

평균속도 개념을 적용한 상태공간에서의 과도응답해석

A Transient Response Analysis in the State-space Applying the Average Velocity Concept

이 안 성[†] · 김 병 옥* · 김 영 철* · 김 영 춘**

An Sung Lee, Byung Ok Kim, Young-Cheol Kim and Yeong-Chun Kim

(2004년 2월 2일 접수 : 2004년 4월 21일 심사완료)

Key Words : Average Velocity(평균속도), State-space Vector(상태공간벡터), Transient Response(과도응답), Stability(안정성), Accuracy(정확도), Newmark Method(뉴마크법)

ABSTRACT

An implicit direct-time integration method for obtaining transient responses of general dynamic systems is described. The conventional Newmark method cannot be directly applied to state-space first-order differential equations, which contain no explicit acceleration terms. The method proposed here is the state-space Newmark method that incorporates the average velocity concept, and can be applied to an analysis of general dynamic systems that are expressed by state-space first-order differential equations. It is also readily coded into a program. Stability and accuracy analyses indicate that the method is numerically unconditionally stable like the conventional Newmark method, and has a period error of 2nd-order accuracy for small damping and 4th-order for large damping and an amplitude error of 2nd-order, regardless of damping. In addition, its utility and validity are confirmed by two application examples. The results suggest that the proposed state-space Newmark method based on average velocity be generally applied to the analysis of transient responses of general dynamic systems with a high degree of reliability with respect to stability and accuracy.

1. 서 론

일반적으로, 동적시스템의 과도응답(transient response)을 구하기 위한 직접시간적분(direct-time integration)은 중앙차분법(central difference method), Runge-Kutta법 등의 explicit법과 Newmark법, Wilson- θ 법, Houbolt법 등의 implicit법으로 분류될

수 있다.⁽¹⁾ 직접시간적분법에 관한 대부분의 선행연구는 기존의 방법을 개선함과 동시에 적용분야에 따른 적절한 적분방법을 제시함으로써, 계산의 효율성 및 정밀도 향상에 집중되어 왔다. Trujillo⁽²⁾, Park와 Houser⁽³⁾, Braekhus와 Aasen⁽⁴⁾, Bhatti와 Pister⁽⁵⁾는 개선된 explicit법을 제시하여 일반구조물 및 비선형 모델을 가진 구조물에 적용하였으며, Klein과 Trujillo⁽⁶⁾, Zienkiwicz⁽⁷⁾, Hilber와 Hughes⁽⁸⁾, Wood⁽⁹⁾ 등은 향상된 implicit법을 제안하여 동적응답을 구하였다. 또한 explicit법과 implicit법을 결합한 혼합법⁽¹⁰⁾도 제시되어 수치적 안정성 검토 및 동적응답해석을 수행하였다. 일반적으로, explicit법은 각 스텝별 계산시간 및 메모리 공간면에서 implicit법에 비해 장점을 가지고 있으나, 수치적 안정성(numerical

[†] 책임저자 : 정회원, 한국기계연구원 회전체그룹
E-mail : aslee@kimm.re.kr

Tel : (042) 868-7356, Fax : (042) 868-7440

* 정회원, 한국기계연구원 회전체그룹

** 정회원, 두산중공업(주) 기술연구원

stability)을 확보하기 위해서는 미세한 시간스텝 Δt 를 설정하여야 한다.⁽¹⁾ 실제로 explicit법은 Δt 가 수치적 안정성에 매우 제한적인 조건으로 작용하는 반면, implicit법은 임의의 Δt 에 대하여 일반적으로 수치적 안정성을 가지며, 적절한 Δt 를 설정한다면 정확성도 보장된다. 특히, implicit법 중에서 가장 널리 사용되는 방법은 Newmark법으로써, 수치적 안정성이 보장되며, 2nd-order의 정확성을 가진 평균가속도(average acceleration) 기반의 Newmark법이 주로 사용된다.

일반적인 동적시스템은 감쇠가 관성 또는 강성항에 비례하지 않는 시스템으로 직접적인 고유치해석이 불가능하다. 이런 경우는 상태공간 벡터(state-space vector)를 도입하여 시스템 방정식을 상태공간 1차 미분방정식으로 변환시킨 후 고유치 해석을 수행할 수 있다. 특히, 로터-베어링 시스템의 경우, 자이로스 코픽 효과 및 베어링 감쇠와 강성의 비대칭으로 인하여 고유치(eigenvalue)해석을 위해 상태공간 벡터를 도입한 1차 상태공간 미분방정식이 흔히 사용된다. 그러나 상태공간 1차 미분방정식으로 표현된 시스템의 과도응답을 구할 때, 방정식에 가속도항이 명시적으로 표현되어 있지 않아 기존의 평균가속도 Newmark법은 적용할 수 없다.

본 연구에서는 1차 상태공간 미분방정식으로 표현되는 일반적인 동적 시스템의 과도응답 해석에 바로 적용할 수 있는 암시적 직접시간적분법으로써, 평균속도(average velocity) 개념을 도입한 상태공간 Newmark법을 제안하고자 한다. 제안 방법의 정식화가 제시되며, 아울러 수치해의 안정성과 정확도가 평가된다. 그리고 실제 과도응답 해석을 통해 제안된 방법의 유용성 및 타당성을 검토하고자 한다.

2. 상태공간 Newmark법

2.1 일반 정식화(General Formulation)

일반적인 동적시스템에 대한 2차 미분방정식은 상태공간 벡터를 이용하여, 식 (1)과 같은 1차 상태공간 미분방정식으로 표현될 수 있다.

$$\{\dot{q}\} = [A]\{q\} + \{F\} \quad (1)$$

여기서, $\{q\} = [\dot{x} \ x]^T$ 는 상태공간벡터, $\{x\}$ 는

변위벡터, $[A]$ 는 시스템의 동특성 행렬, 그리고 $\{F\}$ 는 가진벡터(forcing vector)이며, $[A]$ 와 $\{F\}$ 는 식 (2)와 (3)으로 표현된다.

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} [M]^{-1}f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서, $[M]$, $[C]$, $[K]$, $\{f(t)\}$ 는 각각 시스템의 관성, 감쇠, 강성행렬과 외력벡터이다.

Fig. 1을 참조하여 시간 t_{n+1} 과 t_n (또는 스텝 $n+1$ 과 n) 사이의 Δt 에 대한 시간변수 τ ($0 \leq \tau \leq \Delta t$)를 정의하고 Δt 내에서 상태벡터의 일정한 평균속도를 도입하면,

$$\{\dot{q}(\tau)\} = \frac{1}{2} [\{\dot{q}\}_{n+1} + \{\dot{q}\}_n] \quad (4)$$

$\tau = 0$ 에서 $\{q(\tau)\} = \{q\}_n$ 을 고려하여 식 (4)를 적분하면,

$$\{q(\tau)\} = \{q\}_n + \frac{\tau}{2} [\{\dot{q}\}_{n+1} + \{\dot{q}\}_n] \quad (5)$$

식 (5)로부터 $\tau = \Delta t$, 즉 시간 t_{n+1} 에서의 변위는

$$\{q\}_{n+1} = \{q\}_n + \frac{\Delta t}{2} [\{\dot{q}\}_{n+1} + \{\dot{q}\}_n] \quad (6)$$

식 (6)으로부터 시간 t_{n+1} 에서의 속도는

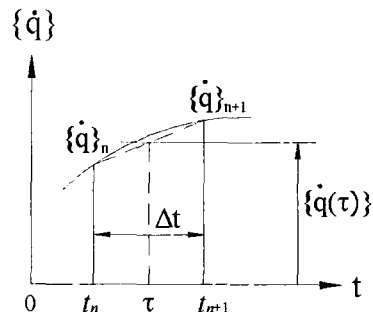


Fig. 1 Constant average velocity for state-space Newmark method

$$\{\dot{q}\}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} [\{q\}_{n+1} - \{q\}_n] - \{\dot{q}\}_n \quad (7)$$

최종적으로, 시간 t_{n+1} 에서 식 (1)의 운동방정식을 고려하고, 식 (7)을 대입하여 정리하면,

$$\{q\}_{n+1} = ([I] - \frac{\Delta t}{2}[A])^{-1}(\{q\}_n + \frac{\Delta t}{2}\{\dot{q}\}_n + \frac{\Delta t}{2}\{F\}_{n+1}) \quad (8)$$

시간 t_n 에서의 상태값을 이용하여 식 (8)을 계산하면 시간 t_{n+1} 에서의 상태값이 구해진다. 이상에서 제안된 평균속도 상태공간 Newmark법은 기존의 평균 가속도 Newmark법에 비해 정식화가 보다 간편하게 얻어지며, 따라서 프로그램 코딩이 보다 용이하게 이루어질 수 있다.

2.2 안정성 및 정확도 해석(Stability & Accuracy Analysis)

여기서는 제안된 상태공간 Newmark법의 수치적 안정성 및 정확도 해석을 위해, 가진벡터를 제외한 식 (1)과 함께 해석의 편의를 위해 1 자유도 시스템이 고려된다. 제시한 수치기법의 안정성 및 정확성은 다-자유도 시스템에 그대로 적용된다.⁽¹¹⁾

(1) 해의 안정성 해석(Stability Analysis)

식 (1)에서 외력벡터를 제외한 시간 t_n 에서의 방정식은

$$\{\dot{q}\}_n = [A]\{q\}_n \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하고 회귀관계(recursive relationship)를 구성하면, 시간 $t + p\Delta t$ 에서의 상태 벡터는

$$\{q\}_{t+p\Delta t} = [A_m]^p\{q\}_t \quad , \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

여기서, 행렬 $[A_m]$ 은 증폭행렬(amplification matrix)로 식 (11)과 같이 얻어지며, $w = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/2\sqrt{km}$ 이다.

$$[A_m] = ([I] - \frac{\Delta t}{2}[A])^{-1}([I] + \frac{\Delta t}{2}[A]) \quad (11)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4 - 4\zeta w\Delta t - w^2\Delta t^2}{4 + 4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} & -\frac{4w^2\Delta t}{4 + 4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} \\ \frac{4\Delta t}{4 + 4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} & \frac{4 + 4\zeta w\Delta t - w^2\Delta t^2}{4 + 4\zeta w\Delta t + w^2\Delta t^2} \end{bmatrix}$$

식 (11)은 제안된 평균속도 Newmark법의 수치적 안정성 검증에 사용될 수 있다. 시간 또는 스텝이 증가함에 따라 식 (10)의 수치적 근사해가 임의로 증폭되지 않을 조건은 증폭행렬의 스펙트럼 반경(spectral radius) $\rho(A_m)$ 이 1보다 작거나 같아야 한다(12). Fig. 2는 시스템의 주기 T 에서 무차원 시간간격 $\Delta t/T$ 에 대한 증폭행렬의 스펙트럼 반경을 보이고 있다. 그림으로부터 감쇠비에 관계없이 어떠한 Δt 를 설정하더라도 $\rho(A_m)$ 이 1보다 작거나 같음을 알 수 있으며, 따라서 제안된 수치기법은 무조건적 안정성(unconditionally stable)을 갖는다. 한편, 기존의 평균 가속도를 기반으로 한 Newmark법도 동일한 안정성을 갖는다.

(2) 해의 정확도해석(Accuracy Analysis)

식 (10)으로부터 시간 t_n 과 t_{n+1} 사이의 차분 운동 방정식은

$$\{q\}_{n+1} = [A_m]\{q\}_n \quad (12)$$

식 (12)의 해의 형태는(13)

$$\{q\}_n = \{r\}e^{\lambda n\Delta t} = \{r\}\delta^n \quad (13)$$

식 (13)을 식 (12)에 대입하여 정리하면, 다음과

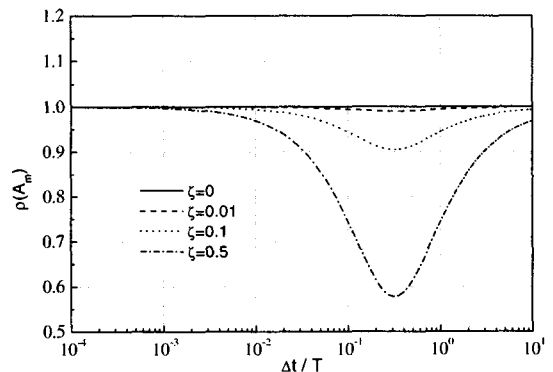


Fig. 2 Spectral radii of the amplification matrix as a function of $\Delta t/T$ for different ζ values

같은 고유치 문제가 된다.

$$[A_m]\{r\} = \delta\{r\} \quad (14)$$

식 (14)로부터 고유치와 고유벡터는

$$\rho_{1,2} = \frac{4 - w^2 \Delta t^2 \pm j4w\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}{4 + 4\zeta w\Delta t + w^2 \Delta t^2} \quad (15)$$

$$\{r\}_{1,2} = \left\{ \frac{w(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})}{1} \right\} \quad (16)$$

여기서, $j = \sqrt{-1}$ 이다. 그러면, $\{q\}_n$ 의 일반해는

$$\{q\}_n = a_1 \{r\}_1 \delta_1^n + a_2 \{r\}_2 \delta_2^n \quad (17)$$

식 (17)에서 초기조건을 고려하면, 변위성분 x_n 은

$$x_n = R^n \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 w \zeta}{w\sqrt{1-\zeta^2}} \sin n\phi + x_0 \cos n\phi \right) \quad (18)$$

여기서, \dot{x}_0 와 x_0 는 초기속도와 변위이며, R 과 ϕ 는 식 (19)로 주어진다.

$$R = \sqrt{\frac{4 + w^2 \Delta t^2 - 4\zeta w \Delta t}{4 + w^2 \Delta t^2 + 4\zeta w \Delta t}}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{4w\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}{4 - w^2 \Delta t^2} \quad (19)$$

또한, 1 자유도계의 감쇠자유진동의 변위응답 엄밀해(exact solution)⁽¹⁴⁾는

$$x(t) = e^{-\zeta w t} \left(\frac{\dot{x}_0 + x_0 \zeta w}{w\sqrt{1-\zeta^2}} \sin w_d t + x_0 \cos w_d t \right) \quad (20)$$

여기서, $w_d = w\sqrt{1-\zeta^2}$ 이다.

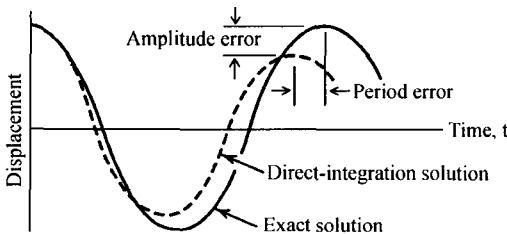


Fig. 3 Possible amplitude and period errors in numerical solution

식 (18)의 수치해와 식 (20)의 엄밀해가 유사한 형태로 표현되고 있지만, 수치적 방법에 의한 진동응답에서는 Fig. 3과 같이 주기오차(period error) 및 진폭오차(amplitude error)가 발생할 수 있기 때문에, 보다 정확한 수치해의 정확도는 두 해 사이의 진동주파수와 진폭을 분석함으로써 파악될 수 있다⁽¹⁵⁾.

수치해의 진동주기 파악을 위해 식 (18)에서의 $\sin n\phi$ 는 다음으로 쓸 수 있다.

$$\sin \frac{\phi}{\Delta t} n \Delta t = \sin w^* t^* \quad (21)$$

$$\text{여기서, } w^* = \frac{\phi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \tan^{-1} \frac{4w\Delta t\sqrt{1-\zeta^2}}{4 - w^2 \Delta t^2}$$

식 (21)의 진동주파수 w^* 를 $w\Delta t$ 에 대해 Taylor 전개를 수행하면,

$$w^* = w\sqrt{1-\zeta^2} + \frac{w^3 \Delta t^2}{12} (4\zeta^2 - 1) \sqrt{1-\zeta^2} + O(w\Delta t)^5 \quad (22)$$

식 (22)의 우변 첫 번째 항은 w_d 이므로 엄밀해의 진동주파수와 동일하며, 나머지 항들로 인하여 주기 오차가 발생됨을 알 수 있다. 주기오차를 다음과 같이 정의하면,

$$e_p = \frac{\bar{T} - T}{T} \times 100 [\%] \quad (23)$$

여기서, $T = 2\pi/w_d$ 는 엄밀해의 주기, $\bar{T} = 2\pi/w^*$ 는 수치해의 주기이다. Fig. 4는 $\Delta t/T$ 에 대한 주기

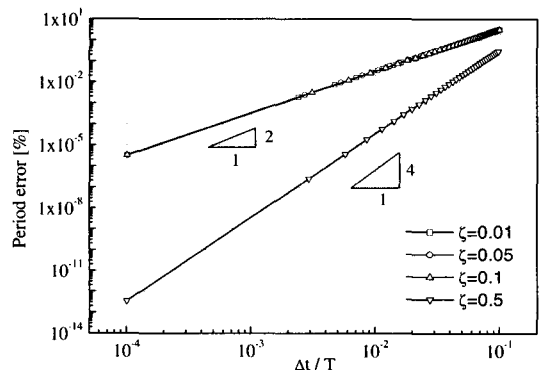


Fig. 4 Period error (%) as a function of $\Delta t/T$ for different ζ values

오차를 나타내며, 주기오차를 고려한 적합한 Δt 가 설정될 수 있다. 주기오차는 감쇠가 작은 경우 ($\zeta = 0.01, 0.05, 0.1$), $\Delta t/T$ 에 대해 2nd-order의 오차를 가지나, 감쇠가 큰 경우($\zeta = 0.5$)는 4th-order의 오차를 가짐을 알 수 있다. 한편, 평균가속도 기반의 Newmark법의 비감쇠 주기오차는 2nd-order로 보고되어 있다.⁽¹⁶⁾

한편, 식 (18)로부터 수치해의 진폭성분 R^n 을 $w\Delta t$ 에 대해 Taylor 전개하면,

$$R^n = 1 - \zeta n(w\Delta t) + \frac{1}{2} \zeta^2 n^2 (w\Delta t)^2 + \frac{1}{12} \zeta n (3 - 2(2 + n^2)\zeta^2)(w\Delta t)^3 + O(w\Delta t)^4 \quad (24)$$

또한 식 (20)에서의 엄밀해 진폭성분 $e^{-\zeta\omega t}$ 를 ωt 에 대해 Taylor 전개하면,

$$e^{-\zeta\omega t} = 1 - \zeta(\omega t) + \frac{\zeta^2(\omega t)^2}{2} - \frac{\zeta^3(\omega t)^3}{6} + O(\omega t)^4 \quad (25)$$

식 (24)와 식 (25)의 우변 세 번째 항까지는 동일하며, 나머지 항들로 인하여 진폭오차가 발생됨을 알 수 있다. 수치해와 엄밀해 사이의 진폭오차는 다음으로 정의된다.

$$e_A = R^n - e^{-\zeta\omega t} \quad (26)$$

Fig. 5는 $\Delta t/T$ 에 대한 진폭오차를 나타내며, 마찬가지로 진폭오차를 고려한 적합한 Δt 가 설정될 수 있다. 진폭오차는 감쇠에 관계없이 $\Delta t/T$ 에 대해

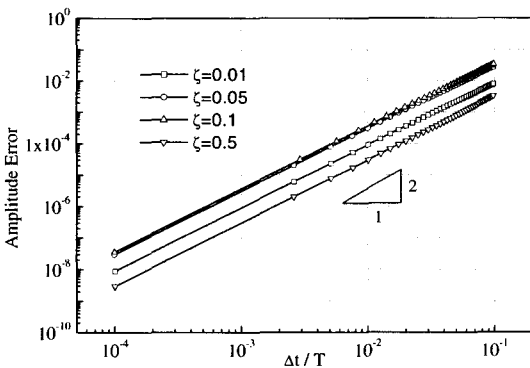


Fig. 5 Amplitude error as a function of $\Delta t/T$ for different ζ values

2nd-order임을 알 수 있다. 한편 기존의 평균가속도 Newmark법의 진폭오차도 2nd-order이다.⁽¹⁶⁾

3. 과도응답해석

제안된 상태공간 Newmark법의 유용성 및 타당성 검토를 위하여, 두 가지 시스템을 대상으로 과도응답 해석을 수행하였다.

3.1 2-자유도 진동시스템

2-자유도 진동시스템의 모델이 Fig. 6에 보여져 있다. 여기서, $m_1 = 2000$ kg, $m_2 = 50$ kg, $k_1 = 10^3$ N/m, $k_2 = 10^4$ N/m이고, 감쇠비는 $\zeta_1 = 0.01$, $\zeta_2 = 0.2$, 외력벡터는 $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10\cos 3t \end{Bmatrix} N$, 초기조건은 $x_1 = x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 이다.

제안된 상태공간 Newmark법, Runge-Kutta 4th-order법과 엄밀 해석해에 의한 m_1 과 m_2 의 과도응답 x_1 과 x_2 가 Fig. 7과 8에 나타나 있으며, 수치해석에 사용된 시간스텝 $\Delta t = 0.05$ sec이다. Fig. 7로부터 m_1 은 매우 불규칙적인(highly vibratory) 과도응답을 지속적으로 갖고, Fig. 8로부터 m_2 는 빠르게 정상상태 응답에 도달되는 특성이 관찰된다. 주어진 Δt 에 대해, 제안된 상태공간 Newmark법은 각 질량의 응답특성에 관계없이 해석해에 매우 잘 일치하는 수치해를 제공하고, Runge-Kutta법에 비해 보다 우수한 성능을 내는 것으로 평가된다.

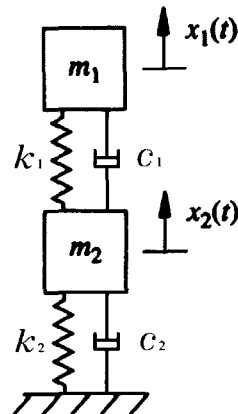


Fig. 6 Two-degree-of-freedom model

한편, 본 예제에 대해, 제안된 상태공간 Newmark 법과 기존의 평균가속도 기반 Newmark법은 동일한 수치해를 제공하였으며, 전자의 정식화에서 각 행렬과 열 벡터의 행과 열의 크기가 2배로 증가되었지만 코딩이 단순화되어 연산작업이 줄어들었기 때문에 두 방법 간의 연산시간은 Table 1에 보여진 것과 같이

대등하였다.

3.2 터보압축기 로터-베어링 시스템

실용적인 적용 예로써, 30,000 rpm에서 운전되는 1 단 터보압축기 로터-베어링 시스템의 모델이 Fig. 9에 나타나 있으며, 유한요소 모델링에 필요한 상세한 데이터가 Table 2에 정리되어 있다.

디스크 1, 2의 불균형 양은 $7.2 \text{ g} \cdot \text{mm}$ 이며, 불균형의 위치는 기준점으로부터 각각 0° 와 180° 이다. 불균형 외력에 대한 로터-베어링 시스템의 과도응답 해석이 수행되었으며, 수치해석에 사용된 시간스텝 $\Delta t = 0.0001 \text{ sec}$ 이다. 제안된 상태공간 Newmark

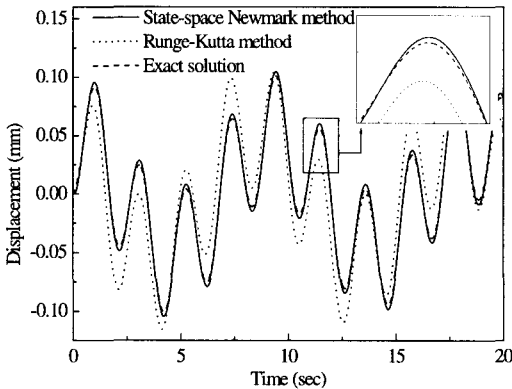


Fig. 7 Transient responses of m_1 obtained by three different methods

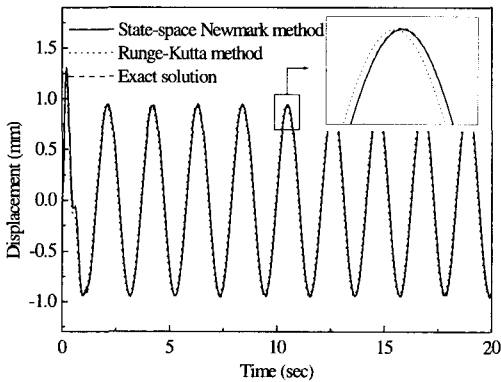


Fig. 8 Transient responses of m_2 obtained by three different methods

Table 1 Comparison of calculation times using Matlab 6.5

Method	Elapse time[sec]
Conventional Newmark	0.0320
Proposed state-space Newmark	0.0310

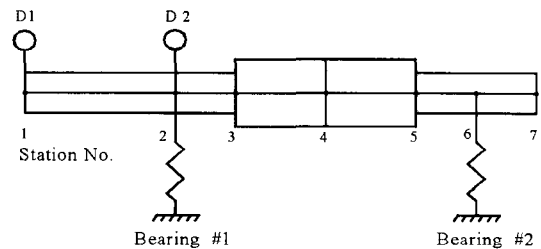


Fig. 9 A FE model of one stage turbo-compressor rotor-bearing system

Table 2 FE modeling data of the turbo-compressor rotor-bearing system

Shaft element				
Element No.	Length (mm)	Diameter (mm)		
1	127	38.1		
2	50.8	38.1		
3	76.2	63.5		
4	76.2	63.5		
5	50.8	38.1		
6	50.8	38.1		
$E = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$		$\rho = 7833.48 \text{ kg/m}^3$		
Disk element				
Disk No.	Mass (kg)	I_t ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	I_p ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	
D1	4.536	0.0183	0.0366	
D2	4.536E-05	0.0000	0.0000	
Bearing stiffness and damping				
Bearing No.	K_{xx} (N/m)	K_{yy} (N/m)	C_{xx} (N·s/m)	C_{yy} (N·s/m)
1	2.189E8	2.277E8	8.494E4	8.756E4
2	2.189E8	2.189E8	8.581E4	8.581E4

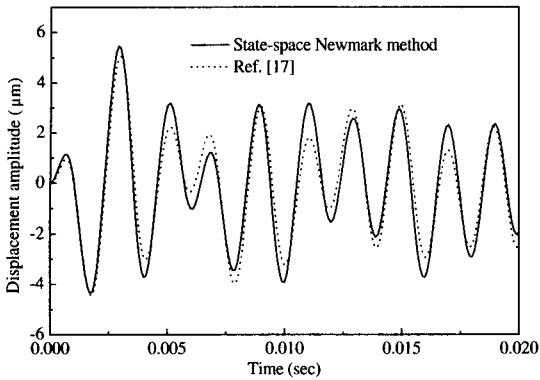


Fig. 10 Horizontal transient response at the station No. 1 of the turbo-compressor rotor-bearing system

법을 적용하여 얻어진 0.02 sec 동안의 Station No. 1에서 수평방향 (x-방향) 변위응답이 Fig. 10에 나타나 있다. 그림으로부터 제안된 상태공간 Newmark법의 결과가 참고문헌에 제시된 수치해석 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 일반적인 동적시스템 과도응답의 수치해를 구하기 위하여 평균속도 개념을 도입한 상태공간 Newmark법을 제안하였으며, 제안된 방법의 수치적 안정성과 주기 및 진폭의 정확도를 해석하였다. 제안된 상태공간 Newmark법은 수치해를 구하기 위한 정식화가 기존 평균속도 Newmark법에 비해 간단하고 프로그램이 용이하다. 제안된 방법은 기존 평균속도 Newmark법과 마찬가지로 시간스텝에 관계없이 수치적으로 무조건적으로 안정하며, 주기오차는 감쇠가 작은 경우는 2nd-order, 감쇠가 큰 경우는 4th-order 정확도를 갖으며, 진폭오차는 감쇠에 상관없이 2nd-order 정확도를 가진다. 또한, 제안된 방법을 두 가지 예에 적용함으로써 유용성과 타당성을 검증 확인하였다. 상태공간에서의 정식화로 각 행렬과 열 벡터의 행과 열의 크기가 2배로 증가하나 코딩이 단순화되어 연산작업이 줄어들기 때문에 주어진 간단 예제의 경우 제안된 방법과 기존의 Newmark법의 계산시간은 대등하였다. 이상에서 제안된 평균속도 개념을 도입한 상태공간 Newmark법은 일반적인 동적시스템의 과도응답 해석에 일반적으로 적용될 수 있다.

후기

본 연구는 한국기계연구원 기본사업 “사이버 엔지니어링-동역학 시뮬레이션 기술개발” 과제 및 두산중공업(주) 수탁 “터빈축계 과도응답 진동해석 기술개발 및 검증시험” 과제의 지원을 받아 수행되었으며, 지원해주신 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고 문헌

- (1) Bathe, K. J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- (2) Trujillo, D. M., 1977, “An Unconditionally Stable Explicit Algorithm for Structural Dynamics,” International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 11, pp. 1579~1592.
- (3) Park, K. C. and Houser, J. M., 1982, “Semi-implicit Transient Analysis Procedures for Structural Dynamic Analysis,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 609~622.
- (4) Braekhus, J. and Aasen, J. O., 1981, “Experiments with Direct Algorithms for Ordinary Differential Equations in Structural Dynamics,” Computers and Structures, Vol. 13, pp. 95~96.
- (5) Bhatti, M. A. and Pister, K. S., 1981, “Transient Response Analysis of Structural Systems with Nonlinear Behavior,” Computers and Structures, Vol. 13, pp. 181~188.
- (6) Klein, S. and Trujillo, D. M., 1983, “An Unconditionally Stable Finite Element Analysis for Nonlinear Structures,” Computers and Structures, Vol. 16, pp. 187~197.
- (7) Zienkiewicz, O. C., 1977, “A new look at the Newmark, Houbolt and Other Time Stepping Formulae: a Weighted Residual Approach,” Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 5, pp. 413~418.
- (8) Hilber, H. M. and Hughes, T. J. R., 1977, “Improved Numerical Dissipation for Time

Integration Algorithms in Structural Mechanics.” Earthquake Engineering and Structural Dynamics Vol. 5, pp. 283~292.

(9) Wood, W. L., Bossak, M. and Zienkiewicz, O. C., 1980, “An Alpha Modification of Newmark’s method,” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pp. 1562~1566.

(10) Bazzi, G. and Anderheggen, E., 1982, “The ρ -family of Algorithms for the Time-step Integration with Improved Numerical Dissipation.” Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp. 537~550.

(11) Fung, T. C., 2000, “Unconditionally Stable Higher-order Accurate Collocation Time-step Integration Algorithms for First-order Equations,” Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, pp. 1651~1662.

(12) Strang, G., 1980, Linear Algebra and its Applications, Academic Press Inc.

(13) Doyle, J. F., 1991, Static and Dynamic Analysis of Structures, Kluwer Academic Publisher.

(14) Inman, D. J., 2001, Engineering Vibration, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

(15) Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J., 2002, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc.

(16) Hughes, T. J. R., 1987, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

(17) ARMD Ver. 4.0 ROTLAT Manual, 8.2 Problem Number 1, RBTS Inc.