大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 14 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIV, No.2, 171-185. May 2004

학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구

임 재 훈* · 박 교 식**

원의 접선에 대한 초기 학습 경험은 접선에 대한 부적절한 직관을 형성하여 이후 학습의 장애가 될 수 있다. 이 논문은 이전 학교급 또는 학년에서의 학습을 통해 형성된 접선 개념을 이후 학교급 또는 학년에서의 학습 과정에서 반성, 수정, 개선하는 학습 경험이 이루어지도록 하는 방안을 모색한 것이다.

이 연구에서 제시한 방향을 따라 원의 접선에서 시작하여, 곡선의 맥락을 확대하면서 기존의 접선 개념을 수정하는 과정을 거치는 동안, 학생들은 초기 학습 단계에서 형성된 '곡선과 한 점에서 만난다.' 또는 '곡선을 스치고 지나간다.'와 같은 관념들이 제한된 맥락에서는 접선의 정의로서 타당하지만, 보다 일반화된 맥락에서는 접선의 본질이 될 수 없음을 알 수 있다. 그리고 할선의 극한이나 중근, 미분계수와 관련된 접선의 정의의 의미를 이해하고 그 장점을 인식할 수 있다.

I. 서 론

우리나라 학교수학에서는 접선을 원의 맥락에서 '곡선과 한 점에서 만나는 직선으로' 처음 도입하며, 이후 좀더 일반적인 곡선의 맥락에서 재차 다룬다. 7-나 단계에서 원을 맥락으로 하여 원과 한 점에서 만나는 직선으로 접선을 도입하고, 후에 고등학교에서 포물선, 삼차함수 등 다양한 곡선의 맥락에서 접선을 다시 다룬다. 고등학교에서는 주로 해석기하적인 관점에서 판별식이나 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구하는 데 초점을 맞춘다(교육부, 1997).

Vinner(1982)에 의하면, 비교적 이른 단계에 일어나는 원의 접선에 관한 학습 경험은 접선에 대한 학생들의 직관을 형성하는 기초가 된다. 그는 미적분 강좌를 듣는 대학 1학년생 278명을 대상으로 미적분 강좌에서 일반적인 접선의 정의를 학습하는 경험이 원의 접선에 기초한 일차직관을 변화시키고 적절한 이차직관을 형성시키는지를 조사하였다.

그는 $y=x^3$, $y=\sqrt{|x|}$, $y=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$으로 표현되는 곡선을 그림으로 제시하고, 원점에서 접선이 몇 개 있는지를 쓰고 접선을 그리도록 하였다. 이 문제의 정답율은 각각 18%, 8%, 12%로 낮게 나타났다. 또한 접선의 정의를 진술하게 하였을 때, 35%의 학생들이 '한 점에서 만나지만 곡선을 뚫고 지나가지 않는다, 곡선의 한쪽 편에 있다.'와 같이 원의 접선에 기초한 정의를 제시하였다. Vinner의 연구 결과는 원의 접선 맥락에서 형성된 일차직관을 수정하

* 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr
** 경인교육대학교, pkspark@ginue.ac.kr

려면 특별한 교수학적 처방이 필요함을 시사한다. Tall(1990)도 원을 맥락으로 한 접선 지도는 접선 관념을 제한시킬 우려가 있으며, 따라서 처음부터 인지적인 갈등을 줄여주는 풍부한 개념화(conceptualization)를 제공할 필요가 있다고 하였다.

그렇다면 어떻게 접선에 대한 부적절한 일차직관을 없애고, 적절한 이차직관이 형성되게 할 것인가? 우선, 원의 접선에 대한 초기 학습 경험이 부적절한 일차직관을 형성한다는 점에서, 아예 그러한 일차직관이 형성되지 않도록 접선을 처음으로 도입할 때 원 대신 다른 곡선을 사용하는 방법을 생각할 수 있다. 그러나 이 다른 곡선이 모든 곡선을 다 대표하지 못한다면, 결국 이 곡선이 지닌 맥락의 한계에 기인하는 다른 종류의 부적절한 일차직관이 생길 것이다. 이러한 문제점을 해소하려면 초기 도입 단계에서 모든 맥락을 다 제시하거나 완전히 일반적인 맥락을 사용하여야 한다. 그러나 학교수학에서는 어느 한 시점에 어떤 개념을 도입할 때 그 개념과 관련된 모든 맥락이나 완전히 일반적인 맥락을 제시하지 못하고, 불가피하게 또는 의도적으로 제한된 맥락 속에서 도입하는 경우가 있다(박교식, 1998). 이러한 학교수학의 특성을 고려한다면, 학교수학에서는 (장애를 원천적으로 제거하는 방안보다) 초기 학습 경험에 기인하는 장애를 이후의 학습 과정 속에서 어떻게 해소해 나갈 것인가에 주의를 기울일 필요가 있다.

Cornu(1991)는 장애를 피할 것이 아니라 획득해야 할 수정된 수학적 개념을 구성하는 부분으로 보면서, 장애를 직면하고 극복하도록 학생들을 이끌어야 한다고 하였다. Tall(1991)은 고등수학에서 다루는 개념은 본질상 초보적인 경험과는 미묘하게 다르며, 그 개념들을 효과적으로 다루는 인지 체계를 형성하기 위해서는 불가피하게 각 개인의 지식에 대한 반성과 재구성을 필요로 하는 갈등에 직면하여야 한다고 하였다. 이러한 견해에 따르면, 원의 접선이라는 맥락에 기인하는 접선 개념의 장애를 드러내고, 그것을 슬기롭게 해소하여 올바른 접선 개념에 이르기까지의 교수 학습 과정을 제공하는 것이 필요하다.

Lakatos의 수리철학은 접선과 같은 고등수학적인 개념에 대한 학습자의 인지적 재구성을 불러일으키는 학습 지도 과정을 구성하는 데 적지 않은 시사점을 제공한다. Lakatos(1976)는 다면체 정리를 예로 하여 기존의 추측, 정의, 증명이 반례의 출현으로 인해 새로운 추측, 정의, 증명으로 수정되어 가는 일련의 과정을 보여준 바 있다. '반례를 통한 기존 지식의 수정'이라는 Lakatos의 아이디어는 학생들이 가지고 있는 기존 지식에 대한 반성과 재구성을 일으키는 상황을 생성할 수 있게 해준다(강문봉, 1993). 이에 이 논문에서는 오류주의적 관점에서 학습자가 기존에 가지고 있던 접선 개념을 수정, 재구성하는 경험을 하게 하는 접선 개념의 학습 지도 방안을 모색하고자 한다.

II. Lakatos의 수리철학과 개념의 수정

Lakatos 수리철학의 한 축에는 증명 및 증명분석이 자리잡고 있기에, 그의 철학은 주로 중등학교 이상의 수준에서 증명과 관련하여 논의되어 왔다. Lakatos(1976)가 제시한 수학적 발견의 논리에서 핵심을 이루는 것이 증명 분석을 통해 보조정리 합체법을 사용한 개선된 추측과 증명의 구성이므로, Lakatos 수리철학이 중등학교 이상의 수준에서 증명과 관련되어 논의되어 온 것은 자연스럽다. Lakatos 수리철학이 초등

학교 수학 학습 지도보다는 중등학교 이상의 수학 학습 지도, 특히 증명 학습 지도에 관해 시사하는 바가 더 많은 것은 사실이다.

그러나 최근에 Lakatos의 수리철학을 초중등 학교의 수학 학습 지도에 보다 광범위하게 적용해 보려는 시도가 이루어지고 있다. 이를테면, 강문봉(2004)은 초등학교 수학 학습 지도에서 그 구체적인 적용 방안을 약수와 받아내림이 있는 뺄셈을 소재로 제시한 바 있다. 한편, 박교식과 임재훈(2004)은 다각형과 면 개념에 대한 교수학적 분석을 통해, 다각형과 면은 초등학교와 중등학교에서 반복적으로 다루어지지만 실상 다른 맥락에서 다루어지며, 이 맥락의 차이를 잘 살리면 학교급이 올라감에 따라 기존의 개념을 수정, 개선하는 학습 경험이 이루어지도록 할 수 있음을 예시한 바 있다. 박교식과 임재훈의 연구는 기존의 개념이 새로운 맥락의 도입에 따라 수정, 개선된다는 아이디어가, 다각형과 면 개념과 같이, 학교수학에서 복수의 학교급 또는 학년에 걸쳐서 다루어지는 개념의 학습 지도에 일반적으로 적용 가능한지의 문제를 제기한다. 달리 말해, 일반적으로 이전 학교급 또는 학년에서의 학습을 통해 형성된 개념을 이후 학교급 또는 학년에서의 학습 과정에서 반성, 수정하여 새로운 개념을 형성하게 하는 방식으로 교과서나 수업을 전개할 수 있는가의 문제이다. 따라서 그들의 견해에 따르면, 복수의 학교급 또는 학년에서 취급되는 여러 개념에 대해 이러한 접근법에 의한 학습 지도가 가능한지와 타당한지를 확인하는 연구가 필요하다. 본 연구의 주제인 접선은 중학교 '7단계', '9단계', 고등학교 '10단계', '수학 II' 및 '미분과 적분'에서 반복적으로 다루어지는 것으로, 이러한 가능성과 타당성을 확인해야 할 내용 중 하나이다.

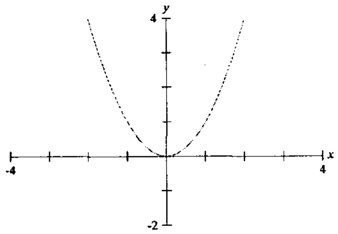
Lakatos의 아이디어를, 다소간 확대 해석하여, 접선의 교수 학습 방안을 마련하는 데 적용하기 위해, 먼저 Lakatos가 다면체 정리(다면체에서 꼭지점의 수를 v, 모서리의 수를 e, 면의 수를 f라 할 때, $v-e+f=2$)와 관련하여 제시한 수학적 발견의 논리를 '개념의 수정'이라는 측면에서 살펴 보자. 다면체 정리에 대한 반례가 제시되었을 때, 괴물배제법, 예외배제법, 보조정리합체법과 같은 방법이 사용될 수 있다(Lakatos, 1976). 괴물배제법은 반례를 괴물로 취급하여 개념의 예가 아닌 것으로 만들어 버리는 방법이므로, 이 방법에 의한 용어의 재정의는 개념의 외연이 축소되는 방향으로 진행되기 쉽다. 괴물배제법은 원래 의도하였던 개념을 명확히 하는 과정이며 새로운 개념을 생성하는 것은 아니다. 예외배제법은 반례가 등장했을 때, 반례를 추측의 적용 대상에서 제외시킬 수 있는 조건을 원래의 추측에 조건으로 추가하는 방법이다. 보조정리합체법은 반례가 제시되면 증명을 분석하여 유죄인 보조 정리를 찾아내 그것을 원래의 추측에 합쳐 새로운 추측을 만들어 내는 방법이다. 예외배제법에서나 보조정리합체법에서는 암묵적으로 다면체 개념의 외연이 확장되는 방향으로 나아간다고 볼 수 있다(강문봉, 1993).

이상은 반례가 출현한 후 개념의 수정이 두 방향으로 이루어질 수 있음을 시사한다. 하나는 반례를 괴물로 배제하여 개념의 예가 아닌 것으로 만들기 위해 정의를 수정하는 것이다. 다른 하나는 반례를 개념의 예로 포섭하는 방향으로 개념을 수정하는 것이다. 보조정리합체법이나 예외배제법은 추측과 증명이 없이는 이루어질 수 없으므로, 추측과 증명을 사용하지 않는 개념 지도 상황에서 괴물배제법이나 예외배제법, 보조정리합체법을 그대로 적용하는 것은 불가능하다. 그렇지만 반례를 개념의 예가 아닌 것으로 배제하기 위해 정의를 수정하는

방향과 반례를 예로 포섭하는 방향으로의 수정이라는 두 방향은 여전히 적용될 수 있다.

이제 개념과 관련하여, 반례라는 용어의 사용 가능성에 대해 생각하여 보자. 예를 들어, 포물선의 축에 평행한 직선을 곡선과 한 점에서 만나는 직선이라는 접선 개념의 반례로 볼 수 있는지, 그렇게 볼 수 있다면 어떤 의미에서 그런지의 문제이다. 이 표현은 포물선의 축에 평행한 직선이 '어떤 직선이 곡선의 접선이면 그 직선은 곡선과 한 점에서 만나고, 역으로 어떤 직선이 곡선과 한 점에서 만나면 그 직선은 접선이다.'라는 주장에 대한 반례라는 의미를 상징적으로 줄여 나타낸 것이다. 물론 여기서 '접선이 곧, 곡선과 한 점에서 만나는 직선'이라면 위 주장은 동어반복에 해당하는 언제나 참인 명제가 되므로 반례가 있을 수 없다는 것은 사실이다. 그러나 '접선이 곡선과 한 점에서 만나는 직선이 아니라면' 반례가 있을 수 있다. 학교수학의 하위 단계에서는 '곡선과 한 점에서 만나는 직선'이라는 접선 개념이 사용되지만, 더 높은 수학적인 수준에서는 접선이 할선의 극한으로 정의된다. 그러므로 높은 수준의 수학적 정의를 접선의 정의로 본다면, 포물선의 축에 평행한 직선은 '어떤 직선이 곡선의 접선이면 그 직선은 곡선과 한 점에서 만나고, 역으로 어떤 직선이 곡선과 한 점에서 만나면 그 직선은 접선이다.'라는 명제의 반례가 된다. 이 논문에서는, 예를 들어 포물선의 축에 평행한 직선이 곡선과 한 점에서 만나는 직선이라는 접선 개념의 반례라는 표현을 사용할 때 이러한 의미에서 사용한다.

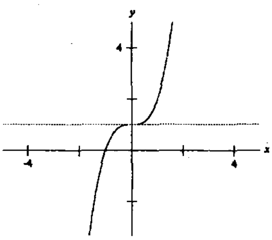
학교수학에서는 접선을 처음에는 원의 맥락에서 다루지만, 이후에는 포물선, 삼차함수의 그래프 등 좀더 일반적인 곡선의 맥락에서 다룬다. 이 과정에서 특정 단계에서 사용되는 접선 개념의 반례를 예가 아닌 것으로 배제하는 방향으로 개념의 수정이 이루어질 수 있다. 예를 들어, 아래 [그림 Ⅱ-1]과 같은 '포물선의 축과 평행한 직선'은 '곡선과 한 점에서 만난다.'는 접선 개념의 반례로 볼 수 있다. 이때 이 직선을 접선의 예가 아닌 것으로 배제하기 위해 '곡선과 한 점에서 만나는 직선'이라는 접선 개념을 '곡선과 스치고 지나가는 직선'으로 수정할 수 있다.



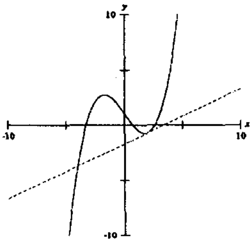
[그림 Ⅱ-1]

한편, 새로 제시된 사례를 개념의 예로 포괄하도록 정의를 수정하는 것이 적절한 상황도 있다.

예를 들어, 아래 [그림Ⅱ-2]의 직선은 '곡선을 스치고 지나가는 직선'이라는 접선 개념에서 보면 접선이 아니다. 아래 [그림Ⅱ-3]의 직선은 '곡선과 한 점에서 만나는 직선'이라는 접선 개념에서 보면 접선이 아니다. 그러나 이와 같이 접선의 예가 아닌 것을 접선의 예로 전환시키는 방향으로 접선 개념을 수정할 수 있다. 새롭게 생성된 접선 개념이 이전에 접선으로 보았던 것들을 여전히 접선으로 볼 수 있게 해주면서 새로운 맥락에도 적용될 수 있다면, 많은 맥락을 포괄한다는 측면에서 새로운 개념이 이전의 개념에 비해 발전된 것으로 볼 수 있다. 결국 이 방향으로의 수정에서는 얼마나 많은 맥락을 포괄하는가 하는 '맥락 포괄성'이 중요한 기준이 된다.



[그림 Ⅱ-2]



[그림Ⅱ-3]

반례를 예가 아닌 것으로 배제하는가 예로 전환시키는가의 차이는 있지만, 모두 반례를 통해 기존 개념의 한계가 밝혀져 기존 개념이 개선되거나 새로운 개념이 등장한다는 점에서는 같다. 다음 장에서 기존 개념의 반성을 촉진하는 사례를 반례로 사용하여 학습자의 인지적 불균형 상태를 야기하여 인지 구조의 질적인 상승을 도모하는 접선 개념의 수정이 이루어지게 하는 교수 방안을 제시하고자 한다.

Ⅲ. 접선 개념의 수정, 개선을 도모하는 교수 방안

우리나라 학교수학에는 다음과 같은 접선 개념이 내재해 있다. 기하적 접선 개념 1과 2는 원의 접선(및 포물선의 접선)과, 함수적 접선 개념 1은 이차함수 또는 이차곡선의 접선의 방정식과, 그리고 기하적 접선 개념 3과 함수적 접선 개념 2는 미분 가능성과 관련 있다.[1]

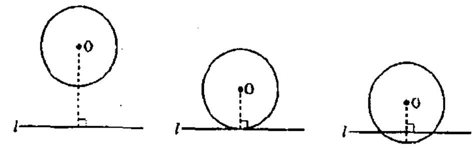
1. 기하적 접선 개념 1의 형성 (단계 1)

원과 직선의 위치 관계를 맥락으로 하여 '곡선과 한 점에서 만나는 직선'이라는 접선 개념을 형성하게 할 수 있다. 아래의 [그림 Ⅲ-1][2] 또는 [그림 Ⅲ-2][3]를 통해, 직선들의 차이점을 알아 보는 활동을 수행하게 한다. 학생들은 이

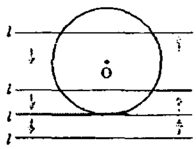
기하적 접선 개념	함수적 접선 개념
개념1. 곡선과 한 점에서 만나는 직선 개념2. 곡선을 스쳐 지나가는 직선	개념1. 직선의 방정식과 곡선의 방정식을 연립하여 얻은 x에 대한 방정식이 중근[4]을 갖는 직선(판별식 $D=0$)
개념3. 할선의 극한	개념2. 곡선 위의 한 점을 지나며 기울기가 그 점에서의 미분계수와 같은 직선

1) 조영미(1999)는 중학교의 원과 접선의 정의를 정적인 것으로, 고등학교에서의 곡선과 접선의 정의를 동적인 것으로 구분한 바 있다.
2) 이준열 외, 2001. 82쪽
3) 금종해 외, 2002. 87쪽
4) 여기서 중근은 삼중근, 사중근 등을 포함하는 의미로 사용한다.

활동을 통해 직선과 원이 만나는 점의 개수가 다르다는 사실을 발견하게 되고, 여기서 곡선과 한 점에서 만나는 직선이라는 접선 개념이 형성될 수 있다.



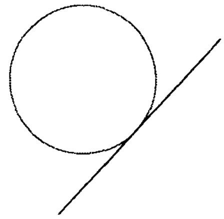
[그림 Ⅲ-1]



[그림 Ⅲ-2]

2. 기하적 접선 개념 2의 형성 (단계 2)

<단계 1>에서 직선을 비교하는 활동을 하는 가운데에도 '곡선을 스쳐 지나가는 직선'이라는 접선 개념이 형성될 여지는 있다. 그러나 [그림 Ⅲ-2]의 세 직선을 비교할 때에는 직선과 곡선이 만나는가, 만나지 않는가, 몇 개의 점에서 만나는가의 차이에 주목하기 쉬우므로, 기하적 접선 개념 2보다는 기하적 접선 개념 1이 형성되기 쉽다. 기하적 접선 개념 2의 형성을 보다 명확히 하기 위해서는 원과 만나지 않거나 두 점에서 만나는 직선을 제외한 다음과 같은 [그림 Ⅲ-3]을 사용하는 것이 낫다.



[그림 Ⅲ-3]

이러한 그림을 사용하면서 접선의 성질을 탐구하는 가운데[5], '접선은 원을 스치고 지나간다, 관통하지 않는다.'와 같은 사실에 주목할 수 있다. 따라서 이 과정을 통해 기하적 접선 개념 2가 형성될 수 있다.

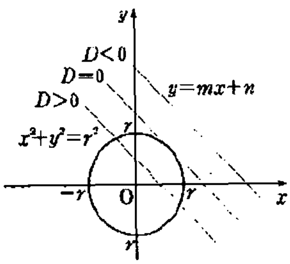
다음에, 원에서 기하적 접선 개념 1과 기하적 접선 개념 2의 관계를 탐구하게 한다. 평면 위에서 원을 스치고 지나가면서 한 점에서 만나지 않는 직선이 있을 수 있는지, 한 점에서 만나면서 스치지 않는 직선이 있을 수 있는지 조사하게 한다. 이러한 조사를 통해 원에서는 '직선이 곡선과 한 점에서 만나면 곡선을 스치고 지나가고, 곡선을 스치고 지나가면 곡선과 한 점에서 만나게 된다.'는 사실을 알게 된다. 즉, 원에서는 '한 점에서 만난다.'와 '스치고 지나간다.'는 일종의 필요충분조건이다.[6]

3. 함수적 접선 개념 1의 형성 (단계 3)

이제, 해석기하학적인 관점에서 원의 접선에 접근하여 보자. 원과 직선의 방정식을 각각 $x^2+y^2=r^2$, $y=mx+n$이라 놓고, 기하적 접선 개념 1을 적용하여 직선이 원과 접하려면 원과 한 점에서 만나야 하고, 한 점에서 만난

5) 예를 들어, '원의 접선과 그 접점을 지나는 반지름은 서로 수직이다. 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.'와 같은 접선의 성질을 탐구할 수 있다.
6) 원의 맥락에서 '곡선과 한 점에서 만난다.'와 '곡선을 스치고 지나간다.'가 일종의 필요충분조건에 해당함을 파악하는 활동은 기하적 접선 개념 1과 2를 강화하는 데 도움이 될 수 있다.

다는 것은 원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 x에 대한 방정식 $(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0$의 실수해가 하나이어야 한다는 것으로부터, 이 방정식이 중근을 갖는다 또는 판별식 $D=0$이라는 함수적 접선 개념 1을 형성하게 한다.([그림 Ⅲ-4][7] 참조)

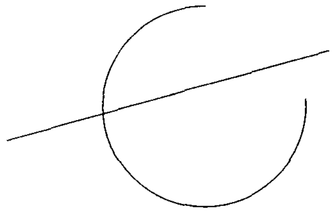


[그림 Ⅲ-4]

판별식 $D=b^2-4ac$는 이차방정식이라는 제한된 맥락에서 중근을 갖는지를 알아보는 특수한 수단이지만, 삼차 이상의 방정식이 맥락으로 제시되지 않은 상태이므로, <단계 3>에서 중근을 갖는다는 것과 판별식 $D=0$을 별도의 것으로 구분하여 인식하게 할 필요는 없다. (이것은 <단계 5>에서 이루어진다.)

4. 기하적 접선 개념 1의 부정 (1) (단계 4)

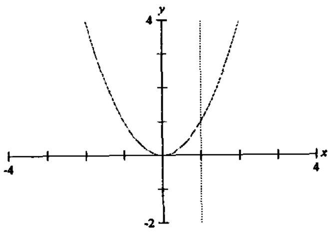
이를테면 다음의 [그림 Ⅲ-5]와 같이 반원이나 호를 소재로 제시하여 원에서 성립하는 '한 점에서 만난다.'와 '스치고 지나간다.' 사이의 필요충분의 관계가 일반적으로 성립하는 것은 아님을 알게 한다.



[그림 Ⅲ-5]

다음으로 포물선을 맥락으로 하여, 앞에서 원을 맥락으로 하여 형성된 기하적 접선 개념 1, 2가 포물선의 맥락에서도 적용가능한 것인지 탐구하게 한다. 우선 다음 [그림 Ⅲ-6](포물선 $y=x^2$ 과 $x=1$)에서 직선 $x=1$을 접선으로 보는 것이 타당한지에 대하여 논의하게 한다.

<기하적 접선 개념 1의 반례 1>



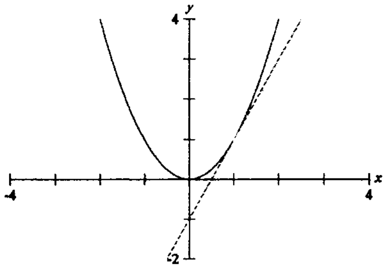
[그림 Ⅲ-6]

기하적 접선 개념 1을 가지고 있는 학생은 이 직선을 접선으로 보아야 한다고 할 것이다. 또 기하적 접선 개념 2를 가지고 있는 학생은 이 직선은 접선이 아니라고 할 것이다. 서로 이 직선이 접선이라고 또는 접선이 아니라고 생각하는 이유를 말하는 과정에서 학생들이 어

7) 우정호 외, 2002, 46쪽

면 접선 개념을 갖고 있는지 드러날 수 있다.

다음으로, 아래와 같은 [그림 Ⅲ-7](포물선 $y=x^2$ 과 직선 $y=2x-1$)을 제시한다.



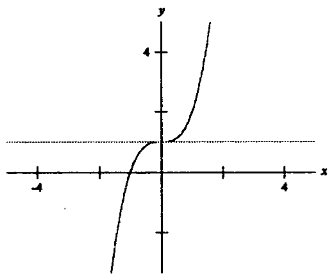
[그림 Ⅲ-7]

[그림 Ⅲ-6]과 [그림 Ⅲ-7]의 두 직선은 모두 곡선 위의 한 점 (1, 1)을 지난다. 이 두 직선을 둘 다 접선으로 보는 것이 옳은지 아니면 둘 중 하나만 접선으로 보는 것이 옳은지에 대해 논의하게 한다. 그리고 '하나만 접선으로 보려고 할 때', 기하적 접선 개념 1과 기하적 접선 개념 2 가운데 이전에 학습한 원의 맥락과 지금의 맥락에 공통적으로 적용될 수 있는 것은 어떤 것인지 탐구하게 한다. 이 과정을 거쳐 '곡선과 한 점에서 만나는 직선'이라는 기하적 접선 개념 1은 두 맥락을 모두 포괄하지는 못함을 알게 된다. 이 단계에서 '곡선과 한 점에서 만난다.'는 접선이기 위한 충분조건이 아님을 알게 된다. 그러나 이 단계에서 '곡선과 한 점에서 만난다.'는 여전히 접선이기 위한 필요조건으로 간주될 수 있다. 사실상 그 조건이 접선이기 위한 필요조건인지를 탐구하기 위해서는 삼차함수와 같은 맥락이 필요하므로 이 <단계 4>에서는 그에 대해 자세히 탐구하기 어렵다. (이것은 일반적인 삼차함수가 도입된 다음에 <단계 6>에서 하게 된다.) 기하적 접선 개념 1과 달리, '한 점에서 곡선을 스쳐 지나가는 직선'이라는 기하적 접선 개념 2는 두 맥락을 모두 포괄하므로, <단계 4>에서는 기하적 접선 개념 2가 더 타당하다고 간주된다.

5. 기하적 접선 개념 2의 부정과 기하적 접선 개념 3의 형성 (단계 5)

원과 포물선의 맥락에 모두 적용되는 기하적 접선 개념 2가 기하적 접선 개념 1보다 더 타당하다고 생각하는 학생들을 대상으로 미분 개념을 도입한 후, 미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있음을 알게 하면서, 다시 한번 접선 개념을 수정하는 경험을 하게 할 수 있다. 이를 위해 다음과 같은 [그림 Ⅲ-8](곡선 $y=x^3+1$ 과 직선 $y=1$)을 이용할 수 있다.

<기하적 접선 개념 2의 반례 1>



[그림 Ⅲ-8]

기하적 접선 개념 2의 관점에서 볼 때, 이 직선은 곡선을 뚫고 지나가므로 접선이 아니다. 그러나 학생들은 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구하는 방법을 학습한 상태이므로, $y=x^3+1$ 의 점 (0, 1)에서의 접선의 방정식을 구할 수 있고, $y=1$ 이 접선의 방정식임을 확인할 수 있다. 그런데 이때 $y=1$ 을 접선으로 볼 것인지 말아야 할 것인지에 대한 인지적인

갈등이 유발될 수 있다. 접선의 방정식을 구했으니 접선 같아 보이기도 하고, 곡선을 뚫고 지나가니 접선이 아닌 것 같아 보이기도 하는 것이다. 이 예를 통해 미분이라는 맥락에서 볼 때, (<단계 4>에서 오히려 강화된) 기하적 접선 개념 2가 수정될 필요가 제기될 수 있다.

어떤 학생들은 기하적 접선 개념 1이 [그림 Ⅲ-8]의 경우를 포괄할 수 있음을 보고 기하적 접선 개념 1로 돌아가려고 할 수도 있다. 그러나 기하적 접선 개념 1은 포물선 맥락을 수용하지 못했으므로 적절한 대안이 되지 못함을 상기하게 하면, 결국 제 3의 접선 개념이 필요함을 인식하게 할 수 있다. 이러한 상황에서 '할선의 극한'[8]을 새로운 접선 개념으로 삼는 것이 적절한지 탐구해 보게 한다. 여기서 적절성의 기준은 맥락 포괄성이다. 학생들은 기존의 기하적 접선 개념 1, 2가 포괄하는 원과 포물선 맥락을 할선의 극한이라는 새로운 후보가 포괄하는지, 또 기존의 기하적 접선 개념 1, 2가 포괄하지 못한 삼차함수의 맥락도 포괄하는지를 확인하여야 한다. 이 과정을 거쳐 할선의 극한이라는 새로운 개념이 세 맥락을 모두 포괄할 수 있음을 알게 되면서, 기하적 접선 개념 2로부터 기하적 접선 개념 3으로 나아가게 된다.

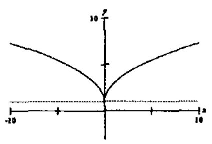
한편, 원이나 포물선에서 통용되었던 함수적 접선 개념 1과 관련하여, 판별식 $D=0$은 이 <단계 5>에서는 사용할 수 없으므로, 함수적 접선 개념 1 역시 수정되어야 한다고(함수적 접선 개념 1은 이 맥락을 포괄하지 못한다고) 생각하는 학생들이 있을 수 있다. 그러므로 함수적 접선 개념 1이 이 맥락에서도 여전히 유효한지 아닌지 알아보는 활동을 하게 할 필요가 있다. 이러한 활동을 통해 함수적 접선 개념 1의 본질은 판별식 $D=0$이 아니라 '중근을 갖는다.'는 사실이며, 판별식 $D=0$은 '이차방정식(이라는 특수한 제한된 맥락)에서 중근을 갖는다.'의 다른 표현임을 알게 된다. 이차방정식의 맥락을 떠나, 이를테면 $y=x^3+1$과 직선 $y=1$을 연립하여 얻은 방정식 $x^3+1=1$로부터 $x=0$이 중근(실제로는 삼중근)이므로, 이 경우에도 중근을 갖는다는 개념이 성립함을 확인할 수 있다. 판별식 $D=0$은 쓸 수 없어도 중근을 갖는다는 함수적 접선 개념 1은 위의 삼차함수의 경우에도 적용 가능함을 알게 된다.

곡선 $y=x^3+1$의 한 접선 $y=1$은 '스치고 지나가지는 않지만 접선인 것이 있다.'는 사실의 예가 된다.

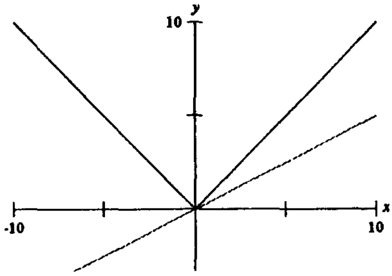
그러므로 곡선을 스치고 지나가지 않는 직선 중에도 접선인 것이 있다는 것을 알게 되지만, 여전히 곡선을 스치고 지나가는 직선은 접선이라고 생각할 수 있다. 곧 스치고 지나가는 것은 접선이기 위한 필요조건은 아니지만, 충분조건은 된다고 생각할 수 있다. 다음 [그림 Ⅲ-9](곡선 $y=|x|$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$)를 맥락으로 제시하여 이러한 생각을 수정할 기회를 제공한다.[9]

8) 곡선 위의 점 P를 고정시키고 점 Q를 곡선을 따라 점 P에 한없이 가까워지게 할 때 직선 PQ가 한없이 가까워지는 직선이 점 P에서 이 곡선의 접선이다.

9) 기하적 접선 개념 2의 반례로 곡선 $y=2\sqrt{|x|}+1$과 직선 $y=1$과 같은 예도 사용할 수 있다.



<기하적 접선 개념 2의 반례 2>



[그림 Ⅲ-9]

직선 $y=\frac{1}{2}x$는 곡선 $y=|x|$를 원점 (0, 0)에서 스치고 지나간다. Tall(1985)은 직선이 곡선을 스치고 지나간다는 직관적인 아이디어가 이와 같이 그래프에 첨점(corner)이 있는 경우 학생들로 하여금 무한히 많은 접선이 존재한다고 믿게 할 수 있다고 하였다. 그런데 $x=0$에서 곡선 $y=|x|$의 미분계수는 존재하지 않으며 접선의 방정식도 구할 수 없으므로, 함수적 접선 개념 2의 관점에서 보면 원점 (0, 0)에서 접선이 존재하지 않는다. 기하적 접선 개념 3의 관점에서 보아도 접선은 존재하지 않는다. 그러므로 이 예를 통해 곡선을 한 점에서 스치고 지나간다는 것은 접선이기 위한 충분조건도 되지 않는다는 인식에 이를 수 있다.

결국 [그림 Ⅲ-8]과 [그림 Ⅲ-9]의 두 반례를 통해 원과 포물선의 맥락에서 접선의 본질로 생각되던 '스치고 지나간다.'는 개념이 여기에서는 접선이기 위한 필요조건도 충분조건도 아닌 것으로 밝혀진다. 기하적 접선 개념 2는 완전히 부정된다.

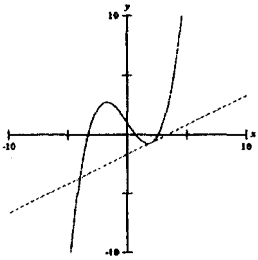
6. 기하적 접선 개념 1의 부정 (2) (단계 6)

앞의 <단계 4>에서 기하적 접선 개념 1이 접선이 되기 위한 충분조건이 아닌 것으로 밝혀졌지만, 필요조건이라는 것은 부정되지 않았다.

지금까지 등장한 그림들과 원, 포물선, $y=x^3$ 형태의 삼차함수 맥락에서, '접선이 곡선과 모두 한 점에서 만난다.'는 공통점이 있었다.

이제 다음과 같은 [그림 Ⅲ-10]을 제시한다. (곡선 $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x+1$과 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{3}$)

<기하적 접선 개념 1의 반례 2>



[그림 Ⅲ-10]

학생들에게 미분을 이용해 직선 $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{3}$이 점 $(2, -\frac{2}{3})$에서 곡선 $y=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x+1$의 접선의 방정식임을 확인하게 한다. 그런데 [그림 Ⅲ-10]에서 볼 수 있듯이 직선은 곡선과 한 점이 아닌 두 점에서 만난다. 이를 통해 곡선과 한 점에서 만난다는 것은 접선이기 위한 필요조건도 되지 않음을 인식하게 할 수 있다. 결국 초기 단계에서 접선의 본질로 생각되었던 '곡선과 한 점에서 만난다.'는 것도 접선의 본질이 아니며, 접선이 되기 위한 아무 조건도 아닌 것이 된다. 즉, 기하적 접선 개념 1은 완전히 부정된다.

여기서 학교수학의 한 가지 특징을 볼 수 있다. 기하적 접선 개념 1이 이 단계에서 부정된다고 해서 그것이 학교수학에서 의미 없는 것은 결코 아니다. 학교수학은 언제나 학생들의 인지적 이해의 범위 안에서 제공된다. 따라서

기하적 접선 개념 1은 중학교수학에서는 접선의 본질일 뿐 아니라, 이 단계에서 학습자가 새로운 맥락에서 수준 상승의 경험을 할 수 있는 토대가 된다. 이는 앞에서 부정된 기하적 접선 개념 2에 대해서도 마찬가지이다.

'할선의 극한'이라는 개념은 미시적인 성질로서, 직선이 곡선 전체와 한 점에서 만나는가 아닌가를 생각하던 이전의 개념과는 다른 것이라는 것을 인식할 수 있게 해야 한다. 곡선 전체와 몇 점에서 만나는가는 이 단계에서는 비본질적인 것으로 파악되어야 한다. 접선은 곡선의 국소적 성질과 관련된 것임을 인식하게 할 필요가 있다. 접선이 존재하는 경우(또는 어떤 점에서 미분이 가능한 경우) 곡선을 접점 근방에서 확대하면 직선에 가까워짐을 보여주는 컴퓨터 프로그램을 이용한 탐구 활동도 접선이 곡선의 국소적 성질과 관련된 개념임을 인식하는 데 도움이 될 수 있다(Artigue, 1991; Tall, 1987).

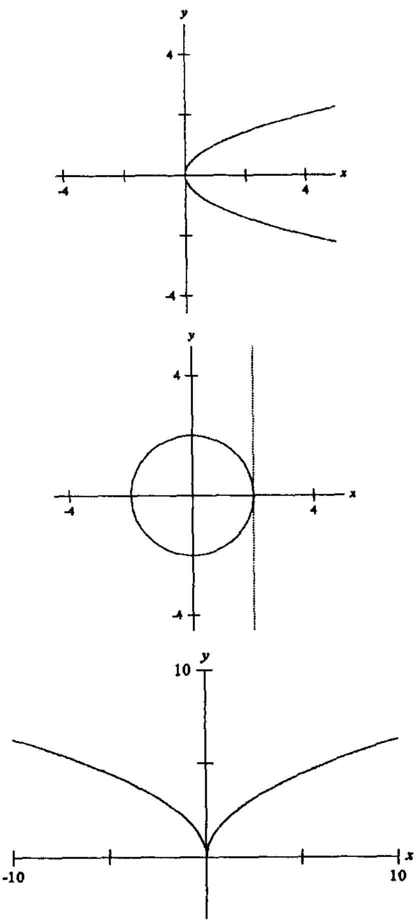
끝으로, <단계 5>에서와 마찬가지로, 함수적 접선 개념 1이 이 경우에도 적용되는 것임을 확인하게 한다. 나아가 일반적인 다항함수에서 함수적 접선 개념 1이 적용될 수 있는지를 생각해 보게 한다.

7. 함수적 접선 개념 2의 반성 (단계 7)

앞의 <단계 4, 5, 6>에서는 주어진 직선이 접선인지 아닌지를 확인하는 데 미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구하여 그것이 주어진 직선과 같은지를 확인하는 것이 주요한 방법이다. 이 과정에서 학생들은 '미분가능성'과 '접선의 존재성'이 같다고 생각할 수 있다(함수적 접선 개념 2). 곧 미분가능성과 접선의 존재성이 서로 필요충분조건이라고 생각할 가능성이 있다.

다음 [그림 Ⅲ-11]과 같은 예(곡선 $x=y^2$과 직선 $x=0$, 곡선 $x^2+y^2=4$와 직선 $x=2$, 곡선 $y=2\sqrt{|x|}$와 직선 $x=0$)를 제시하여 이러한 함수적 접선 개념 2를 반성할 기회를 제공할 수 있다.

<함수적 접선 개념 2의 반례>



[그림 Ⅲ-11]

함수적 접선 개념 2의 관점에서 보면, $x=0$에서 $x=y^2$은 미분불가능하므로 점 (0, 0)에서 접선이 존재하지 않으며, 마찬가지로 점 (2, 0)

에서 $x^2+y^2=4$ 의 접선도 존재하지 않는다. 그러나 기하적 접선 개념의 관점에서 보면 두 경우 모두 접선이 존재한다. 또 $x=0$ 에서 $y=2\sqrt{|x|}$ 의 미분계수가 존재하지 않으므로 미분을 이용하여 원점 (0, 0)에서 접선의 방정식을 구할 수 없다. 그러나 기하적 접선 개념 3의 관점에서 보면, 직선 $x=0$ 이 원점 (0, 0)에서 할선의 극한이 되므로 접선이 존재한다. 이 예들은 미분가능성이 접선의 존재성의 충분조건은 되지만 필요조건은 되지 않음을 시사한다. 이러한 탐구를 통해 미분계수의 존재성과 접선의 존재성과의 관계를 파악할 수 있게 한다.

이와 같이 새로운 사례가 반례로 도입되면서 맥락이 확대되는 가운데 접선 개념을 수정해 가는 과정을 거치는 동안, 학생들은 초기 단계에서 접선이 도입될 때 접선의 본질로 생각되던 '곡선과 한 점에서 만난다.'나 '곡선을 스치고 지나간다.'는 것은 접선이기 위한 충분조건도 필요조건도 아닌, 즉, 접선의 본질이 아닌 것으로 생각하는 수준에 이르게 된다. 그리고 할선의 극한이 이전의 기하적 접선 개념에 비해 가지는 장점을 인식할 수 있게 되며, 따라서 접선에 대한 적절한 이차직관이 형성될 수 있다.

한편, 접선 개념의 수정, 개선은 위의 단계를 넘어 계속될 수 있다. 예를 들어, 함수적 접선 개념 1이 초월함수나 무리함수라는 맥락에서도 적용 가능한 것인지 탐구할 수 있다. 또 함수적 접선 개념 2도 좌표축을 다르게 설정하여 주어진 곡선의 방정식을 다르게 표현하면 처음 식에서는 미분계수가 존재하지 않던 점에서 미분계수를 구할 수 있게 되므로 결과적으로 미분가능성과 접선의 존재성을 같은 것으로 볼 수 있지 않은가와 같은 탐구를 계속할 수 있다.

그러나 이러한 탐구는 학교수학의 범위를 벗어나므로 여기서는 이에 대해 더 이상 논의하지 않기로 한다.

Ⅳ. 결 론

이 논문은 이전 학교급 또는 학년에서의 학습을 통해 형성된 접선 개념을 이후 학교급 또는 학년에서의 학습 과정에서 반성, 수정, 개선하는 학습 경험이 이루어지도록 하는 방안을 모색한 것이다. 이 연구에서 제시한 방향을 따라 원의 접선에서 시작하여, 포물선, 삼차함수 등으로 맥락을 확대하면서 반례를 통해 기존의 접선 개념을 수정해 가는 과정을 거치는 동안, 학생들은 초기 단계에서 접선이 도입될 때 접선의 본질로 생각되던 '곡선과 한 점에서 만난다.'나 '곡선을 스치고 지나간다.'는 접선이기 위한 충분조건도 필요조건도 아님을, 곧 접선의 본질이 아님을 알게 될 것이다. 그리고 할선의 극한이나 중근, 미분계수와 관련된 접선의 정의의 의미를 이해하고 그 장점을 인식할 수 있게 될 것이다.

플라톤은 무지의 자각에서 비롯되는 경이(놀라움)로부터 탐구가 시작된다고 하였으며, Lakatos(1976)는 반례의 등장으로 기존 지식의 한계를 인식하는 것이 수학적 지식 성장의 원동력임을 구체적으로 보여주었다. 소크라테스의 산파법이나 Lakatos의 반례는 능동적인 지식 탐구의 핵심적인 심리적 원인이라 할 수 있는 인지적 불균형을 야기하는 기능을 한다는 공통점을 지니고 있다. Piaget는 수학적 지식 구성의 과정에서 기존의 인지 구조와 새로운 내용 사이에 인지적 불균형이 필수불가결하다고 보았다(홍진곤, 1999). 학습자가 이미 알고 있는 수학적 지식과 새로 배울 수학적 지식 사이에

인지적 불균형이 일어나도록 할 때, 학습이 효과적으로 일어날 수 있다. 접선 개념은 바로 그러한 인지적 불균형을 야기하는 소재라고 할 수 있다.

교육은 교과 내용을 소재로 활용하여 학생을 현재의 인지 구조에서 더 높은 수준의 인지 구조로 올라가게 하는 것, 상대적으로 낮은 수준에 있는 학생으로 하여금 현재 자신의 인식 수준이 낮음을 깨닫고 자신의 인지 구조를 변혁하도록 하는 수준 경신의 과정이다(장상호, 2000). 이러한 교육을 하는 데 진리인 지식을 소유한 사람과 소유하지 못한 사람이라는 생각은 그다지 도움이 되지 않는다. 학생, 교사를 포함하여 우리 모두는, 완전히 맞는 지식이나 완전히 틀린 지식이 아니라, 어느 정도 옳으면서 동시에 개선이나 수정의 여지가 있는 불완전한 지식을 소유하고 있다. 그러므로 어느 누구도 절대 진리에 도달했다고 말할 수 없으며, 다만 더 높은 수준으로의 상승을 소망할 수 있을 뿐이다. 접선 개념을 예로 하면, 곡선과 한 점에서 만난다거나 곡선을 스치고 지나간다는 개념은 더 높은 수학적인 수준에서 보면 부적절한 것으로 드러나지만, 어느 단계에서는 타당하다. 달리 말해, 그것들은 어느 정도의 진리와 어느 정도의 오류를 담고 있다. 나아가, 이들에 어느 정도의 오류가 내포되어 있기 때문에 오히려 교육적으로 가치 있는 소재라고도 할 수 있다. 어느 정도의 불완전함이 내재되어 있으므로, 학생들이 그것을 고쳐 가는 성장의 경험을 하게 할 수 있기 때문이다.

수학을 배우는 과정에서 학생들이 경험해야 할 정서는 수학적 개념이 하나 하나 머리 속에 차곡차곡 쌓이는 느낌이 아니라, 자신이 이미 가지고 있는 지식의 소박함과 한계를 깨닫고 보다 높은 수준의 지식을 지향해야 한다는 것이다. 중학교에서 수학을 배우며 가진 접선 개념이 소박하고 제한된 것이었다는 것을 고등학교에 가서 이차함수에서 접선을 배우며 깨닫고, 다시 나중에 미분을 배우면서 이전에 자신이 수정한 접선 개념 역시 접선의 본질이 아니었다는 것을 자각하는 경험을 하게 한다면, 학생들은 적어도 자신이 진보하고 있다는 느낌을 갖게 될 것이며, 어쩌면 '경이'라는 정서를 경험할 수도 있을 것이다.

참고문헌

강문봉(1993). **Lakatos의 수리철학의 교육적 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

강문봉(2004) Lakatos 방법론의 초등수학에의 적용에 대한 연구. **과학교육논총 16**, 47-65. 경인교육대학교 과학교육연구소.

교육부(1997). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2002). **중학교 수학 7-나**. 서울:고려출판

박교식(1998). 우리나라 초등학교 수학의 정체성에 관한 연구. **대한수학교육학회논문집, 8**(1), 89-100.

박교식 · 임재훈(2004). 다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 14**(1). 19-37.

우정호 · 류희찬 · 문광호 · 박경미(2002) **고등학교 수학 10-나**. 서울: 대한교과서.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2001). **중학교 수학 7-나**. 서울: 디딤돌

장상호(2000). **학문과 교육(하), 교육적 인식론이란 무엇인가**. 서울대학교 출판부.

조영미(1999). 접선 개념의 교육적 연구. **수학교육학연구, 9**(1), 229-237.

홍진곤(1999). **반영적 추상화와 조작적 수학**

학습-지도. 서울대학교 대학원 박사학위논문.
Artigue, M. (1991). Analysis In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
Cornu, B. (1991). Limits In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery.* London: Cambridge University Press.
Tall, D. (1985). Chords, Tangents and the Leibniz Notation. *Mathematics Teaching, 112*, 48-52.
Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. *Proceedings of PME 11*, Montreal, 3, 69-75.
Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus, 12* (3&4), 49-63.
Tall, D. (1991). Reflections In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 251-260). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions - the case of the tangent. *Proceedings of PME 6*, Antwerp, 24-28.

Teaching and Learning Concepts of Tangent in School Mathematics

Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)
Park, Kyo Sik (Gyeongin National University of Education)

Students are exposed to a concept of tangent from a specific context of the relation between a circle and straight lines at the 7th grade. This initial experience might cause epistemological obstacles regarding learning concepts of tangent to additional curves.

The paper provides a method of how to introduce a series of concepts of tangent in order to lead students to revise and improve the concept of tangent which they have. As students have chance to reflect and revise a series of concepts of tangent step by step, they realize the facts that the properties such as 'meeting the curve at one point' and 'touching but not cutting the curve' may be regarded as the proper definition of tangent in some limited contexts but are not essential in more general contexts. And finally students can grasp and appreciate that concept of tangent as the limit of secants and the relation between tangent and derivative.

* **Key Words**: tangent(접선), fallibilism(오류주의), epistemological obstacle(인식론적 장애), context(맥락, 문맥) concept definition(개념 정의)

논문접수 : 2004. 4. 6
심사완료 : 2004. 5. 1