

이고, $\pi(t) = [x(t)^T \ e(t)^T \ x(t-d(t))^T \ u(t)^T]^T$ 이다.

상태방정식(5)와 오차다이내믹스(4)로 구성되는 전체 페루프시스템에서

$\left\{ \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A+B_1K & -B_1K \\ 0 & A-LC_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix} e^{-s\bar{d}} \right\}$ 이 정규적이기 위한 조건은 보조정리 1로부터 특이치분해를 위한 2개의 비특이 행렬이 존재하는 것이다. 또한, 정의 1로부터 $\det \left\{ s \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A+B_1K & -B_1K \\ 0 & A-LC_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix} e^{-s\bar{d}} \right\} \neq 0$ 또는 $\det \left\{ \alpha \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A+B_1K & -B_1K \\ 0 & A-LC_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix} e^{-s\bar{d}} \right\} \neq 0$ 을 만족하는 적당한 실수 α 가 존재하면 전체 페루프시스템은 정규적임을 알 수 있다. 정의 1과 보조정리 1로부터 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기 (3)이 특이시스템 (1)을 정규적이 되게 함을 쉽게 알 수 있다. 또한, 보조정리 1과 참조 1의 성질 (iii)으로부터 임펄스프리함을 알 수 있다. 또한, 식 (13)의 조건과 충분조건의 관계로부터 리아푸노프 함수의 시간에 대한 미분이 0보다 작아지는 정리 2를 만족하는 해가 존재하면 전체 페루프시스템은 점근적으로 안정하다. ■

그러나, 정리 1의 충분조건은 구하려는 변수의 견지에서 선형행렬부등식의 형태가 아니고, 식 (8)과 (9)에는 등식의 조건을 포함하고 있어서 해를 구하기가 쉽지 않다. 따라서, 등식의 조건을 없애고, 모든 변수의 견지에서 하나의 완벽한 선형행렬부등식으로 만들기 위하여 변수치환, 슈어 여수(Schur complement) 정리, 특이치분해(singular value decomposition) 방법 등의 적절한 전개방법을 정리 2에서 이용한다. 게다가, 시변 시간지연을 가지는 특이시스템의 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기 설계방법도 제시한다.

정리 2. 주어진 양의 실수 γ 에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & 0 & 0 & P_1 A_{d1} + P_2^T A_{d3} & P_1 A_{d2} + P_2^T A_{d4} & P_1 B_{21} + P_2^T B_{22} & 0 \\ * & \Sigma_3 & 0 & 0 & P_3 A_{d3} & P_3 A_{d4} & P_3 B_{22} & 0 \\ * & * & \Sigma_4 & \Sigma_5 & P_4 A_{d1} + P_5^T A_{d3} & P_4 A_{d2} + P_5^T A_{d4} & P_4 B_{21} + P_5^T B_{22} - M_1 D_2 & \Sigma_7 \\ * & * & * & \Sigma_6 & P_6 A_{d3} & P_6 A_{d4} & P_6 B_{22} - M_2 D_2 & \Sigma_8 \\ * & * & * & * & -(1-\beta)Q & -(1-\beta)Q_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -(1-\beta)Q_3 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P_1 , P_4 , Q_1 , Q_3 , 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_3 , P_6 및 행렬 P_2 , P_5 , Q_2 , M_1 , M_2 가 존재하면, 아래의 행렬은

$$K = -(D_1^T D_1)^{-1} (B_1^T P_c + D_1^T C_1) \quad (16)$$

$$L = (P_o^T)^{-1} M$$

은 각각 식 (3)의 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기의
 제한이득과 추정이득이다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= A_1^T P_1 + P_1 A_1 + Q_1 + C_{11}^T C_{11} \\ \Sigma_2 &= P_2^T A_4 + Q_2 + C_{11}^T C_{12} \\ \Sigma_3 &= A_4^T P_3 + P_3 A_4 + Q_3 + C_{12}^T C_{12} \\ \Sigma_4 &= A_1^T P_4 + P_4 A_1 - M_1 C_{21} - C_{21}^T M_1^T \\ \Sigma_5 &= P_5^T A_4 - M_1 C_{22} - C_{21}^T M_2^T \\ \Sigma_6 &= A_4^T P_6 + P_6 A_4 - M_2 C_{22} - C_{22}^T M_2^T \\ \Sigma_7 &= -(P_1 B_{11} + P_2^T B_{12} + C_{11}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} D_1^T \\ \Sigma_8 &= -(P_3 B_{12} + C_{12}^T D_1)(D_1^T D_1)^{-1} D_1^T \end{aligned} \quad (17)$$

와 같다.

증명: 식 (10)의 행렬부등식은 식 (16)을 이용하면

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 & P_c^T A_d & P_c^T B_2 \\ * & \Lambda_2 & P_o^T A_d & P_o^T B_2 - MD_2 \\ * & * & -(1-\beta)Q & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

으로 변형된다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= A^T P_c + P_c^T A + Q + C_1^T C_1 - K^T D_1^T D_1 K \\ \Lambda_2 &= A^T P_o + P_o^T A - M C_2 - C_2^T M^T + K^T D_1^T D_1 K \\ M &= P_o^T L \end{aligned}$$

으로 정의한다. 더욱이, 식 (18)의 행렬부등식은

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & P_c^T A_d & P_c^T B_2 & 0 \\ * & \Psi_2 & P_o^T A_d & P_o^T B_2 - MD_2 & -(D_1^T D_1)^{-1} (P_c^T B_1 + C_1^T D_1) D_1^T \\ * & * & -(1-\beta)Q & 0 & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

의 선형행렬부등식이 음의 정부호(negative-definite)이
 면 음의 정부호이다. 여기서, 변수들은

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A^T P_c + P_c^T A + Q + C_1^T C_1 \\ \Psi_2 &= A^T P_o + P_o^T A - M C_2 - C_2^T M^T \end{aligned}$$

으로 정의한다. 구하려는 모든 변수의 견지에서 블록최
 적화가 가능한 선형행렬부등식을 만들고, 식 (8)과 (9)의
 등식조건을 없애기 위하여 변수치환과 특이치 분해 방
 법을 이용한다. 일반성을 상실함 없이[1,2], 식 (1)의 시

스템 행렬은

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} A_{d1} & A_{d2} \\ A_{d3} & A_{d4} \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad C_1 = [C_{11} \quad C_{12}] \\ C_2 &= [C_{21} \quad C_{22}], \quad D_1 = D_1, \quad D_2 = D_2 \end{aligned} \quad (20)$$

의 특이치 분해 형태를 가질 수 있다. 또한, 식 (8)과 (9)
 를 만족하기 위하여, 구하려는 해를

$$\begin{aligned} P_c &= \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \\ P_o &= \begin{bmatrix} P_4 & 0 \\ P_5 & P_6 \end{bmatrix} \\ M &= \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ * & Q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

로 두고, 식 (20)과 (21)을 식 (19)에 대입하면 식 (19)는
 식 (15)와 등가이다. 따라서, 식 (15)는 구하려는 P_1 ,
 P_2 , P_3 , P_4 , P_5 , P_6 , Q_1 , Q_2 , Q_3 , M_1 , M_2 의
 모든 변수들의 견지에서 선형행렬부등식 형태이다. 구한
 해로부터 식 (16)의 제한이득과 추정이득을 직접 구할
 수 있고, 식 (3)의 구조로부터 최종 관측기 기반 H_∞ 출
 력제한 제어기를 얻는다. ■

참조 2. 식 (1)의 특이시스템에서 $E = I$ 이면, 식 (19)
 의 선형행렬부등식으로부터 일반적인 시간지연 상태공
 간 문제에 대한 해를 직접적으로 구할 수 있다. 따라서,
 제안한 설계 알고리즘은 특이시스템 뿐만 아니라 비특
 이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기를
 설계할 수 있다. 또한, 대부분의 비특이시스템의 관측기
 기반 H_∞ 출력제한 제어기 설계 방법은 2개의 리카티 부
 등식으로부터 해를 구하는 반면에 제안하는 알고리즘은
 단지 하나의 선형행렬부등식의 충분조건으로부터 해를
 구할 수 있다는 장점이 있다.

제안한 제어기 설계 알고리즘은 시간지연이 없는 특
 이시스템에 대해서도 아래 보조정리 1에서처럼 간단한
 수식전개를 통하여 적용할 수 있다.

보조정리 2. 식 (1)에서 시간지연이 없는 $A_d = 0$ 인
 특이시스템을 고려한다. 주어진 양의 실수 γ 에 대하여,
 아래의 선형행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & 0 & 0 & P_1 B_{21} + P_2^T B_{22} & 0 \\ * & \Delta_3 & 0 & 0 & P_3^T B_{22} & 0 \\ * & * & \Sigma_4 & \Sigma_5 & P_4 B_{21} + P_5^T B_{22} - M_1 D_2 & \Sigma_7 \\ * & * & * & \Sigma_6 & P_6 B_{22} - M_2 D_2 & \Sigma_8 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P_1, P_4 , 역행렬이 존재하는 대칭행렬 P_3, P_6 , 및 행렬 P_2, P_5, M_1, M_2 가 존재하면 식 (16)에 의해 표현되는 행렬들은 특이시스템의 점근적 안정성과 γ 이내의 H_∞ 노음의 한계를 만족하게 하는 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기의 구현이득과 추정이득이다. 여기서, 변수들은

$$\Delta_1 = A_1^T P_1 + P_1 A_1 + C_{11}^T C_{11}$$

$$\Delta_2 = P_2^T A_4 + C_{11}^T C_{12}$$

$$\Delta_3 = A_4^T P_3 + P_3 A_4 + C_{12}^T C_{12}$$

으로 정의한다.

증명: $E^T P_c = P_c^T E \geq 0$ 와 $E^T P_o = P_o^T E \geq 0$ 의 성질을 만족하는 리아푸노프 후보함수 $V(x(t)) = x(t)^T E^T P_c x(t) + e(t)^T E^T P_o e(t)$ 와 식 (7)의 H_∞ 성능지수 및 정리 1과 2의 증명과정을 이용하면 직접 얻을 수 있다. ■

또한, 제안한 알고리즘을 이용하면 파라미터 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기 설계기법에도 직접 적용할 수 있다. 즉, 참조 3에서는 파라미터 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템이 페루프시스템의 점근적 안정성과 H_∞ 노음 한계의 견지에서 등가의 파라미터 불확실성이 없는 시간지연 특이시스템으로 변형됨을 보인다.

참조 3. 파라미터 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템

$$E\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 u(t) + B_2 w(t)$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t)$$

$$y(t) = [C_2 + \Delta C_2(t)]x(t) + D_2 w(t)$$

(23)

을 다룬다. 여기서, 파라미터 불확실성은

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(t) J, \quad F(t)^T F(t) \leq I \quad (24)$$

이다. H_1, H_2, J 는 알고 있는 행렬이며, $F(t)$ 는 식 (24)의 조건을 만족하는 모르는 행렬이다. 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기 (3)을 가지고 식 (23)의 특이시스템이 안정가능화(stabilizable)하고 H_∞ 노음이 γ 이내로 될 필요충분조건은

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d(t)) + B_1 u(t) + [B_2 \quad \gamma H_1] \begin{bmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \hat{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \frac{1}{\lambda} J \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = C_2 x(t) + [D_2 \quad \gamma H_2] \begin{bmatrix} w(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$$

(25)

의 변형한 시스템에서 양의 실수 λ 가 존재하고 동일한 제어기 (3)에 의하여 안정가능화하고 H_∞ 노음이 γ 이내로 되는 것이다. 여기서, $\hat{w}(t)$ 와 $\hat{z}(t)$ 는 추가적인 외란입력과 제어될 출력이다.

증명: 참고문헌 [6]과 [14]의 결과를 이용하면 직접 증명할 수 있다. 증명의 과정이 참고문헌의 결과로부터 매우 명확하므로 본 논문에서는 생략한다. ■

참조 4. 참조 2에서 변형한 등가의 시스템 식 (25)의 형태는 결국 본 논문에서 다루고 있는 식 (1)의 시간지연 특이시스템 형태이다. 따라서, 정리 2의 선형행렬부 등식의 결과에 직접 대입하면 식 (23)의 파라미터 불확실성과 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력제한 제어기를 설계할 수 있다.

예제. 제안한 알고리즘의 타당성을 보기 위하여 파라미터 불확실성과 시간지연을 가지는 특이시스템

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F(t) [0.1 \ 0.1] \right\} x(t) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0.5 \\ 0.1 & 0.01 \end{bmatrix} x(t-d(t))$$

$$+ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = [0.2 \ 0.1] x(t) + u(t)$$

$$y(t) = ([0.5 \ 0.2] + F(t) [0.1 \ 0.1]) x(t) + w(t)$$

$$d(t) = 2 + 0.3 \sin t$$

$$\gamma = 1, \quad \lambda = 1$$

(26)

을 다룬다. 참조 3으로부터 파라미터 불확실성이 없는 등가의 특이시스템으로 변형하고, 모든 변수의 견지에

서 선형행렬부등식인 정리 2의 조건과 LMI 도구상자^[15]로부터 모든 해와 추정이득 및 케환이득은

$$\begin{aligned}
 P_c &= \begin{bmatrix} 0.4541 & 0 \\ -0.4002 & -0.5021 \end{bmatrix}, P_o = \begin{bmatrix} 0.3271 & 0 \\ -0.1480 & -0.7081 \end{bmatrix}, \\
 M &= \begin{bmatrix} 0.0155 \\ -0.4626 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.9401 & 0.2390 \\ 0.2390 & 0.5131 \end{bmatrix}, \\
 K &= [0.3080 \quad -0.6021], L = \begin{bmatrix} 0.3427 \\ 0.6553 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{27}$$

로 한번에 구해지므로 최종 관측기 기반 H_∞ 출력케환 제어기는

$$\begin{aligned}
 E\zeta(t) &= \begin{bmatrix} -2.7873 & 1.1357 \\ -0.6346 & 1.4715 \end{bmatrix} \zeta(t) + \begin{bmatrix} 0.3427 \\ 0.6553 \end{bmatrix} y(t) \\
 u(t) &= [0.3080 \quad -0.6021] \zeta(t)
 \end{aligned} \tag{28}$$

이다. 컴퓨터 모의실험을 위하여 외란입력을 그림 1에서 처럼 1초에서 3초까지 10으로 잡고, 모르는 행렬을 $F(t) = \sin t$ 로 잡으면, 상태와 오차상태 및 제어될 출력신호가 그림 1~3에서 주어진다. 그림 2와 그림 3의 실험결과에서처럼 시간이 흘러감에 따라 상태와 오차상태가 영으로 수렴하기 때문에 구한 관측기 기반 H_∞ 출력케환 제어기는 식 (26)의 파라미터 불확실성을 가지는 시변 시간지연을 가지는 특이시스템을 안정화시킨다. 또한, 외란입력 $w(t)$ 와 제어될 출력 $z(t)$ 사이의 L_2 유도 노음(induced norm)의 정의로부터 H_∞ 노음 한계인 γ 의 값을 계산하면 0.0926으로 미리 설정한 $\gamma = 1$ 보다 작으므로 H_∞ 성능지수도 보장한다. 따라서, 구한 제어기는 파라미터 불확실성, 외란입력 및 시변 시간지연의 존재에도 불구하고 폐루프시스템의 정규성, 임펄스 프리, 점근적 안정성 뿐만 아니라 미리 선택한 γ 한계를 보장한다.

IV. 결 론

본 논문에서는 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 관측기 기반 H_∞ 출력케환 제어기 설계 방법과 존재조건을 블록최적화가 가능한 단 하나의 선형행렬부등식 접근방법에 의하여 제시하였다. 따라서, 제한한 조건은 제어기의 변수인 케환이득과 추정이득을 포함하는 모든 해가 동시에 구해질 수 있다는 장점이 있다. 기존의 존재하는 결과들이 출력케환 제어기를 설계하기 위해서 해가 서로 상호 결합된 2개 이상의 충분조건을 풀기 때문에 최적의 해를 구할 수 없다는 단점을 본 논문에서는 하나의 선형행렬부등식의 충분조건으로 제시하므로 해결하였다. 제안한 알고리즘은 일반적인 상태공

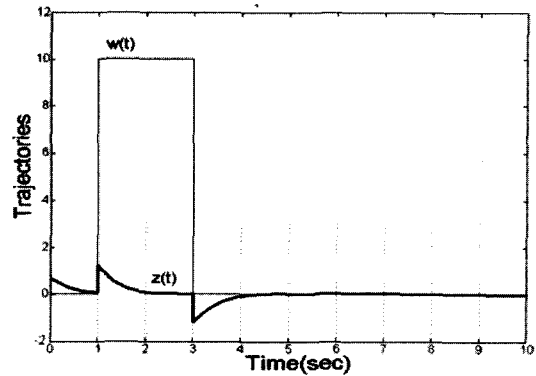


그림 1. $w(t)$ 와 $z(t)$ 의 궤적
Fig. 1. The trajectories of $w(t)$ and $z(t)$.

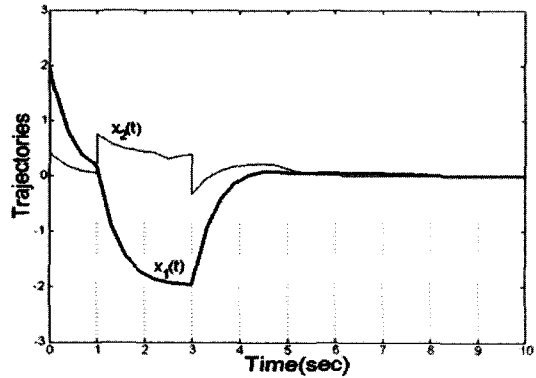


그림 2. 상태의 궤적
Fig. 2. The trajectories of states.

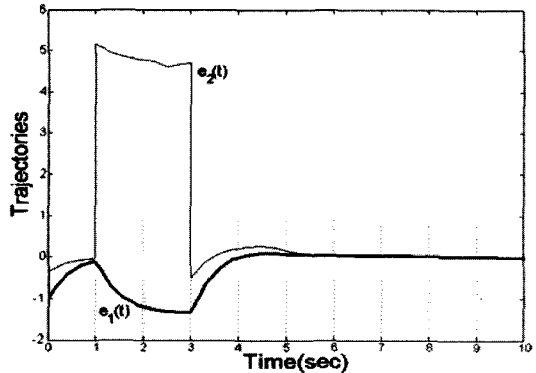


그림 3. 오차상태의 궤적
Fig. 3. The trajectories of error states.

간 모델에 대한 관측기 기반 H_∞ 제어기에 대한 설계 문제뿐만 아니라 파라미터 불확실성을 포함하는 시간지연 특이시스템의 제어기 설계문제에도 쉽게 확장 가능함을 보였다. 물론 제안한 알고리즘은 시간지연이 없는 특이시스템에도 적용가능하다. 수치 예제와 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안한 제어기 설계방법이 파라미터 불확실성과 시간지연을 가지는 특이시스템을 안정시키고, H_∞ 노음 한계를 만족함을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, " H_∞ control for descriptor systems: A matrix Inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.
- [2] D. J. Bender and A. J. Laub, "The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 32, pp. 672-688, 1987.
- [3] H. S. Wang, C. F. Yung, and F. R. Chang, "Bounded real lemma and H_∞ control for descriptor systems," *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, vol. 145, pp. 316-322, 1998.
- [4] J. D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 29, pp. 1076-1082, 1984.
- [5] F. L. Lewis, "Preliminary notes on optimal control for singular systems," *Proc. 24th Conf. on Decision and Control*, pp. 262-272, 1985.
- [6] A. Rehm and F. Allgöwer, " H_∞ control of descriptor systems with norm-bounded uncertainties in the system matrices," *Proc. American Control Conference*, pp. 3244-3248, 2000.
- [7] K. Takaba and T. Katayama, "Robust H_2 performance of uncertain descriptor systems," *Proc. European Control Conf., WE-E-B-2*, 1997.
- [8] S. S. Hung and T. T. Lee, "Memoryless H_∞ controller for singular systems with delayed state and control," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336, pp. 911-923, 1999.
- [9] K. Takaba, N. Morihara, and T. Katayama, "A generalized Lyapunov theorem for descriptor system," *Systems and Control Lett.*, vol. 24, pp. 49-51, 1995.
- [10] H. H. Choi and M. J. Chung, "Observer-based H_∞ controller design for state delayed linear systems," *Automatica*, vol. 32, pp. 1073-1075, 1996.
- [11] H. H. Choi and M. J. Chung, "Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control," *Automatica*, vol. 31, pp. 917-919, 1995.
- [12] J. H. Kim and H. B. Park, " H_∞ state feedback control for generalized continuous/ discrete time-delay system," *Automatica*, vol. 35, pp. 1443-1451, 1999.
- [13] M. Green and D. J. N. Limebeer, *Linear Robust Control*, Prentice-Hall International, Inc., 1995.
- [14] K. Gu, " H_∞ control of systems under norm bounded uncertainties in all system matrices," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 39, pp. 1320-1322, 1994.
- [15] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

저 자 소 개

김 종 해(정회원)
선문대학교 전자정보통신공학부