

논문 2004-41SC-3-1

# 유도전동기의 속도 제어를 위한 LQ-PID 제어기 설계

## (LQ-PID Controller Design for Speed Control of Induction Motor)

이 충 우\*, 서 병 설\*\*

(Chung-Woo Lee and Byung-Shul Suh)

### 요 약

유도전동기의 속도제어시 속도의 지연이나 과도한 오버슈트가 발생하는 문제점을 해결하고 급제동 혹은 제동시 입력 속도와 출력 속도의 오차를 줄이기 위해서 LQ-PID제어기를 제안한다. LQ제어기는 극점들을 상태궤환에 의해 오버슈트와 정착시간등과 같은 설계사양을 만족하는 위치에 배치하는 방법이다. 그러나 페루프 전달함수에 영점이 존재할때는 설계사양 오버슈트에 영향을 주므로 s-평면에서 기존의 LQ설계 방법으로는 이를 만족시킬수 없다. 본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 LQ제어기 설계시 페루프 전달함수의 영점이 오버슈트에 미치는 영향을 제거할 수 있는 해석적인 방안을 포함하는 새로운 LQ-PID제어기 설계 방법을 제안하고자 한다.

### Abstract

This paper proposes an LQ-PID controller to reduce errors occurring between input and output speeds in braking or emergency braking and to solve delay of speed or the excessive overshoot problems occurring at the speed control of induction motor. The conventional LQ controller is a method that move the poles in locations that satisfy design specifications such as overshoot and settling time etc. by state-feedback. So it may not be able to satisfy the overshoot requirement in case of the existence of zero in the closed loop transfer function. To attack this zero-problem, it is presented a new design methodology of LQ-PID controller by introducing an analytic technique to eliminate the effect of zeros on the closed loop transfer function.

**Keywords :** LQ, PID, Induction motor, Speed, Control

## I. 서 론

유도전동기는 기계적 구조가 견고하고 보수 점검 및 유지가 용이하며 가격이 비교적 저렴하다는 이점이 있다. 그러나 유도 전동기는 비선형특성<sup>[1]</sup>때문에 직류기에 비해 제어 성능이 저하되는 단점을 내포하고 있다.

따라서 제어 성능의 향상을 목표로 전동기 기술, 전력 변환기술, 제어기술 및 센서기술 등의 종합적 기술을 필요로 하는 유도 전동기 제어에 관한 연구는 이들 시스템에 관한 이론과 기술의 진보와 함께 유기적인 관계를 유지하며 발전하고 있다. 제어기술 관점에서 살펴보면 유도전동기의 속도 제어를 위해서는 이를 상태 공간상에서 표현하고 현대 제어 이론의 적용을 통해 과도상태와

정상상태를 전과정에서 고성능 제어 할 수 있는 제어 입력을 결정하는 것이다. G.M Liaw와 F.J. Lin<sup>[2]</sup>, Yoichi Hori<sup>[3]</sup>는 산업계 전반에서 폭넓게 사용되어 온 PI제어 방법을 이용하여 유도전동기의 속도 제어를 연구하였다. 그러나 PI제어 방법은 파라미터 변동이나 부하 외란으로 강인성 및 속응성이 결여되는 단점을 가지고 있다. 이와 같은 단점을 보완하기 위해서 C.Attaian -ese와 G.Tomasso<sup>[4]</sup>, Chu<sup>[5]</sup>는 파라미터 변동이나 부하 외란에 대해 강인성을 보장하는  $H^\infty$ 설계 방법을 이용하여 유도전동기의 속도추종이 잘 이루어지는 제어기 설계 방법을 연구하였다. 그러나  $H^\infty$ 를 이용한 설계는 모델의 고차화에 따른 설계과정의 복잡성 및 실현화에 대한 어려움이 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 설계상의 간편성과 강인성을 내포하는 Suh<sup>[6]</sup>의 LQ-PID제어기 설계 방법은 하나의 대안이 될 수 있다.

\* 학생회원, \*\* 정회원, 한양대학교 전기공학과  
(Dept. of Electronics Eng, Hanyang Univ.)

접수일자: 2003년11월7일 수정완료일: 2004년2월23일

본 연구에서는 유도전동기의 속도제어시 속도의 지연이나 과도한 오버슈트가 발생하는 문제점을 해결하고 운전시부터 급제동 혹은 재동시 입력 속도와 출력 속도의 오차를 줄일수 있는 LQ-PID제어기가 설계될 수 있음을 보이고자 한다. LQ제어기는 극점만을 제한에 의해 오버슈트와 정착시간등과 같은 설계사양을 만족하는 위치에 배치하는 방법이다. 그러나 폐루프 전달함수에 영점이 존재할 때는 설계사양 오버슈트에 영향을 주어 기존의 LQ설계 방법으로는 이를 만족시킬 수 없다. 본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 LQ제어기 설계 시 폐루프 전달함수의 영점이 오버슈트에 미치는 영향을 제거할 수 있는 해석적인 방안을 포함하는 새로운 LQ-PID제어기 설계 방법을 제안하고자 한다.

### II. 유도전동기 모델링

유도전동기의 기계적인 방정식은 토크 성분을 기본으로 식(1)과 같다.

$$T_e(t) = T_d(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) \quad (1)$$

여기서  $T_e(t) = K_e \times i_{sq}^*(t)$  이므로

$$K_e \times i_{sq}^*(t) = T_d(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) \quad (2)$$

식(2)를 라플라스 변환하면

$$K_e \times i_{sq}^*(s) = T_d(s) + (Js + B)\omega(s) \quad (3)$$

$T_d(s) = 0$  이면 식(4)와 같이 이상적인 플랜트가 설계된다.

$$\frac{\omega(s)}{i_{sq}^*(s)} = \frac{K_e}{Js + B} \quad (4)$$

이상적인 플랜트에서 고주파가 무시되어진 것에 대하여 보상하기 위해서  $H = \frac{(as+1)}{(bs+1)}$  를 직렬로 곱하여 주면 유도 전동기의 공칭 플랜트가 설계된다.

$$G_p(s) = \frac{K_e(as+1)}{(Js+B)(bs+1)} \quad (5)$$

[그림 1]은 식(5)를 기본으로 속도 제어기  $G_c(s)$ 를 결합한 블록선도이다.

$T_e(s)$  : 전동기토크,  $T_d(s)$  : 부하토크,  $K_e$  : 상수,  $i_{sq}^*(s)$  : 입력전류,  $\omega^*(s)$  : 입력속도,  $\omega(s)$  : 출력속도,

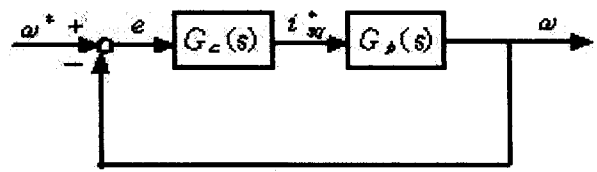


그림 1. 폐루프 시스템의 블록선도  
Fig. 1. The block diagram of closed loop system.

$B$  : 기계시스템 재동비,  $J$  : 회전자 관성 모멘트

### III. LQ-PID제어기 설계

유도전동기의 미분방정식은 다음과 같다.

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 u(t) \quad (6)$$

여기서  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \frac{J+Bb}{Jb}$ ,  $a_2 = \frac{B}{Jb}$ ,  $b_1 = \frac{K_e a}{Jb}$ ,

$b_2 = \frac{K_e}{Jb}$  이다.  $y(t)$ 는 출력변수,  $u(t)$ 는 제어변수,  $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$ 는 유도전동기 계수이고 출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수  $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (8)$$

여기서,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{Jb} & -\frac{J+Bb}{Jb} \end{bmatrix}$ ,

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_e a}{Jb} \\ \frac{K_e Jb - K_e Ja - K_e Bab}{(Jb)^2} \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

식(9)와 같은 2차 가격함수를 고려하자.

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (9)$$

여기서  $Q$ 는 양의 반한정 대칭행렬인 상태가중행렬이고,  $R$ 은 양의 한정 대칭행렬인 제어가중행렬이다. 그리고 제한 제어 법칙은 식(10)과 같다.

$$u(t) = -Gx(t) \tag{10}$$

$$G = -R^{-1}B^TK \tag{11}$$

여기서  $K$ 는 Riccati방정식의 유일한 해이다.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \tag{12}$$

$K$ 와  $Q$ 의 성분들은 식(13)과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \tag{13}$$

식(10)의 최적제어법칙은 LQ-PID제어기 형태가 된다.

$$u(t) = -\frac{1}{R} \left\{ (b_1K_{10} - b_2K_{20}) \int_0^t y(\tau) d\tau + (b_1K_{11} - b_2K_{21})y(t) + (b_1K_{12} - b_2K_{22}) \frac{dy(t)}{dt} \right\} \tag{14}$$

Riccati방정식 식(12)에 대입하고 LQ-PID 동조 파라미터를 구하기 위해서는  $K$ 를  $Q$ 에 관한 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$b_1K_{10} - b_2K_{20} = \sqrt{Q_{00}R} \tag{15}$$

$$b_1K_{11} - b_2K_{21} = \sqrt{(Q_{11} + 2(K_{10} - a_{21}K_{21}))R} \tag{16}$$

$$b_1K_{12} - b_2K_{22} = \sqrt{(Q_{22} + 2(K_{12} - a_{22}K_{22}))R} \tag{17}$$

식(15), (16), (17)의  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ 는 유도전동기의 계수임을 고려할 때 가중치요소  $Q$ 와  $R$ 에 의한 관계식임을 알 수 있다. 그리고 시간영역의 설계사양인 오버슈트나 정착시간을 만족할 수 있는  $Q$ 와  $R$ 의 선정은 다음장에서 제시하고자 한다.

#### IV. 가중치 요소 $Q$ 와 $R$ 의 선정

시간영역에서 오버슈트를 조절할 뿐만 아니라 고유주파수에 의해 정착시간도 조절할 수 있도록 LQR의 가격함수의 가중치요소  $Q$ 와  $R$ 를 선정하고자 한다.

기존의 LQ제어기 설계 방법<sup>[6]</sup>은 식(18)과 같은 목표(target) 3차 전달함수를 고려하여 극점만을 궤환에 의해 오버슈트와 정착시간등과 같은 설계사양을 만족하는 위치에 배치하는 방법이다.

$$F(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + \alpha \omega_n s^2 + \beta \omega_n^2 s + \omega_n^3} \tag{18}$$

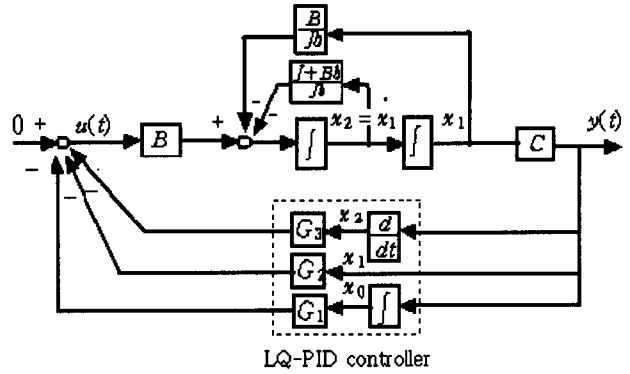


그림 2. LQ-PID제어기의 블록선도  
Fig. 2. The block diagram of LQ-PID controller.

식(18)이 오버슈트를 갖기 위해서는 근이 s-평면에서 두 개의 복소극점과 하나의 실수극점으로 존재해야 한다. 따라서 설계파라미터  $p$ ,  $r$ 값과 오버슈트와의 관계를 형성하고자 식(19)와 같이 표현한다.

$$F(s) = \frac{\omega_n^3}{(s + w_n/r)(s^2 + p w_n s + r w_n^2)} \tag{19}$$

그리고 식(19)의 오버슈트를 조절하는 설계 파라미터  $p$ ,  $r$ 과 정착시간을 조절하는 설계 파라미터  $w_n$ 을  $Q$ 와  $R$ 의 관계식으로 유도하여 설계사양인 오버슈트 및 정착시간에 만족하는  $Q$ ,  $R$ 를 선정함으로써 식(14)와 같은 LQ-PID제어기를 설계할 수 있다.

그리고 LQ-PID제어기의 블록선도는 [그림 2]와 같이 나타낼 수 있다.

[그림 2]는 식(5)의 영점이 존재하는 플랜트  $G_p(s)$ 와 LQ-PID제어기  $G_c(s)$ 를 결합한 형태로서 페루프 전달함수  $F(s)$ 는 식(20)과 같다.

$$F(s) = \frac{G_p(s) G_c(s)}{1 + G_p(s) G_c(s)} \tag{20}$$

식(20)을 정리하면 식(21)과 같이 표현할 수 있다.

$$F(s) = \frac{s^3 + \alpha_2 \omega_n s^2 + \beta_2 \omega_n^2 s + \omega_n^3}{s^3 + \alpha_1 \omega_n s^2 + \beta_1 \omega_n^2 s + \omega_n^3} \tag{21}$$

식(21)은 설계파라미터  $p$ ,  $r$ 값과 오버슈트와의 관계를 형성하고자 식(22)와 같이 표현한다.

$$F(s) = \frac{(s + w_n/r_2)(s^2 + p_2 w_n s + r_2 w_n^2)}{(s + w_n/r_1)(s^2 + p_1 w_n s + r_1 w_n^2)} \tag{22}$$

식(22)의 페루프 전달함수  $F(s)$ 와 식(19)의 목표(target) 3차 전달함수  $F(s)$ 를 비교하면 분모항은 같으나 페루프 전달함수  $F(s)$ 는 영점을 발생함을 볼 수 있

다. 페루프 전달함수  $F(s)$ 에 영점의 존재는 LQ제어기 설계시 오버슈트에 영향을 미치게 된다.<sup>[7]</sup>

따라서 설계사양에 만족하는 오버슈트를 선정하기 위해서는 영점의 영향은 고려대상이 되어야 한다. 그러므로 목표(target) 전달함수를 식(18) 대신에 식(21)을 고려해야 할 것이다.

이와 같은 영점이 오버슈트에 미치는 영향을 조직적으로 다루기 위해 식(22)는  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ ,  $F_4(s)$ 의 합으로 식(23)과 같이 표현할 수 있다.

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) \quad (23)$$

$$\text{여기서 } F_1(s) = \frac{s^3}{(s + w_n/r_1)(s^2 + p_1 w_n s + r_1 w_n^2)},$$

$$F_2(s) = \frac{(p_2 w_n + w_n/r_2)s^2}{(s + w_n/r_1)(s^2 + p_1 w_n s + r_1 w_n^2)},$$

$$F_3(s) = \frac{(r_2 w_n^2 + p_2 w_n^2/r_2)s}{(s + w_n/r_1)(s^2 + p_1 w_n s + r_1 w_n^2)},$$

$$F_4(s) = \frac{w_n^3}{(s + w_n/r_1)(s^2 + p_1 w_n s + r_1 w_n^2)} \text{이다.}$$

그리고  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ ,  $F_4(s)$ 는 각각 오버슈트를 갖고 있는 함수로 제안하며 페루프 전달함수  $F(s)$ 의 안정화를 위한 조건  $p > 0$ ,  $r > 0$ 이 전제 되어야 할 것이다.

이때, 이들 관계를 살펴보면  $F_3(s)$ 는  $F_4(s)$ 의 1차 미분형태,  $F_2(s)$ 는  $F_4(s)$ 의 2차 미분형태,  $F_1(s)$ 는  $F_4(s)$ 의 3차 미분형태임을 알 수 있다.

즉, 페루프 전달함수  $F(s)$ 는 식(19)와 같은 형태인 기본함수  $F_4(s)$ 와 영점의 영향을 가지고 있는 함수  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ 의 합이다.

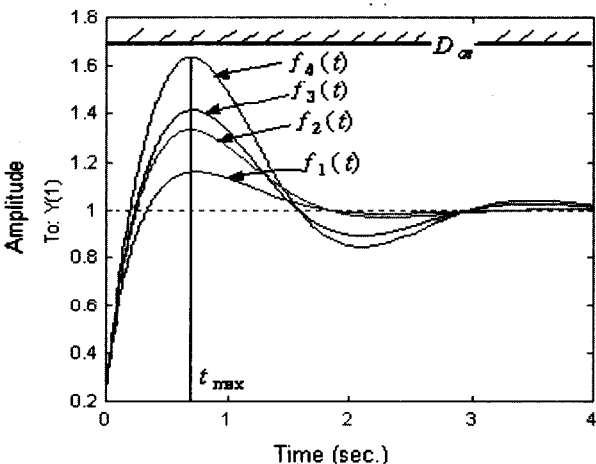


그림 3.  $t_{max}$  일 때  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ ,  $f_4(t)$ .  
 Fig. 3.  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ ,  $f_4(t)$  in  $t_{max}$

그러므로  $F_4(s)$ 는 영점을 포함하지 않는 함수이기 때문에 Suh<sup>[6]</sup>의 LQ-PID제어기 설계 방법을 이용하여 극점만을 케환에 의해 설계사양을 만족하는 위치에 배치하고  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ 는  $s=0$ 에서 영점들이 설계사양 오버슈트에 미치는 영향을 고려하여 설계사양으로 주어진 오버슈트를 넘지 않도록 설계파라미터  $p$ ,  $r$  값을 선정하는 방법을 제안하고자 한다.

$F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $F_3(s)$ ,  $F_4(s)$ 를 시간영역에서 나타내기 위해서 페루프 전달함수  $F(s)$ 의 기본함수인  $F_4(s)$ 를 역라플라스 변환하면 식(24)와 같이 표현할 수 있다.

$$f_4(t) = A e^{-\frac{w_n}{r}t} + e^{-p\frac{w_n}{2}t} \sqrt{B^2 + (-p\frac{w_n}{2}B + C)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{r - \frac{p^2}{4}}} \sin\left(\sqrt{r - \frac{p^2}{4}} w_n t + \phi\right) \quad (24)$$

$$\text{여기서 } A = \frac{r^3}{-r^3 + pr - 1}, \quad B = \frac{p - \frac{1}{r}}{r^2 - p + \frac{1}{r}},$$

$$C = w_n \frac{p^2 r - r^2 - p}{r^3 - pr + 1}, \quad D = (-p\frac{w_n}{2}B + C) \frac{1}{w_n} \left(\sqrt{r - \frac{p^2}{4}}\right)^{-1},$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{D}\right) \text{이다.}$$

$f_4(t)$ 의 최대 오버슈트를 갖는 시간은 식(25)와 같다.

$$t_{max} = \frac{1}{w_n \sqrt{r - p^2/4}} \left(\frac{2\pi}{4} + \phi\right) \quad (25)$$

식(25)는 식(24)에서 sine항만을 고려하여 sine함수의 주기인  $2\pi$ 에서 오버슈트가 처음으로 생기는  $1/4$ 지점에서 최대 오버슈트를 갖는 시간을 나타낸 것이다.

그리고  $t_{max}$ 에서 오버슈트를 생성하기 위한 조건은 식(24)의 sine함수가 존재하여야 함으로  $p^2 - 4r < 0$ 이 되며 이 조건은  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ 함수에서도 동일하게 적용된다.

[그림 3]에서  $D_{\alpha}$ 는 설계사양 오버슈트로서  $\pm\epsilon\%$ 를 초과하지 않는 최대값으로 정의하고  $t_{max}$ 에서  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ 는 지수함수인 식(24)를 계속적으로 미분한 형태이므로 계수만이 변화하며 최대 오버슈트는  $t_{max}$ 에서 일어난다.

따라서  $t_{max}$ 에서  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ ,  $f_4(t)$ 의 합이 페루프 전달함수  $f(t)$ 의 오버슈트이므로 각각의 오버슈트의 크기가 페루프 전달함수  $f(t)$ 의 오버슈트를

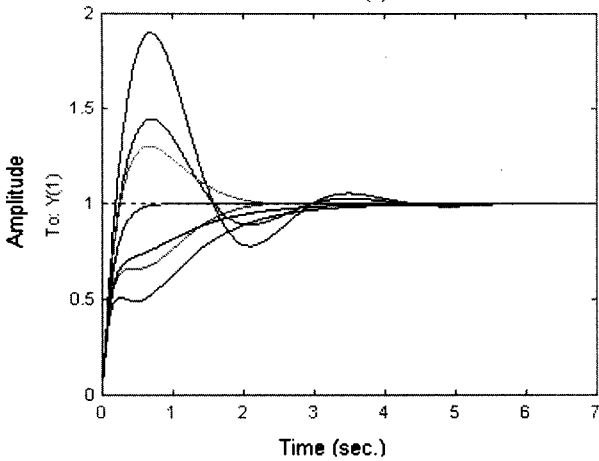


그림 4.  $p, r$ 의 변화에 따른 단위계단응답  
Fig. 4. Step response according to variations of  $p, r$ .

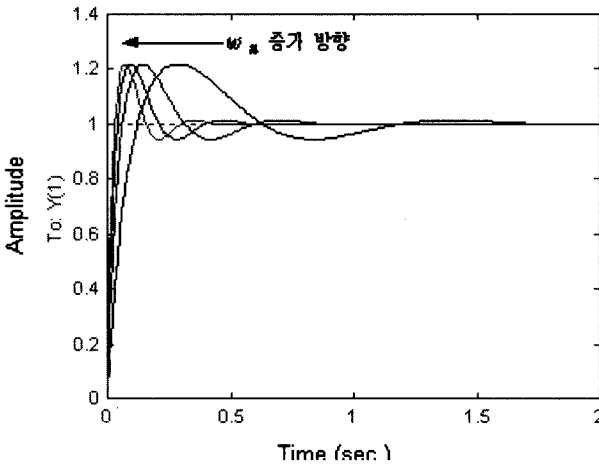


그림 5.  $w_n$ 의 변화에 따른 단위계단응답.  
Fig. 5. Step response according to variations of  $w_n$ .

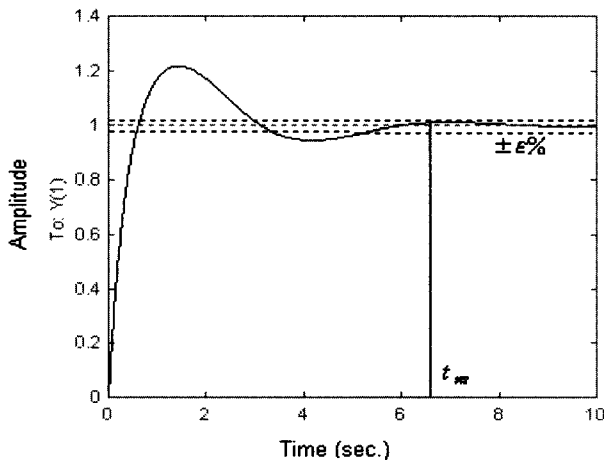


그림 6 정규화된 전달함수의 단위계단응답  
Fig. 6. Step response of the normalized transfer function

결정한다.

즉,  $t_{max}$ 에서  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 가 오버슈트

를 생성할 때 영점의 영향을 고려하여 설계사양 오버슈트  $D_{os}$  범위 안에 만족하는 페루프 전달함수  $f(t)$ 의 오버슈트를 선정하기 위해서는  $f_4(t)$ 의 조건은  $f_4(p, r) \leq D_{os}$ 이 된다.

그리고  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 의 합이 음수이면 페루프 전달함수  $f(t)$ 의 오버슈트 크기가 항상 설계사양 오버슈트  $D_{os}$  범위 안에 존재하게 된다.

즉, LQ-PID제어기 설계 시 오버슈트를 조절하기 위한 설계파라미터  $p, r$ 값이 설계사양 오버슈트  $D_{os}$  범위 안에 존재하기 위한 조건은  $f_1(p, r) + f_2(p, r) + f_3(p, r) < 0$ 이 된다.

이와 같이 제안된 조건들을 가지고 설계사양 오버슈트  $D_{os}$  범위 안에 만족하는 수많은 설계 파라미터  $p, r$  값이 준블록형 집합으로 그림 4와 같이 형성될 수 있으므로 블록형 최적화 기법<sup>[8]</sup>을 이용하면 설계사양 오버슈트  $D_{os}$  범위 안에 존재하는 설계 파라미터  $p, r$ 값을 선정할 수 있다. 따라서 LQ제어기 설계시 극점뿐만 아니라 영점의 영향을 고려할 수 있다.

먼저, Suh<sup>[6]</sup>의 LQ-PID제어기 설계 방법을 이용하여 식(23)에서  $F_4(s)$ 의  $p, r$ 과  $w_n$ 을 설계 파라미터로 활용한다.

[그림 4]에서는  $p, r$ 값에 따라 오버슈트가 변화하고 [그림 5]에서는 상승시간이나 정착시간이  $w_n$ 에 따라 변화함을 볼 수 있다.

그리고, 식(26)은 식(23)의  $F_4(s)$ 를 분자와 분모에  $w_n^3$ 로 나누고,  $\hat{s} = s/w_n$ 으로 놓으면  $w_n$ 에 대해서 정규화된 식으로 표현할 수 있다.

$$F_4(s) = \frac{1}{\hat{s}^3 + \alpha \hat{s}^2 + \beta \hat{s} + \gamma} \quad (26)$$

[그림 6]에서  $t_m$ 는 정상 상태값의  $\pm \epsilon\%$  범위 이내에 도달하는 정착시간이고  $t_s = \frac{t_m}{w_n}$ 의 관계를 이용하여 정착시간은 고유주파수  $w_n$ 으로 조절한다.

지금까지 설계파라미터  $p, r$ 값에 의해 오버슈트를 결정하고 설계사양에 부합하는 정착시간을  $w_n$ 에 의해 설계될 수 있음을 보았다.

다음은 이들 설계 파라미터들인  $p, r$ 과  $w_n$ 을 LQR의 가중치 요소  $Q$ 와  $R$ 과의 상호관계를 유도하기 위해 식(27)과 같이 페루프 상태 공간 모델식을 구한다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BG)x(t) \quad (27)$$

폐루프 시스템행렬  $A_c$ 는 식(28)로 표현된다.

$$A_c = A - BG = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서, } A_{10} &= \frac{-b_1^2 K_{10} + b_1 b_2 K_{20}}{R}, \\ A_{11} &= \frac{-b_1^2 K_{11} + b_1 b_2 K_{21}}{R}, \\ A_{12} &= \frac{R - b_1^2 K_{12} + b_1 b_2 K_{22}}{R}, \\ A_{20} &= \frac{b_2^2 K_{20} - b_1 b_2 K_{10}}{R}, \\ A_{21} &= \frac{b_2^2 K_{21} - b_1 b_2 K_{11} - a_{21} R}{R}, \\ A_{22} &= \frac{b_2^2 K_{22} - b_1 b_2 K_{12} - a_{22} R}{R} \text{ 이다.} \end{aligned}$$

폐루프 시스템의 특성방정식은 식(29)와 같다

$$\begin{aligned} \Delta = s^3 + (-A_{11} - A_{22})s^2 + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{10})s \\ + (A_{10}A_{22} - A_{12}A_{20}) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

식(23)에서  $F_4(s)$ 의 특성방정식을 식(30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta = (s + \omega_n/r)(s^2 + p\omega_n s + r\omega_n^2) \quad (30)$$

식(29) 극점들의 목표(target)함수라 할 수 있는 식(30)의 극점들과 일치하도록 LQ-PID제어기 파라미터  $K_{10}, K_{11}, K_{12}, K_{20}, K_{21}, K_{22}$ 를 정하는 극점 배치 문제로 생각할 수 있다.

이때, 설계 파라미터  $p, r$ 과  $\omega_n$ 이 가중치요소  $Q, R$ 과의 관계로 표현되기 위해서 식(29)와 식(30)의 계수들을 일치시키면 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$(p+1/r)\omega_n = -A_{11} - A_{22} \quad (31)$$

$$(r+p/r)\omega_n^2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} - A_{10} \quad (32)$$

$$\omega_n^3 = A_{10}A_{22} - A_{12}A_{20} \quad (33)$$

그리고 영점의 영향을 고려하여 설계 파라미터  $p, r$  값을 선정하기 위해 영점이 응답에 영향을 미치지 않게  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 의 크기의 합이 영보다 작다는 제약조건을 이용한다.  $F_4(s)$ 의 오버슈트는 항상 설계사양

오버슈트  $D_{os}$  범위 안에 위치한다. 따라서 설계 파라미터  $p, r$ 값을 선정하기 위해 볼록형 최적화 기법을 이용한다. 먼저,  $f_4(t)$ 의 최대 오버슈트  $\Phi_{os}$ 를 식(34)와 같이 정의한다.

$$\Phi_{os} \cong \sup_{t \geq 0} f_4(t) - 1 \quad (34)$$

식(35)는 준볼록형 최적화 기법에 의한 표현식이다.

$$\begin{aligned} \Phi_{os}(\lambda f_{41}(p_1, r_1) + (1-\lambda) f_{42}(p_2, r_2)) \\ \leq \lambda \Phi_{os}(f_{41}(p_1, r_1)) + (1-\lambda) \Phi_{os}(f_{42}(p_2, r_2)) \leq D_{os} - 1 \end{aligned} \quad (35)$$

여기서  $f_{41} : p_1, r_1$ 에 의해 형성되는 함수

$f_{42} : p_2, r_2$ 에 의해 형성되는 함수

$0 \leq \lambda \leq 1$  이다.

따라서 시간영역에서의 오버슈트는 준볼록형을 만족함으로  $\lambda$ 값에 따라 수많은  $p, r$ 의 집합을 형성할 수 있다. 또한  $p, r$ 값의 선정을 위해 식(36)과 같이 볼록형 최적화 문제로 표현할 수 있다.

최소화  $\Phi_{os}$

제약조건  $p, r > 0$

$$p^2 - 4r < 0$$

$$f_4(p, r) \leq D_{os}$$

$$f_1(p, r) + f_2(p, r) + f_3(p, r) < 0 \quad (36)$$

여기서,  $p, r > 0$ 은 전달함수의 안정화 조건,  $p^2 - 4r < 0$ 은  $t_{max}$ 에서 오버슈트를 생성하기 위한 조건,  $f_4(p, r) \leq D_{os}$ 는  $f_4(p, r)$ 가 설계사양 오버슈트  $D_{os}$ 범위 안에 존재하기 위한 조건,  $f_1(p, r) + f_2(p, r) + f_3(p, r) < 0$ 는 설계 파라미터  $p, r$ 값이 설계사양 오버슈트  $D_{os}$ 범위 안에 존재하기 위한 조건이다.

이와 같은 방법으로 영점의 영향을 고려하면 LQ-PID 제어기 설계 시 오버슈트를 조절할 수 있는 설계 파라미터  $p, r$ 값을 선정할 수 있다.

식(31),(32),(33)에서  $a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ 는 플랜트 계수이므로 결정된 값이고  $t_s = t_{ms} / \omega_n$ 의 관계식에서  $\omega_n$ 은 선정된다.  $R$ 은 입력의 에너지량을 나타내는 역할을 하고 있어서 순시응답에는  $Q$ 가 영향을 주므로  $R=1$ 로 놓으면 식(13)의  $Q_{00}, Q_{11}, Q_{22}$ 를 구할 수 있다. 이렇게 선정된  $Q, R$ 은 식(15), (16), (17)의 관계식에 의해 LQ-PID제어기 동조 계수를 결정할 수 있다.

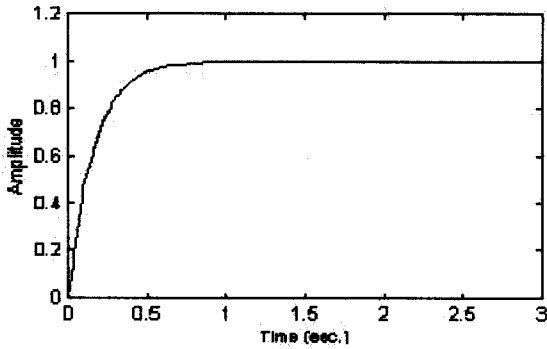


그림 7. 정규화된 전달함수의 단위계단응답  
Fig. 7. Step response of the normalized transfer function.

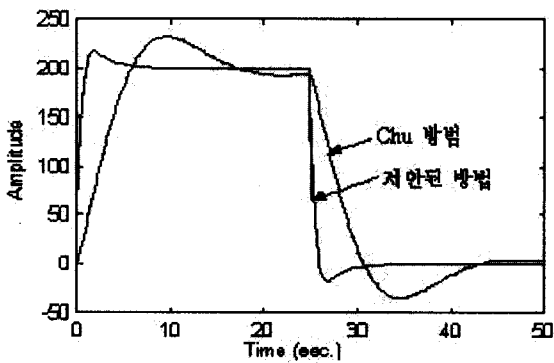


그림 8. Chu 방법과 제안된 방법의 펄스응답  
Fig. 8. Pulse response of Chu method and proposed method.

### V. 실험

유도전동기의 미분방정식은 다음과 같다.

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 u(t)$$

여기서  $a_0=1$ ,  $a_1 = \frac{J+Bb}{Jb}$ ,  $a_2 = \frac{B}{Jb}$ .

$b_1 = \frac{K_e a}{Jb}$ ,  $b_2 = \frac{K_e}{Jb}$  이다.

유도전동기의 설계사양은 다음과 같다.

$$K_e : 0.746 \text{ Nm/A}, \quad J : 0.0249 \text{ Nm s}^2/\text{rad},$$

$$B : 0.008 \text{ Nm s/rad}, \quad a : 0.021, \quad b : 0.01$$

설계사양 오버슈트  $D_\infty$ 는 4%범위로 설정하고, 정착시간은 정상상태응답의  $\pm 0.01\%$ 의 오차범위에 도달하는 시간으로 설정하고 정착시간  $t_s=0.25$ 로 제시하였다. 여기서 정규화된 그래프의 오버슈트와 정착시간의 범위를 작게 제시한 것은 Chu 방법과 비교하기 위해서이다. 그리고 설계사양에 만족하는 오버슈트를 구하기 위해 제안된 볼록형 최적화 기법을 이용하면  $p=1.55$

와  $r=0.14$ 이 선정된다.

[그림 7]과 같이  $w_n$ 에 대한 정규화된 그래프를 나타낼 수 있다. 정규화된 그래프로부터  $\pm 0.01\%$ 내에 도착하는 시간을  $t_{ns}=1$ 로 택하면  $w_n = 5 \text{ rad/s}$ 을 구할 수 있다.

그리고  $Q$ 와  $K$ 를 구하면 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1.6863 \times 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 4.8067 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0128 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0455 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0004 & 0.0010 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

따라서 LQ-PID제어기의 동조계수는 다음과 같다.

$$[K_p, K_i, K_d] = [3.168, 1.4317, 8.748 \times 10^{-4}]$$

[그림 8]에서는 Chu방법과 본 논문에서 제안한 LQ-PID제어기를 200 rpm에서 펄스응답곡선으로 비교하였다. 시뮬레이션 결과로부터 확인 할 수 있듯이 운전시부터 25초시의 급제동 또는 제동시 입력속도를 잘 추종함을 확인할 수 있었다. 또한 제안한 LQ-PID제어기 설계 방법은 Chu 방법보다 입력 속도와 출력 속도의 오차를 줄일 수 있음을 볼 수 있다.

### VI. 결 론

본 논문에서는 LQ-PID제어기 설계 방법을 이용하여 유도전동기의 속도제어시 속도의 지연이나 과도한 오버슈트가 발생하는 문제점과 운전시부터 급제동 혹은 제동시 입력 속도와 출력 속도의 오차를 줄일 수 있는 LQ-PID제어기가 설계될 수 있음을 보였다.

따라서를 이용한 설계 방법에서 모델의 고차화에 따른 설계과정의 복잡성 및 실현화에 대한 어려움을 설계상의 간편성과 강인성을 내포하는 LQ-PID제어기 설계 방법을 통해 개선 할 수 있었다. 그리고 LQ제어기 설계시 페루프 전달함수의 영점이 오버슈트에 미치는 영향을 제거하기 위한 해석적인 방법을 제시하고 볼록형 최적화 기법을 이용하여 설계사양에 만족하는 오버슈트 및 정착시간을 선정하는 새로운 LQ-PID제어기 설계 방법을 제안하였다.

### 참 고 문 헌

- [1] Y.-Y. Tzou, "DSP-Based Robust Control of AC Induction Servo Drive for Motion Control", IEE

- E Transactions on Control Systems Technology, Vol. 4. No. 6, November, 1996.
- [2] G.-M. Liaw & F.J.Lin, "A Robust Speed Controller for Induction Motor Drive", IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 41, No. 3, June, 1994.
- [3] Hirokazu Tajima and Yoichi Hori, "Speed Sensorless Field Orientation Control of the Induction Machine", IEEE Transactions on Industrial Applications, Vol. 29, PP. 175~180, Jan/Fed, 1993.
- [4] C. Ataianes and G. Tomasso, "Field Oriented Control of Induction Motor by means of a Controller", ISIE '99 Proceedings of the IEEE International Symposium on industrial electronics, Vol. 3, PP. 1238~1243, 1999.
- [5] A. Chu, E.P. Nowicki, T. Chen, "Design of a Robust Controller for a Compressor Driven by a Field Oriented Controlled Induction Motor", IEEE Canadian Conference on electrical & computer engineering, 1998.
- [6] Byung-Shul Suh, "Tuning of PID Regulators for a Second Order System via LQR Approach", International Conference on Electrical Machines, Brugge Belgium, PP. 25~28, August, 2002.
- [7] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, "Feedback Control of Dynamic Systems", Prentice Hall, 2002.
- [8] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe, Course Reader for EE364, "Introduction to Convex Optimization with Engineering Applications." Stanford University, 2001.
- [9] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, "State space solutions to standard and control problem", IEEE Trans. On Auto. Control, Vol. 34, PP. 831~847, 1989.
- [10] Yasuhiko Dote, "Application of Modern Control Techniques to Motor Control", Proceedings of the IEEE, Vol. 76, PP. 438~454, April, 1988.
- [11] F.J.Lin, "Robust speed-controlled induction motor drive using EKF and RLS estimator", IEE Proc. Electr. Power Appl., Vol. 143, No. 3, May, 1996.

---

 저 자 소 개
 

---



이 충 우(학생회원)  
 2002년 한양대학교 전자컴퓨터  
 전기제어공학부 학사.  
 2004년 한양대학교 전기공학과  
 석사.  
 현재 한솔 LCD 재직.



서 병 설(정회원)  
 2004년 현재 한양대학교  
 전자전기컴퓨터공학부  
 교수.