經營科學
第21卷 第1號
2004年 5月

다수상품 유통문제를 위한 내부점 방법에서의 Warm-Start*

임성묵** · 이상욱*** · 박순달***

Warm-Start of Interior Point Methods for Multicommodity Network Flow Problem*

Sungmook Lim** · Sangwook Lee*** · Soondal Park***

■ Abstract ■

In this paper, we present a methodology for solving the multicommodity network flow problems using interior point methods. In our method, the minimum cost network flow problem extracted from the given multicommodity network flow problem is solved by primal-dual barrier method in which normal equations are solved partially using preconditioned conjugate gradient method. Based on the solution of the minimum cost network flow problem, a warm-start point is obtained from which Castro's specialized interior point method for multicommodity network flow problem starts. In the computational experiments, the effectiveness of our methodology is shown.

Keyword : Multicommodity Network Flow Problem, Interior Point Method, Warm-Start

논문접수일 : 2003년 3월 10일 논문게재확정일 : 2004년 2월 19일
* 본 연구는 한국과학재단의 특정기초연구과제(과제번호 98-0200-07-01-2)의 지원을 받았음.
** 한국전산원
*** 서울대학교 산업공학과

1. 서 론

다수상품 유통문제(multicommodity network flow problem)는 대형의 생산계획, 수송계획, 사업계획 등의 수리계획 모형에서 자주 등장하는 형태의 문제이다[3]. 다수상품 유통문제에서는 동일한 네트워크 상을 흐르는 다수 개의 상품(commodity)이 존재하고, 네트워크의 각 호는 고유 용량과 함께 각 상품별로 서로 다른 유통 비용을 가지고 있다. 이러한 다수상품 유통문제는 기존의 최소비용문제에 비해 훨씬 더 복잡한 상황을 표현해 낼 수 있어 그 활용도가 매우 높다고 할 수 있다.

다수상품 유통문제에서의 제약조건은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 첫째는 각 상품이 공유하고 있는 네트워크 상에서 각 상품별 수요, 공급에 대한 제약식이다. 주어진 네트워크가 $G=(N, E)$이라고 하고, N은 $m+1$개의 마디(node)집합, E는 n개의 호(arc)집합이라고 하자. 그리고, G를 통해 흐르는 상품들의 개수를 k, 그 집합을 K라고 하자. 그러면, 각 상품별 수요, 공급에 대한 제약식은 다음과 같은 수식으로 표현될 수 있다.

$$A_N \boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{b}^{(i)}, i=1,\cdots,k \qquad (1)$$

위 식에서 $A_N \in R^{m \times n}$은 주어진 네트워크 G의 연결 상태를 표현하는 행렬(incidence matrix)이고, $\boldsymbol{x}^{(i)} \in R^n$는 상품 i의 E상의 흐름(flow), $\boldsymbol{b}^{(i)} \in R^m$는 상품 i의 N상의 수요, 공급량을 말한다. 이 제약식은 일반적인 최소비용문제에서 등장하는 형태이다. 최소비용문제와는 달리 다수상품 유통문제에서 부가적으로 나타나는 제약식은 각 상품이 공유하고 있는 E의 용량 상한에 관한 제약식이다. 즉, E에 속하는 각 호를 통해 흐르는 각 상품의 흐름량의 총합은 해당 호의 고유용량을 넘을 수 없다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}^{(i)} \le \boldsymbol{b}_{mc} \qquad (2)$$

이 식에서 $\boldsymbol{b}_{mc} \in R^n$는 E에 속하는 각 호가 가지는 고유용량을 나타낸다. 이러한 제약식을 상호용량제약식(mutual capacity constraint)이라고 한다.

위에서 언급된 두 가지 제약식과 함께, 각 상품별로 고유 용량 상한이 있을 수 있는데 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$0 \le x_a^k \le u_a^k, \text{ for all } a \in E \qquad (3)$$

단, x_a^k와 u_a^k는 각각 호 a에 흐르는 상품 k의 양과 그 상한을 뜻한다.

종합하여, 다수상품 유통문제는 위의 세 가지 제약식 (1), (2), (3)과 함께, 유통 비용을 최소화하는 것을 목적함수로 하는 다음과 같은 문제가 된다. 유통 비용은 상품별로 그 흐름량에 선형 비례하여 부과되며, 상품 i에 부과되는 각 호별 비용이 백터 $\boldsymbol{c}^{(i)}$라고 할 때 총 비용은 $\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{c}^{(i)})^T \boldsymbol{x}^{(i)}$로 계산된다. 결국, 다수상품 유통문제는 다음 (MNFP)와 같이 정형화된다.

$$\begin{aligned} & \min \ \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{c}^{(i)})^T \boldsymbol{x}^{(i)} \\ & s.t. \ (1),\ (2),\ (3) \end{aligned} \qquad \text{(MNFP)}$$

다수상품 유통문제는 k개의 최소비용문제와 함께 (2)와 같은 형태를 가지는 부가제약식(side constraint)로 이루어진다고 볼 수 있다. 만일 (2)와 같은 부가제약식을 제거한다면 다수상품 유통문제는 k개의 최소비용문제로 축소되고, 최소비용문제는 네트워크 단체법과 같은 알고리즘을 통해 아주 효과적으로 풀릴 수 있다. 즉, 다수상품 유통문제를 풀기 어려운 문제로 만드는 것은 (2)와 같은 부가제약식이라고 할 수 있다[5].

현재까지 다수상품 유통문제를 푸는 방법으로 이미 알려진 것들로는 크게 세 가지로 분류될 수 있다. 첫째는 price-directive 방법이고, 둘째는 resource-directive 방법, 셋째는 기저분할방법(partitioning method)이다[3]. Price-directive 방법은

각 상품들이 공유하고 있는 호에 비용(price)을 부여하여 (2)와 같은 상호용량제약식의 역할을 하도록 하는 방법이다. 라그랑지 완화방법과 Dantzig-Wolfe의 분해원리 등이 이러한 방법에 속하며, 각 호에 부여되는 최적비용을 구하기 위해 연속된 부문제들을 풀어나가게 된다. 이에 반해 Resource-directive 방법은 각 호의 용량을 각 상품별로 분배하여 주는 형식을 취한다. 최적 분배를 찾기 위해 price-directive 방법과 유사하게 연관된 부문제를 연속적으로 풀어간다. 기저분할방법은 다수상품 유통문제를 선형계획법 문제로 취급하여 단체법으로 풀 때 적용될 수 있는 방법이다. 즉, 다수상품 유통문제를 네트워크 제약식과 같은 특수구조를 가지는 선형계획법 문제로 보고, 이의 특성을 활용하여 단체법을 효율화한 방법이다. 기저분할방법에서는 기저행렬을 네트워크 제약식 부분과 부가제약식 부분으로 분할하여, 축소된 기저행렬의 역행렬을 유지한다. 부가제약식 개수의 크기를 가지는 축소된 기저를 활용하므로 전체 기저행렬을 유지하는 방법에 비해 아주 효과적이게 된다. 물론, 부가제약식을 제거한 k개의 최소비용문제를 푼 다음 쌍대단체법을 활용한 warm-start를 시도할 수도 있다. CPLEX, OSL과 같은 단체법 상용프로그램들에서는 네트워크 단체법과 쌍대단체법을 이용한 warm-start 방법을 취하고 있다. 그러나, 이러한 프로그램들에서는 기저분할 기법을 사용하지 않는다.

현재까지 알려진 실험 연구들에 의하면 기저분할방법이 가장 우수하다고 할 수 있다. 기저분할방법은 라그랑지 완화방법이나 Dantzig-Wolfe의 분해원리와 같이 대형의 컴퓨터를 필요로 하지 않고, 그 풀이속도가 월등하다[10]. 그러나, 단체법의 특성상 문제의 크기가 아주 대형이 될 경우 그 성능이 현저히 저하된다. 이러한 배경 하에서 문제의 크기에 비교적 둔감한 내부점 방법을 활용하는 방법들이 연구되기 시작하였다. 예를 들어, Kamath 등에 의해 다수상품 유통문제를 위한 내부점 방법이 개발되었는데, 지금까지 가장 낮은 계산복잡도를 가지는 해법으로 알려져 있다. 그러나, 효과적인 구현방법이 제시되지는 못하였다. 그 이후, Kamath는 Karmarkar의 사영법과 함께 선조절자 공액경사법(preconditioned conjugate gradient method)을 활용하는 알고리즘을 제안하였다. 또한, Choi와 Goldfarb 등[6]에 의해 문제의 특성을 활용하는 방법이 개발되었다. 그리고, Castro 등에 의해 다수상품 유통문제가 지니는 문제의 특성을 활용하여 선조절자 공액경사법을 사용하는 방법이 제시되었다[4]. 현재까지의 연구 결과를 볼 때, Castro 등에 의해 제안된 방법이 실용적 효과 측면에서 가장 뛰어나다고 할 수 있다.

단체법을 이용하여 다수상품 유통문제를 풀 때에는 최소비용문제를 k번 풀어서 그 최적해를 이용한 warm-start를 시도할 수 있다. 이러한 warm-start는 해법의 성능향상에 지대한 영향을 미치게 된다. 그러나, 내부점 방법을 이용하는 해법에서는 최소비용문제를 푼 결과를 활용하여 warm-start를 하는 시도가 아직 보고되지 않았다. 이는 해집합의 경계 근처에서 유발되는 내부점 방법의 나쁜 성질들에 대한 적절한 대응방법을 찾지 못했기 때문이라고 할 수 있다. 그러나, 절단평면법을 이용한 접근법에서 내부점 방법의 warm-start에 대한 연구는 Gondzio[8]에 의해 진행되었다.

본 연구에서는 내부점 방법을 이용하여 다수상품 유통문제를 풀기 위한 하나의 프레임워크를 제안한다. 이 프레임워크 [WarmStart]는 다음과 같이 전개된다.

[WarmStart]

단계 1 : (MNFP)에서 부가제약식 (2)를 제외한, k개의 최소비용문제로 구성된 문제를 선조절자 공액경사법을 활용한 내부점 방법으로 푼다.

단계 2 : 단계 1을 통해 얻어진 해를 수정한다.

단계 3 : 단계 2를 통해 얻어진 해를 초기해로 하여, Castro 등의 내부점 방법을 이용하여 (MNFP)를 푼다.

위의 프레임워크에서 단계 2는 단계 3에서 수행되는 내부점 방법의 반복회수를 줄이기 위한 효과적인 초기해를 구하는 부분으로서, 단계 1의 해를 이용하여 Castro 등의 내부점 방법을 위한 warm-start 점을 찾는 과정이다. 따라서, 이 프레임워크가 성공적으로 수행되기 위해서는 단계 2가 아주 중요하다. 본 연구에서는 다수상품 유통문제를 Castro 등의 내부점 방법을 이용하여 풀 때, wart-start할 수 있는 방법을 개발하였다.

본 논문의 구성은, 우선 2장에서 Castro 등에 의해 제안된 다수상품 유통문제를 위한 내부점 방법에 대해 소개한다. 그리고, 3장에서는 최소비용문제를 풀어 얻어진 해를 이용하여 다수상품 유통문제를 위한 내부점 방법의 warm-start 점을 구하는 방법의 개발 내용을 설명하고, 4장에서는 최소비용문제를 선조절자 공액경사법을 이용하여 푸는 기존의 해법을 소개한다. 마지막으로 5장에서는 제안된 기법에 대한 실험 내용을 분석한다.

2. 다수상품 유통문제를 위한 내부점 방법

우선, 선형계획법을 풀기 위한 일반적인 내부점 방법에 대한 설명은 [4, 7]을 참조한다. 내부점 방법의 계산 시간 중 가장 큰 비중을 차지하는 것은 해의 개선방향을 구하는 과정이다. 다수상품 유통문제를 선형계획법의 일종으로 취급하여 내부점 방법으로 풀려고 할 때에도 개선방향 계산 과정의 효율화가 필수적이다. 본 절에서는 Castro가 제안한 방법을 설명하고자 한다.

다수상품 유통문제의 제약식 행렬 형태는 다음과 같다. 단, 상품의 개수 k를 1이라고 가정하는데, 이는 앞으로의 논리 전개의 일반성을 잃게 하지 않는다.

$$A=\begin{bmatrix} A_N & 0 \\ G & I \end{bmatrix}$$

그리고, 규모화 행렬이 $\Theta=(\Theta_N, \Theta_{mc})$라고 하면 $A\Theta A^T$는 다음과 같은 형태를 가진다.

$$A\Theta A^T=\begin{bmatrix} A_N\Theta_N A_N^T & A_N\Theta_N G^T \\ G\Theta_N A_N^T & G\Theta_N G^T+\Theta_{mc} \end{bmatrix}$$

내부점 방법에서는 위와 같은 행렬을 이용하여 다음과 같은 방정식을 풀어 개선방향 $\Delta\boldsymbol{y}$을 구한다.

$$(A\Theta A^T)\Delta\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{b}},\ \overline{\boldsymbol{b}}=((\boldsymbol{b}^{(1)})^T,\ \boldsymbol{b}_{mc}^T)^T$$

그러나, $A\Theta A^T$는 상당히 밀집도가 높은 행렬이 되므로 $A\Theta A^T$를 촐레스키 분해하여 $\Delta\boldsymbol{y}$를 구하는 방법은 그 효율이 많이 떨어지게 된다. 이를 극복하기 위해, 방향을 구하는 식을 희소행렬로 이루어진 부분과 밀집행렬로 이루어진 부분으로 나누어, 희소행렬로 이루어진 부분은 촐레스키 분해를 이용하여 풀고, 밀집행렬로 이루어진 부분은 선조절자 공액경사법(preconditioned conjugate gradient method)을 이용하여 푼다. 이 방법을 상세히 설명하면 다음과 같다.

$$B=A_N\Theta_N A_N^T,\ C=A_N\Theta_N G^T,\ D=G\Theta_N G^T+\Theta_{mc}$$

라고 하고 방향 $\Delta\boldsymbol{y}$를 $\Delta\boldsymbol{y}_1$, $\Delta\boldsymbol{y}_2$로, $\overline{\boldsymbol{b}}$를 $\overline{\boldsymbol{b}}_1$, $\overline{\boldsymbol{b}}_2$로 분해하면 $\Delta\boldsymbol{y}$는 다음과 같이 두 단계를 거쳐 계산된다.

$$(D-C^TB^{-1}C)\Delta\boldsymbol{y}_2=(\overline{\boldsymbol{b}}_2-C^TB^{-1}\overline{\boldsymbol{b}}_1) \quad (4)$$

$$B\Delta\boldsymbol{y}_1=(\overline{\boldsymbol{b}}_1-C\Delta\boldsymbol{y}_2) \quad (5)$$

여기서, B의 희소도는 그리 높지 않기 때문에, 식 (5)를 풀 때에 촐레스키 분해를 사용하여도 무방하다. 그러나, $D-C^TB^{-1}C$는 밀집도가 아주 높은 행렬이 되므로 식 (4)는 촐레스키 분해를 사용하여 풀지 못하고 선조절자 공액경사법을 활용하여 푼다.

공액경사법의 효율을 극대화하기 위해서는 선조절자의 사용이 필수적인데, 이것은 공액경사법의 수렴속도를 빠르게 하여 전체적인 수행 성능을 높

인다. 선조절자의 선택에 대해서는 4장에서 자세히 설명한다.

3. 최소비용문제의 해를 이용한 내부점 방법의 Warm-Start

단체법을 이용하여 다수상품 유통문제를 풀 때에는, k개의 최소비용문제를 풀어 그 결과를 쌍대 단체법의 초기해로 삼아 warm-start를 할 수 있다. 그러나, 내부점 방법을 활용하여 다수상품 유통문제를 푸는 경우, 최소비용문제의 해를 이용하여 warm-start를 시도하는 방법에 대해서는 아직 연구결과 보고가 없었다. 그러나, 다수상품 유통문제를 절단평면법을 이용하여 풀 때, 내부점 방법의 warm-start 방법에 대한 연구는 Gondzio 등에 의해 이루어 졌다. 본 절에서는 k개의 최소비용문제를 푼 다음, 그 해를 이용하여 부가제약식을 첨가한 원래의 다수상품 유통문제를 내부점 방법을 이용하여 풀려고 할 때, 효과적으로 warm-start할 수 있는 방법을 제시한다.

내부점 방법에서의 warm-start 방법에 대한 연구는 주로 정수계획법에서 이루어 졌다. 정수계획법에서는 서로 크게 다르지 않는 연관된 선형계획법 문제를 연속적으로 풀어야 하므로 효과적인 warm-start가 상당히 중요하다. 내부점 방법에서 warm-start가 성공하기 위해서는 해집합의 경계면에 근접해 있는 내부해를 적절히 해집합의 중심으로 옮기는 작업이 필수적인데, 이러한 관찰을 바탕으로 Hipolito[9]는 현재의 해를 해공간의 중심으로 옮기기 위한 특수한 방향을 고안하였고, Lustig등은 단순 섭동법(simple perturbation)을 고안하였다.

다수상품 유통문제에 내재된 k개의 최소비용문제가 결합된 형태가 (P)와 같다고 하면, 그 쌍대문제는 (D)와 같이 된다. 여기서는 설명의 간결성을 위해 $\boldsymbol{x}$에 대한 상한은 없다고 가정한다.

$$
\text{(P)}\quad \begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t.\ & A_C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\ge 0 \end{aligned}
\qquad
\text{(D)}\quad \begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ s.t.\ & A_C^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\ge 0 \end{aligned}
$$

단, $A_C=\begin{pmatrix} A_N & & & \\ & A_N & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_N \end{pmatrix}$ 이다.

위의 최소비용문제를 내부점 방법을 이용하여 푼다고 가정하고, 그 최종해가 $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$, $\bar{\boldsymbol{z}}$라고 하자. 그리고, 임의의 벡터 $\boldsymbol{t}\in R^n$에 대해 행렬 $T\in R^{n\times n}$는 $diag(\boldsymbol{t})$, 즉 단위행렬 $I\in R^{n\times n}$의 대각 요소값이 벡터 $\boldsymbol{t}$의 각 요소값들로 대치된 행렬이라고 정의하자. 그러면, 쌍대간격(duality gap)이 $n\mu$($\mu>0$, 아주 작은 실수)인 내부점 방법의 최종해가 가지는 특성에 의해 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$
\begin{aligned}
& A_C\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b} \\
& A_C^T\bar{\boldsymbol{y}}+\bar{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{c} \\
& \overline{XZ}\boldsymbol{e}=\mu\boldsymbol{e} \\
& \bar{\boldsymbol{x}}>0,\ \ \bar{\boldsymbol{z}}>0
\end{aligned}
$$

비가능 내부점 방법을 사용한다고 했을 때, $\boldsymbol{b}-A_C\bar{\boldsymbol{x}}$와 $\boldsymbol{c}-A_C^T\bar{\boldsymbol{y}}-\bar{\boldsymbol{z}}$가 영이 아닐 수도 있지만, 최적해 근처에서 거의 원가능성(primal feasibility)과 쌍대가능성(dual feasibility)이 만족되므로 영으로 간주하겠다.

여기에, n개의 부가제약식이 첨가되어 다음과 같은 형태가 되었다고 하자.

$$
\text{(P1)}\quad \begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t.\ & A_C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & G\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}_{mc} \\ & \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{s}\ge 0 \end{aligned}
$$

$$
\text{(D1)}\quad \begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}_{mc}^T\boldsymbol{w} \\ s.t.\ & A_C^T\boldsymbol{y}-G^T\boldsymbol{w}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{z}\ge 0 \end{aligned}
$$

(단, $G\in R^{n\times kn}$, $\boldsymbol{b}_{mc}\in R^n$)

(P1)에서는 (P)에 없던 변수 $\boldsymbol{s}$가, (D1)에서는 (D)에 없던 변수 $\boldsymbol{w}$가 새로 도입되었는데, 이 변수들의 값을 각각 $\tilde{\boldsymbol{w}}=\varepsilon \boldsymbol{e}(\varepsilon > 0)$, $\tilde{\boldsymbol{s}}=\mu\,\tilde{\boldsymbol{w}}^{-1}\boldsymbol{e}$라고 하고 $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$, $\bar{\boldsymbol{z}}$와 함께 (P1), (D1)의 해라고 하자. 또한, $\boldsymbol{r}_p=\boldsymbol{b}_{mc}-G\bar{\boldsymbol{x}}-\tilde{s}$, $\boldsymbol{r}_d=\boldsymbol{c}-A_C^T\bar{\boldsymbol{y}}+G^T\tilde{\boldsymbol{w}}-\bar{\boldsymbol{z}}$라고 정의하자. 그러면, 선형계획법의 최적조건을 구성하는 원비가능성(primal infeasibility), 쌍대비가능성(dual infeasibility), 상보여유조건(complementary slackness condition)은 다음과 같이 표현된다.

원비가능성 : $\|\boldsymbol{b}-A_C\bar{\boldsymbol{x}}\|=0$

$$\|\boldsymbol{b}_{mc}-G\bar{\boldsymbol{x}}-\tilde{s}\|=\|\boldsymbol{r}_p\|=\psi_p$$

쌍대비가능성 :

$$\|\boldsymbol{c}-A_C^T\bar{\boldsymbol{y}}+G^T\tilde{\boldsymbol{w}}-\bar{\boldsymbol{z}}\|=\|\boldsymbol{r}_d\|=\psi_d$$

상보여유조건 : $\overline{XZ}=\mu\boldsymbol{e}$, $\widetilde{\boldsymbol{W}}\,\widetilde{S}\,\boldsymbol{e}=\mu\boldsymbol{e}$

여기서, ε의 값을 아주 작게하면 ψ_d가 아주 작게 되어 쌍대비가능성이 거의 영에 가깝게 되지만, 일반적인 경우에 원비가능성을 나타내는 ψ_p는 아주 큰 값을 지니게 된다. 한편, 상보여유조건은 쌍대 간격 $(n+p)\mu$로 거의 만족된다.

이론적으로 비가능 내부점 방법에서는 원, 쌍대 비가능성이 쌍대 간격보다 훨씬 더 빨리 영으로 수렴한다. 이는 실험적으로도 검증되었다. 그러나, 위의 상황을 볼 때, 원비가능성이 쌍대 간격에 비해 훨씬 크므로 불균형이 이루어진 상태이다. 그러므로 이러한 해를 초기해로 사용하여 내부점 방법을 진행하면 상당한 수치적 불안정성이 발생하게 된다. 따라서, 우리는 $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{z}}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$를 적절히 움직여서 원비가능성을 줄이고, 쌍대비가능성 및 상보여유조건은 최대한 그대로 유지하려고 한다. 이것은 상대적으로 크기가 큰 원비가능성을 줄임으로써, 세 가지 최적조건간의 불균형을 보정하는 시도라고 할 수 있다.

우선, 우리의 목적을 수행하기 위한 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$의 증분(increment)을 $\Delta\boldsymbol{x}$, $\Delta\boldsymbol{y}$, $\Delta\boldsymbol{z}$라고 하자. 그러면, 원비가능성을 영으로 만들기 위해서는 다음과 같은 관계가 만족되어야 한다.

$$A_C(\bar{\boldsymbol{x}}+\Delta\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$$

$$G(\bar{\boldsymbol{x}}+\Delta\boldsymbol{x})+\tilde{s}=\boldsymbol{b}_{mc}$$

따라서, $\Delta\boldsymbol{x}$는 다음과 같은 식을 통해 구해 질 수 있다.

$$A_C\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-A_C\bar{\boldsymbol{x}}=0$$

$$G\Delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_{mc}-G\bar{\boldsymbol{x}}-\tilde{s}=\boldsymbol{r}_p$$

여기서, $A_C\in R^{km\times kn}$, $G\in R^{n\times kn}$이다. 만일 $Rank(A_C^T\,G^T)^T=km+n$이라고 하면, $\Delta\boldsymbol{x}$는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{x}&=(A_C^TG^T)\left[\begin{pmatrix}A_C\\G\end{pmatrix}(A_C^T\;G^T)\right]^{-1}\begin{pmatrix}0\\\boldsymbol{r}_p\end{pmatrix}\\&=(A_C^TG^T)\begin{pmatrix}A_CA_C^T & A_CG^T\\GA_C^T & GG^T\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\\boldsymbol{r}_p\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$B=A_CA_C^T$, $C=GG^T$, $D=A_CG^T$, $H=C-D^TB^{-1}D$라고 하면,

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{x}&=(A_C^T\;G^T)\begin{pmatrix}B & D\\D^T & C\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\\boldsymbol{r}_p\end{pmatrix}\\&=(A_C^T\;G^T)\begin{pmatrix}B^{-1}+B^{-1}DH^{-1}D^TB^{-1} & -B^{-1}DH^{-1}\\-H^{-1}D^TB^{-1} & H^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\boldsymbol{r}_p\end{pmatrix}\\&=(G^TH^{-1}-A_C^TB^{-1}DH^{-1})\boldsymbol{r}_p\\&=(G^T-A_C^TB^{-1}D)H^{-1}\boldsymbol{r}_p\end{aligned}$$

위에서 구해진 $\Delta\boldsymbol{x}$를 따라, 다음과 같이 개선폭(step length) α_x만큼 $\boldsymbol{x}$의 현재 값을 수정하여 $\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}$을 얻는다.

$$\bar{\bar{\boldsymbol{x}}}=\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha_x\Delta\boldsymbol{x},$$

$$\alpha_x=\lambda\times max\{\alpha:\ \bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\Delta\boldsymbol{x}\geq 0,\ \alpha\leq 1\},$$

$$0<\lambda<1$$

만일, 개선폭 α_x가 1이라면, 원가능성이 완전히 회복되게 된다. 그러나, $\boldsymbol{x}$의 비음조건 때문에 1보다 적은 개선폭을 취해야 하는 경우가 발생할 수 있다.

우리는 상보여유조건은 최대한 그대로 유지하기로 하였으므로, $\boldsymbol{x}$가 움직임에 따라 $\boldsymbol{z}$도 적절히 움직여야 한다. 즉, $\boldsymbol{z}$의 증분을 $\Delta\boldsymbol{z}$라고 할 때, 다음과 같은 관계가 성립되어야 한다.

$$(\overline{X}+\alpha_x\Delta X)(\overline{Z}+\Delta Z)\boldsymbol{e}=\mu\boldsymbol{e}$$

이 식을 정리하면, $\Delta\boldsymbol{z}$는 다음과 같다.

$$\Delta\boldsymbol{z}=-\alpha_x(X+\alpha_x\Delta X)^{-1}Z\Delta X\boldsymbol{e}$$

물론, 이때에는 $\boldsymbol{z}$의 비음조건은 항상 만족되므로 개선폭은 1이 된다. 이를 통해 볼 때, 상보여유조건이 계속 동일하게 유지될 수 있다는 것을 알 수 있다.

이제, 쌍대비가능성을 최대한 그대로 유지하기 위한 방법을 살펴보자. $\boldsymbol{z}$가 $\Delta\boldsymbol{z}$를 따라 개선폭 1 만큼 움직이게 되면 쌍대비가능성은 더 커지게 될 수 있으므로 $\boldsymbol{y}$를 적절히 움직여서 쌍대비가능성을 최대한 줄이도록 하여야 한다. 이를 위해, $\boldsymbol{y}$의 증분 $\Delta\boldsymbol{y}$에 대해 다음과 같은 관계가 성립하여야 한다.

$$A_C^T(\boldsymbol{y}+\Delta\boldsymbol{y})-G^T\widetilde{\boldsymbol{w}}+(\boldsymbol{z}+\Delta\boldsymbol{z})=\boldsymbol{c}$$
$$\Rightarrow\ A_C^T\Delta\boldsymbol{y}=-\Delta\boldsymbol{z}$$

따라서, 쌍대비가능성을 최대한 영으로 만들 수 있도록 최소자승법을 활용하면, $\Delta\boldsymbol{y}$는 다음과 같은 값을 취하여야 한다.

$$\Delta\boldsymbol{y}=-(A_CA_C^T)^{-1}A_C\Delta\boldsymbol{z}$$

$\boldsymbol{y}$는 자유변수이므로 개선폭의 제한은 없다. 그러나, $\Delta\boldsymbol{y}$를 따라 개선폭 1만큼 이동한다고 해도 쌍대가능성이 완전히 회복되지는 않는다.

종합적으로 볼 때, 앞에서 설명한 방법은 원쌍대비가능성과 상보여유조건 사이에 발생한 불균형을 조정하여 균형을 이루게 하는 방법이라고 할 수 있다. 이는 비가능내부점 방법의 성공적 수행을 위해 필수적이다.

내부점 방법에서의 warm-start 방법에 대한 연구들에서 자주 언급되는 내용은 내부점 방법의 조기종료(early termination)이다. 조기종료는 본 연구의 방법에서도 상당히 중요한데, 이는 $\boldsymbol{x}$가 $\Delta\boldsymbol{x}$를 따라 개선폭 1 만큼 움직이지 못하고, 비음조건을 만족시키기 위해 적절한 개선폭 α_x을 취하기 때문이다. 즉, 개선폭을 크게 하기 위해서는 $\boldsymbol{x}$가 해집합의 경계영역에서 적당히 떨어져 있어야 하기 때문이다. 이를 위해 본 연구에서는 쌍대간격이 10^{-3}정도 되었을 때, 최소비용문제를 푸는 내부점 방법을 종료하고 warm-start를 시도한다. 또한, warm-start에서 초기해로 선택되는 내부해가 중심경로(central path)상에 근접해 있을 때 가장 효과가 크므로 최소비용문제를 푸는 내부점 방법의 종료 시점에 중심방향으로 현재의 해를 유도하는 다중중심수정법[7]을 적용하여 현재 해의 중심성(centrality)를 높였다.

4. 최소비용문제를 위한 내부점 방법

본 연구에서는 다수상품 유통문제를 내부점 방법으로 풀기 위해, 우선 k개의 최소비용문제를 먼저 풀어 얻어진 최적해를 수정하여 warm-start를 시도한다. 최소비용문제를 풀어 최적해를 얻기 위해서는 네트워크 단체법과 같은 아주 효과적인 방법이 있지만, 내부점 방법의 warm-start를 위한 초기해를 생성하기 위해서는 부적절한 방법이라고 할 수 있다. 따라서, 본 연구에서는 최소비용문제를 풀기 위해 내부점 방법을 사용한다. 내부점 방법을 사용하여 최소비용문제를 풀 때에도 단체법의 경우와 마찬가지로 네트워크 특성을 활용할 수

있다. 본 절에서는 최소비용문제를 풀기 위해 기존의 방법들 중, 본 연구에서 사용한 방법에 대해 설명한다. 단, k개의 최소비용문제가 결합된 문제를 푸는 것과 1개의 최소비용문제를 푸는 것은 내부점 방법상 동일하므로, 본 절에서는 k가 1이라고 가정한다.

최소비용문제를 푸는 해법으로는 여러 가지가 개발되어 왔는데 내부점 방법이 나오기 전에는 네트워크 단체법이 많이 사용되어 왔다. 그러나 대형 최소비용문제에 있어서는 내부점 방법도 적용되고 있다. 해의 정수조건을 제거하여 최소비용문제를 완화시키면, 선형계획법과 같은 형태로 모형화될 수 있기 때문에 일반적인 선형계획법 문제에서 사용한 촐레스키 분해를 이용하는 내부점 방법을 그대로 적용해도 되지만 이러한 경우에 제약식 행렬이 가지는 특수성으로 인해 효율적이지 못하다. 최소비용문제를 선형계획법 모형으로 바꾸어 내부점 방법을 적용할 때, 개선방향을 구하기 위해 다음과 같은 선형방정식을 풀어야 한다.

$$(A_N \Theta A_N^T)\,\Delta \mathbf{y} = b \tag{6}$$

방정식 (6)을 풀기 위해서, 촐레스키 분해를 사용한다면 많은 수의 추가요소(fill-in)가 발생하여 그 효율이 떨어지게 되고, 네트워크 단체법에 비해 효과적이지 못하게 된다. 이와 같은 문제점을 극복하기 위해 촐레스키 분해 대신 공액경사법을 적용하는 것이 하나의 대안이 된다. 선조절자(preconditioner)는 공액경사법에서 해의 수렴도를 높이기 위한 수단으로서, 방정식 (6)을 다음과 같이 수정하여 공액경사법을 수행한다.

$$M^{-1}(A_N \Theta A_N^T)\Delta \mathbf{y} = M^{-1}\mathbf{b}$$

위 식에서 가역인 행렬 M이 선조절자에 해당되고, 이 선조절자가 $A_N \Theta A_N^T$와 유사할수록 위 식이 더 풀기 쉬워지는 것은 명백하다. 한편, 공액경사법에 선조절자를 적용하게 되면, M^{-1}을 계산해야 하므로 선조절자 M은 역행렬을 쉽게 계산할 수 있도록 고안되어야 한다. 이러한 선조절자들로는 야코비 선조절자(Jacobi preconditioner), 극대 연결목 선조절자(maximal spanning tree preconditioner), 불완전 촐레스키 분해 선조절자(incomplete Cholesky factorization preconditioner)등이 있다.

극대 연결목 선조절자 공액경사법은 주어진 최소비용문제의 네트워크로부터 극대 연결목을 구하여 극대 연결목에 포함되는 호들만으로 구성된 네트워크를 표현하는 행렬(incidence matrix) A_S를 구한 다음, $A_S \Theta_S A_S^T$을 선조절자로 사용하는 방법이다. 극대 연결목을 구하기 위한 가중치(weight)로는 내부점 방법에서 나타나는 규모화 행렬 Θ를 사용한다. Θ를 이용하여 극대 연결목을 구하는 경우에 최적해에서 극대 연결목이 최적기저에 대응되는 특성을 가진다. 따라서, 최적해에 도달했을 때에는 극대 연결목 선조절자를 적용하면 바로 선형방정식의 해를 얻을 수 있게 된다. 극대 연결목 선조절자는 이와 같이 내부점 방법이 진행함에 따라서 점점 공액경사법의 반복수를 줄여가게 된다. 한편, A_S가 나무(tree)인 특성을 가지고 있어서, 극대 연결목 선조절자 $A_S \Theta_S A_S^T$는 적당한 행과 열의 치환을 통해 비대각요소를 하나씩만 가지는 하삼각행렬로 변환될 수 있다. 따라서, 그 역행렬을 필요로 하는 방정식이 간단한 일련의 치환연산만으로 풀릴 수 있다.

극대 연결목 선조절자가 내부점 방법의 초기에는 효과적이지 않기 때문에 해법 초기에는 좀 더 간편하여 계산량이 많지 않은 야코비 선조절자를 사용하고, 해법의 후반기에만 극대 연결목 선조절자를 적용하는 방법이 사용되기도 한다. 야코비 선조절자는 $diag(A_N \Theta A_N^T)$를 선조절자로 사용하는 방법이다. 단, 임의의 행렬 K에 대해 $diag(K)$는 단위행렬 I의 대각요소가 행렬 K의 대각요소로 대치된 행렬을 뜻한다. 이러한 방법에서는 언제 극대 연결목 선조절자로 바꾸어 사용할 것인가가 해법의 효율성에 영향을 미치는 중요한 요건이 된다.

불완전 촐레스키 분해 선조절자는 극대 연결목 선조절자와 야코비 선조절자의 장점을 함께 가지도록 하기 위하여 고안된 선조절자이다. 불완전 촐레스키 분해 선조절자는 $M=A_S\Theta_S A_S^T+\Lambda$인데, $\Lambda=\alpha\times diag(A_N\Theta A_N^T)$이다. 예를 들어, $\alpha=1$인 경우에는 극대 연결목 선조절자에 야코비 선조절자가 합쳐진 형태가 되고, 보다 $A_N\Theta A_N^T$에 가까운 값을 가지는 선조절자가 된다. $M=A_T\Theta_T A_T^T+\Lambda$의 촐레스키 분해는 $O(m)$의 계산량만을 필요로 하므로[1], M^{-1}가 쉽게 계산될 수 있다. 불완전 촐레스키 분해 선조절자는 실제로 내부점 방법의 후반기에는 극대 연결목 선조절자와 같이 공액경사법의 반복수를 1에 수렴하여 줄어들도록 하는 효과를 가지고, 해법의 전반기에도 야코비 선조절자보다 공액경사법의 반복수를 더욱 줄여 주어 내부점 방법의 전체적인 수행도 향상을 가져온다.

이러한 기존 연구결과를 바탕으로, 본 연구에서는 최소비용문제를 풀기 위한 방법으로 불완전 촐레스키 분해 선조절자 공액경사법을 활용한 내부점 방법[1]을 사용하였다.

5. 예비 실험 결과 및 결론

본 연구에서는 내부점 방법을 이용하여 다수상품 유통문제를 풀기 위한 새로운 방법을 제시하였다. 이 방법에서는 다수상품 유통문제를 구성하는 일부분인 k개의 최소비용문제를 푼 다음, 그 해를 이용하여 다수상품 유통문제 전체를 내부점 방법으로 풀 때 warm-start를 시도한다. 다수상품 유통문제를 풀기 위한 내부점 방법은 Castro가 제안한 방법을 사용하였으며, 최소비용문제를 풀기 위한 해법으로는 불완전 촐레스키 분해 선조절자 공액경사법에 기반한 내부점 방법을 사용하였다. 최소비용문제를 풀어서 얻어진 해를 이용하여 효과적인 warm-start를 시도하기 위해 본 연구에서 제시한 방법은, 부가제약식의 도입으로 인해 발생하는 원비가능성, 쌍대비가능성 및 상보여유조건 사이의 불균형을 조정하여 균형을 이루게 하는 방법이라고 설명할 수 있다. 이는 내부점 방법의 성공적 수행을 위해 필수적이다.

이러한 방법이 기존의 방법에 비해 우수함을 보이기 위해, NETLIB에 있는 다수상품 유통문제를 대상으로 예비 실험을 수행하였다. 이 실험은 [2]에서 Castro의 내부점 방법을 구현한 'MC'와, 본 연구내용을 반영하여 'MC'를 수정한 'MCW'를 비교 대상으로 하였다. 두 가지 프로그램 모두 ALPHA(Memory : 128M, CPU : 533MHz, OS : Linux)에서 GCC('-O3' 옵션)로 컴파일되어 구동되었다. <표 1>은 그 실험결과를 나타낸 것이다. 이 예비 실험결과를 보아 알 수 있듯이 'MCW'가 'MC'에 비해, 수행속도나 반복회수 면에서 모두

〈표 1〉 Warm starting의 효과

문 제	문 제 크 기		CPU 시간 (초)		반 복 회 수	
	제 약 식	변 수	MC	MCW	MC	MCW
pds-06	9,881	28,655	63.81	57.12	67	58
pds-10	16,558	48,763	200.12	181.47	82	75
pds-20	33,874	105,728	1,279.12	1,014.04	154	125
ken-11	14,694	21,349	241.51	201.84	95	89
ken-13	28,632	42,659	948.35	911.21	126	115
ken-18	105,127	154,699	2,841.41	2,188.69	158	134

우수함을 알 수 있다.

한편, warm-start로 인해 얻을 수 있는 이점이 좀더 부각되기 위해서는 최소비용문제를 풀어 얻어낸 해를 움직여 원비가능성을 좀 더 많이 줄일 수 있어야 하는데, 이를 위해서는 최소비용문제를 위한 해법의 조기종료 방법을 고려할 수 있다. 또한, 상보여유조건을 완화하여, 원 · 쌍대비가능성과 상보여유조건과의 균형을 좀 더 개선시키는 방법도 추후 연구 방향이 되겠다.

참 고 문 헌

[1] 설동렬, 조은영, 박순달, "네트워크 문제에서 내부점 방법의 활용(내부점 선형계획법에서 효율적인 공액경사법)", 「한국군사운영분석학회」, 제24권, 제1호(1998), pp.146-156.

[2] 임성묵, 설동렬, 박순달, "다수상품 흐름문제를 위한 내부점 방법", 「대한산업공학회지」, 제27권, 제3호(2001), pp.274-280.

[3] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin, *Network Flows*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.

[4] Castro, J., "A Specialized Interior Point Algorithm for Multicommodity Network Flows," Technical Report, 1998.

[5] Castro, J. and N. Nabona, "An implementation of linear and nonlinear multicommodity network flows," *European Journal of Operations Research*, Vol.92(1996), pp.37-53.

[6] Choi, I.C. and D. Goldfarb, "Solving mulicommodity network flow problems by an interior point method," *SIAM Proceedings on Applied Mathematics*, Vol.46(1990), pp.58-69.

[7] Gondzio, J., Multiple Centrality Corrections in a Primal-Dual Method for Linear Programming, *Computational Optimization and Applications*, Vol.6(1996), pp.137-156.

[8] Gondzio, J., "Warm start of the primal-dual method applied in the cutting plane scheme," Logilab Technical Report, 1996.

[9] Hipolito, A.L., "A weighted least square study of robustness in interior point linear programming," *Computational optimization and Applications*, Vol.2(1993), pp. 29-46.

[10] McBride, R.D., "Progress Made in Solving The Multicommodity Flow Problem," *SIAM Journal on Optimization*, Vol.9, No.4 (1998), pp.947-955.