한국수학사학회지 제17권 제2호(2004년 5월), 61-72

체바 정리의 교수학적 변환 및 확장

경상대학교 수학교육과 한인기
inkiski@gsnu.ac.kr

본 연구에서는 문헌 연구를 통해, 수학사적 발전 과정 및 교수학적 변환을 통해 얻어진 체바 정리의 변환에 대한 구체적인 자료를 제시하였으며, 이를 통해 체바 정리가 변환되고 확장되는 패턴을 고찰하였다. 특히, 본 연구에서는 체바 정리의 역, 유향선분, 삼각함수, 벡터 등의 개념과 관련된 체바 정리의 변형 및 발전을 분석하였으며, n각형에 대한 체바 정리, 사면체에 대한 체바 정리를 제시하면서 일반화 및 유추에 관련된 체바 정리의 변환과 확장을 고찰하였다.

주제어 : 체바의 정리, 교수학적 변환, 확장, 일반화, 유추

0. 서론

수학자에 의해 발명된 수학적 지식은 최초의 원형 그대로 보존, 전수되어 학생들에게 지도되는 것이 아니라, 관련된 새로운 수학적 개념이나 방법이 발명됨에 따라 혹은 수학적 지식을 활용하는 주체의 의도에 따라 원형의 수학적 지식은 다른 형태로 변환된다. 특히, 우정호[2]에 의하면, 형식적인 수학적 지식을 보다 의미 있게 가르치기 위해, 그 지식의 근원, 의미, 동기, 쓰임새를 알게 해주는 일련의 활동을 교실 문맥으로 구성하려 시도하게 되는데, 이처럼 교육적 의도에 의한 형식적인 수학적 지식의 변형을 지식의 교수학적 변환이라 한다.

중등학교의 수학 교수·학습에서는 수학자가 발명한 원형 그대로의 수학적 지식을 지도하는 것이 아니라, 교육적 의도에 따라 변형된 수학적 지식을 주로 다루기 때문에, 수학교과서, 참고서, 수학교육에 관련된 다양한 자료에 나타난 수학적 지식의 변환을 고찰하는 것은 교육적인 측면에서 가치가 있을 역사-발생적 방법에 관련된 많은 이론적인 연구들([1], [2], [3], [4], [5], [6], [8] 등)이 있었으며, 특히 한인기[4]는 피타고라스 정리, 도형수, 페르마 소정리 등에 관련하여 수학적 지식의 역사적 발전 및 변환 과정을 자세히 고찰하였다.

본 연구에서는 기하학의 아름다운 정리 중의 하나로 꼽히는 체바(Ceva)의 정리를 중심으로 수학적 지식의 변형에 대해 상세히 고찰할 것이다. 체바의 정리는 삼각형의

꼭지점과 대변의 한 점을 연결한 세 선분의 공점성, 즉 그러한 세 선분이 한 점을 지나는 것에 관련된다. 그리고, 체바 정리의 역은 세 선분의 공점성 조건을 나타내며, 체바 정리의 역을 이용하여 삼각형의 세 중선, 높이, 이등분선들이 각각 한 점에서 만난다는 것을 쉽게 증명할 수 있다. 한편, 체바의 정리는 중등학교 수준에서 심화학습 자료로도 폭넓게 사용되고 있기 때문에, 중등학교 학생들의 수학적 문화의 수준을 향상시킬 수 있는 의미 있는 자료가 될 것으로 기대된다.

본 연구에서는 다양한 문헌 연구를 통해, 체바 정리가 변환되고 확장된 형태를 제시하고, 그러한 변환과 확장의 방향성을 탐구할 것이다. 이를 통해, 학생들의 창의적 수학 탐구 활동의 방향성 및 방법에 관련된 교수학적으로 의미 있는 시사점을 모색할 것이다.

1. 체바 정리의 다양한 형태

체바(Ceva, 1648~1734)는 '직선에 대하여'라는 책을 저술했는데, 이 책에 유명한 체바의 정리가 증명되어 있다. [7]에 체바의 정리에 관련하여 '삼각형의 한 꼭지점과 대변의 한 점을 연결한 선분을 체바선(cevian)이라 한다. 삼각형 ABC에서 세 체바선 AX, BY, CZ이 한 점에서 만나면, 등식 $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1$이 성립하며, 이 정리를 체바의 정리라 한다'고 기술되어 있다. 체바의 정리는 그 역도 성립하는데, 체바의 정리와 그 역을 함께 체바의 정리라고 부르는 경우도 있다. 본 연구에서는 [7]에서와 같이, 체바의 정리와 그 역을 따로 구분할 것이다.

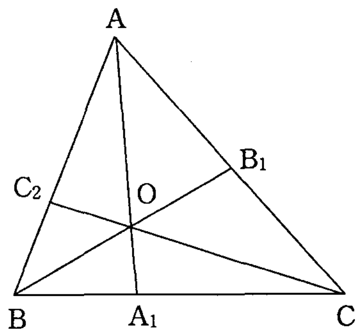
(1) 체바 정리의 역

어떤 정리가 증명되면, 그 정리에 대한 역이 성립하는가에 대한 자연스러운 탐구가 이루어지게 되며, 이를 통해 수학적 지식이 확장된다. 기술한 것과 같이, 체바의 정리는 그 역도 성립한다. 체바 정리의 역은 '삼각형 ABC에서 세 체바선 AX, BY, CZ에 대해, 등식 $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1$이 성립하면, AX, BY, CZ는 한 점에서 만난다'고 기술할 수 있다.

체바 정리의 역에 대한 다양한 증명이 알려져 있다. 본 연구에서는 체바 정리에 대한 전형적인 증명의 예로, [11]에 제시된 방법을 살펴보기로 하자. 삼각형 ABC의 변 AB, BC, CA에 각각 점 C_1, A_1, B_1을 잡아, 다음 등식이 성립한다고 하자.

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1 \qquad ①$$

그러면 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만난다는 것을 증명하자. 선분 AA_1과 BB_1의 교점을 O라 하고, 직선 CO를 작도하자(그림 1).



<그림 1>

이 직선은 변 AB와 어떤 점에서 만나게 되는데, 이 점을 C_2라 하자. 선분 AA_1, BB_1, CC_2가 한 점에서 만나므로, 체바의 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_2}{C_2A} = 1 \qquad ②$$

등식 ①과 ②를 비교하면, 등식 $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC_2}{C_2A}$를 얻을 수 있다. 이 등식은 점 C_1과 C_2가 변 AB를 같은 비로 나눈다는 것을 의미한다. 그러므로, 점 C_1과 C_2는 일치하고, 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만난다. □

(2) 체바 정리의 확장

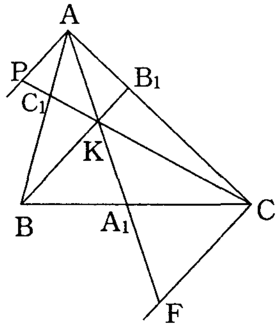
[16]에서는 체바의 정리에 체바선의 평행성을 첨가하여 '삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA에 각각 점 C_1, A_1, B_1을 잡아 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만나거나 모두가 평행할 필요충분조건은 $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$'라고 기술하였다. 즉, 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만나는 것뿐만 아니라, 모두가 평행할 경우도 포함시켰다. 이제, 증명을 살펴보자. ABC를 임의의 삼각형이라 하고, 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 점 K에서 교차한다고 하자(그림 2).

점 A와 C를 지나 직선 BB_1과 평행한 직선을 작도하여 직선 CC_1과 AA_1과의 교점을 각각 P, F라 하자. 그러면 $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{PK}{KC}$가 성립한다. 삼각형 AKP와 FKC는 닮았으므로, $\frac{PK}{KC} = \frac{AP}{CF}$이다. 결국, $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AP}{CF}$이다.

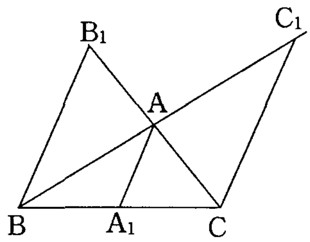
한편, 삼각형 CA_1F와 BA_1K는 닮았으므로, $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{CF}{KB}$. 마지막으로, 삼각형 AC_1P와 BC_1K의 닮음으로부터, $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{BK}{PA}$. 얻어진 세 등식을 변끼리 서로 곱하면, 다음을 얻는다.

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{AP}{CF} \cdot \frac{CF}{KB} \cdot \frac{BK}{PA} = 1$$

세 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 평행한 경우에 대해서는 독자들에게 남긴다. □



<그림 2>



<그림 3>

[16]의 증명에서 체바 정리의 역은 이미 기술한 체바 정리의 역에 대한 증명과 같은 방법이 제시되어 있다. [16]의 증명에서 AA_1, BB_1, CC_1이 평행한 경우에 대해서는 증명 방법이 제시되지 않고 독자에게 맡겨졌는데, [15]의 연구에서는 체바의 정리에서 A_1은 변 BC에서, B_1은 변 AC의 연장선에, 점 C_1은 변 AB의 연장선에서 잡아(그림 3), 세 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 평행한 경우에 대해도, 등식 $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$을 증명하였다. 평행한 경우에 대한 증명만을 살펴보자. 각의 변들에서 비례하는 선분에 관한 정리에 의해, 다음이 성립한다.

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{A_1B}{BC}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{CA_1}$$

그러므로 등식 $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$이 성립한다. □

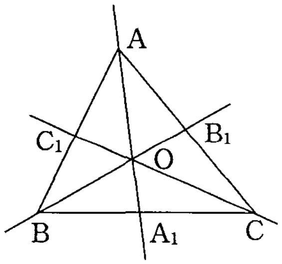
최초의 체바의 정리에서는 A_1은 변 BC에서, B_1은 변 AC, 점 C_1은 변 AB에 잡았는데, [15]에서는 B_1, C_1을 각각 변 AC, AB의 연장선에 잡아 체바의 정리를 확장시켰다. [9]에서는 이와 같이 확장된 정리를 일반화된 체바의 정리라고 명명하였다.

(3) 유향선분과 체바의 정리

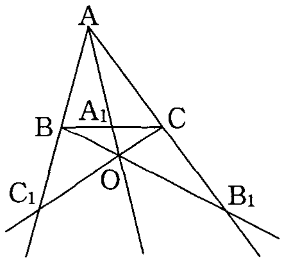
[10]에서는 유향선분의 개념을 도입하여, 체바의 정리와 증명을 제시하였다. [10]에서 유향선분 AB는 $\overline{AB}$와 같이 나타냈다. 한편, 체바의 정리는 '점 A_1, B_1, C_1이 각각 직선 BC, CA, AB에 속하며, 삼각형 ABC의 꼭지점과 일치하지 않는다. 그리고, 직선 AA_1, BB_1, CC_1에서 두 직선이 교차한다. 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점 O에서 교차할 필요충분조건은 다음 등식이 성립하는 것이다.'라고 기술되어있다.

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}}\cdot\frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}}=1 \qquad ③$$

[10]에 기술된 체바의 정리에 대한 상세한 증명을 살펴보자. 모든 세 점 A_1, B_1, C_1이 삼각형 ABC의 상응하는 변에 속하는 경우(그림 4)와 이들 중 하나가 삼각형의 변에, 나머지 두 점은 다른 두 변의 연장선에 속하는 경우를 생각할 수 있다(그림 5).



<그림 4>



<그림 5>

이로부터, 등식 ①의 좌변은 양수임이 유도된다. 그러므로, 등식 ③을 증명하기 위해, 다음이 성립함을 증명하면 된다.

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1 \qquad ④$$

메넬라우스 정리를 삼각형 ABA_1과 직선 CC_1에, 삼각형 ACA_1과 직선 BB_1에 사용하면, 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}}\cdot\frac{\overline{A_1O}}{\overline{OA}}=-1,\quad \frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}}\cdot\frac{\overline{A_1B}}{\overline{BC}}\cdot\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=-1$$

이로부터 다음을 얻는다.

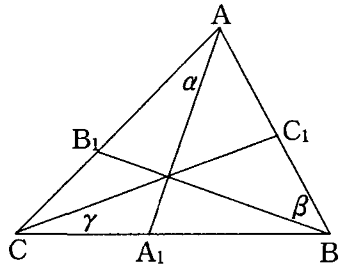
$$\left(\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BC}{CA_1}\cdot\frac{A_1O}{OA}\right)\left(\frac{AO}{OA_1}\cdot\frac{A_1B}{BC}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\right)=1$$

즉, 등식 ④가 성립한다. □

한편, [10]에 제시된 체바 정리의 역은 이미 기술한 증명과 유사하다.

(4) 삼각함수와 체바 정리

[14]에서는 체바 정리를 삼각함수 개념을 이용하여, 체바 정리의 삼각함수 형태를 '체바선 AA_1, BB_1, CC_1이 삼각형 AC, AB, BC의 변들과 각각 α, β, γ의 각을 이룬다고 하자(그림 6). 이때, $\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}=1$이 성립한다'고 기술되어 있다.



<그림 6>

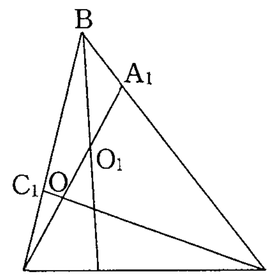
[14]에 기술된 체바 정리의 증명을 살펴보자. $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_{AA_1C}}{S_{AA_1B}}=\frac{b\sin\alpha}{c\sin(A-\alpha)}$, $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{c\sin\beta}{a\sin(B-\beta)}$, $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{a\sin\alpha}{b\sin(C-\gamma)}$.

선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만나므로, 체바의 정리에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}=1 \quad \square$$

(5) 벡터와 체바 정리

[12]에서는 벡터를 이용한 체바 정리의 증명을 제시하고 있다. O를 선분 AA_1과 CC_1의 교점이라 하고, O_1을 선분 AA_1과 BB_1의 교점이라 하자(그림 7).



<그림 7>

$\frac{AB_1}{B_1C}=a$, $\frac{CA_1}{A_1B}=b$, $\frac{BC_1}{C_1A}=c$라 하자. 비 $\frac{AO}{AA_1}$을 x라 두고, 비 $\frac{AO_1}{AA_1}$을 y라 하자. 이때, 다음이 성립한다.

$$\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{AA_1}=x\left(\frac{b}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AC}\right)=x\cdot\frac{b}{b+1}\cdot(c+1)\cdot\overrightarrow{AC_1}+\frac{x}{b+1}\overrightarrow{AC}$$

점 O가 직선 C_1C에 속하므로, $c\cdot\frac{b}{b+1}(c+1)+\frac{x}{b+1}=1$.

이로부터, $x=\frac{b+1}{b(c+1)+1}$.

유사한 방법으로, 다음을 얻는다.

$$\overrightarrow{AO_1}=y\overrightarrow{AA_1}=y\left(\frac{b}{b+1}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b+1}\overrightarrow{AC}\right)=y\cdot\frac{b}{b+1}\overrightarrow{AB}+y\cdot\frac{a+1}{a(b+1)}\overrightarrow{AB_1}$$

점 O_1이 직선 BB_1에 속하므로, $y\cdot\frac{b}{b+1}+y\cdot\frac{a+1}{a(b+1)}=1$.

이로부터, $y=\frac{a(b+1)}{ab+a+1}$.

선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만날 필요충분조건은 x=y이다, 즉, 다음과 같다.

$$\frac{b+1}{b(c+1)+1}=\frac{a(b+1)}{ab+a+1}$$

이것은 $abc=1$과 동치이다. 이와 같이, 선분 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만날 필요충분조건은 $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$. □

살펴본 바와 같이, 기하학적인 형태로 발명된 체바의 정리는 수학의 역사적 발전 과정에서 혹은 교수학적인 필요에 의해 확장되기도 하고, 유향선분, 삼각함수, 벡터 등의 개념과 관련되어 다양한 형태로 변환되어졌다. 수학적 지식의 이러한 변환은 수학적 지식의 발명 및 발달의 바탕이 된다. 예를 들어, 데카르트에 의한 해석기하학의 발명은 기하학적인 원형을 대수적인 형태로 변환, 확장시킨 것에 기인하며, 이를 통해 수학적 지식이 양적으로, 질적으로 획기적인 성장이 이루어졌다.

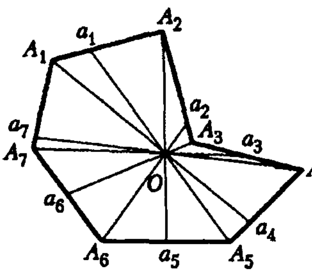
3. 다각형과 사면체에 대한 체바의 정리

(1) 다각형에서 체바의 정리

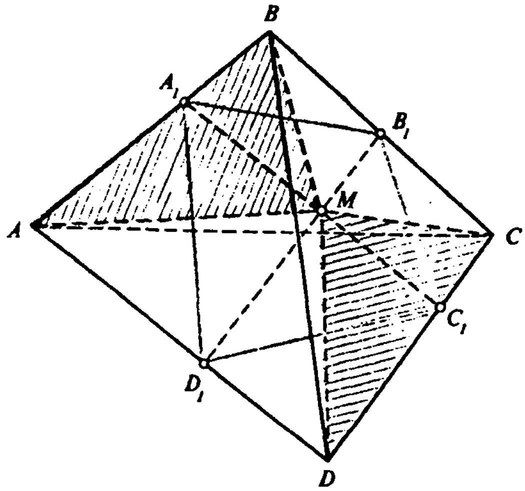
[16]에서는 다각형에 대한 체바의 정리 '홀수인 변을 가지는 다각형 $A_1A_2\cdots A_{2n-1}$의 평면에 점 O가 주어졌다. 직선 OA_1, OA_2, …, OA_n, …, OA_{2n-1}은 다각형에서 꼭지점 A_1, A_2, …, A_n, …, A_{2n-1}의 맞은편 변과 점 a_n, a_{n+1}, …, a_{2n-1}, a_1, …, a_{n-1}에서 각각 교

차한다. 이때, $\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdots \frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}} \cdot \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1}=1$이 성립한다'는 것이 제시되어 있다.

다각형에 대한 체바의 정리를 증명해 보자. 삼각형 A_1Oa_1과 a_1OA_2의 넓이로부터(그림 8), $\frac{A_1a_1}{a_1A_2}=\frac{OA_1 \cdot \sin\angle A_1Oa_1}{OA_2 \cdot \sin\angle a_1OA_2}$. 단, 반직선 OA_1을 시계 반대 방향으로 회전시켜 반직선 Oa_1과 일치되는 경우에 $\angle A_1Oa_1$은 양으로 하고, 반대의 경우에 음으로 한다.



<그림 8>



<그림 9>

마찬가지로, $\frac{A_2a_2}{a_2A_3}=\frac{OA_2 \cdot \sin\angle A_2Oa_2}{OA_3 \cdot \sin\angle a_2OA_3}$, $\frac{A_3a_3}{a_3A_4}=\frac{OA_3 \cdot \sin\angle A_3Oa_3}{OA_4 \cdot \sin\angle a_3OA_4}$, $\cdots$, $\frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1}$
$=\frac{OA_{2n-1} \cdot \sin\angle A_{2n-1}Oa_{2n-1}}{OA_1 \cdot \sin\angle a_{2n-1}OA_1}$.

등식들을 변끼리 서로 곱하고, $\angle A_1Oa_1=\angle a_nOA_{n+1}$, $\angle A_2Oa_2=\angle a_{n+1}OA_{n+2}$, $\cdots$임을 고려하면, $\frac{A_1a_1}{a_1A_2} \cdot \frac{A_2a_2}{a_2A_3} \cdot \cdots \cdot \frac{A_{2n-2}a_{2n-2}}{a_{2n-2}A_{2n-1}} \cdot \frac{A_{2n-1}a_{2n-1}}{a_{2n-1}A_1}=1$. □

한편, [16]에는 $n>3$인 n각형에 대한 체바 정리의 등식은 상응하는 직선들이 한 점을 지나기 위해 충분하지는 않다는 것이 제시되어 있다. 수학적 지식의 발명에서 일반화는 중요한 역할을 해왔으며, 수학 교수·학습에서도 '일반화'는 학생들의 중요한 창의적 수학 탐구 활동의 유형이다. '삼각형에서 성립하는 정리가 사각형, 오각형, …, n각형에 대해서도 성립할 것인가?' [16]에서는 이 물음에 대한 체바의 정리에 관련된 대답을 해 주고 있으며, 수학적 지식의 일반화의 전형적인 예를 보여주고 있다.

(2) 사면체에 대한 체바의 정리

[13]에는 사면체에 대한 체바의 정리 'M을 사면체 ABCD의 내부점이라 하고, A_1, B_1, C_1, D_1을 각각 평면 CMD, AMD, AMB, CMB와 모서리 AB, BC, CD, DA의 교점이라 하자. 이때, $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$(⑤)이 성립한다. 한편, 역으로, 상응하는 모서리에 속하는 점 A_1, B_1, C_1, D_1에 대해 등식 ⑤이 성립하면, 평면 ABC_1, BCD_1, CDA_1, DAB_1은 한 점을 지난다'는 것이 제시되어 있다.

[13]에 제시된 사면체에 대한 체바 정리의 증명을 살펴보자. 점 A_1, B_1, C_1, D_1이 한 평면(이 평면은 점 M에서 교차하는 두 직선 A_1C_1과 B_1D_1을 지난다)에 속한다는 것과 메넬라우스 정리를 사용하면, 쉽게 필요조건을 증명할 수 있다(그림 9).

한편, 정리의 역은 점 A_1, B_1, C_1을 지나는 평면을 작도하고, 이 평면이 모서리 DA와 점 D_1에서 교차함을 이용하여 증명된다. □

실제로, [13]에 제시된 것은 증명이라기보다는 증명을 위한 방향제시라 할 수 있다. 상세한 증명을 살펴보자. [13]에는 사면체에 대한 메넬라우스 정리인 '평면 μ가 사면체 ABCD의 모서리 AB, BC, CD, DA와 각각 A_1, B_1, C_1, D_1에서 만나면, $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$'이며, 메넬라우스 정리의 역인 '사면체 ABCD의 모서리 AB, BC, CD, DA에 각각 속하는 점 A_1, B_1, C_1, D_1에 대해 $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$이 성립하면, 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1은 한 평면에 속한다'는 것이 제시되어 있다.

이제, 주어진 사면체 ABCD와 사면체의 모서리 AB, BC, CD, DA에 각각 속하는 점 A_1, B_1, C_1, D_1을 생각하자. 한 점 M에서 교차하는 두 직선 A_1C_1, B_1D_1은 한 평면을 결정하므로, 점 A_1, B_1, C_1, D_1은 한 평면 α에 속한다. 이제, 평면 α와 사면체 ABCD에 대해, 사면체에 대한 메넬라우스 정리를 사용하면, $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$을 얻을 수 있으며, 이로부터 사면체에 대한 체바의 정리가 증명된다.

사면체 ABCD에서 체바 정리의 역을 증명하자. <그림 9>에서 평면 ABC_1과 CDA_1의 교선은 직선 A_1C_1이고, 평면 BCD_1과 ADB_1의 교선은 직선 B_1D_1이다. 점 A_1, B_1, C_1, D_1에 대해, $\frac{AA_1}{A_1B} \cdot \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{CC_1}{C_1D} \cdot \frac{DD_1}{D_1A} = 1$이 성립하므로, 사면체 ABCD에 대한 메넬라우스 정리의 역에 의해, 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1은 한 평면에 속한다. 그리고,

직선 A_1C_1와 B_1D_1은 평행하지 않으므로, 한 점 M에서 만나며, 이로부터 평면 ABC_1, BCD_1, CDA_1, DAB_1은 한 점을 지난다는 것이 증명된다. □

[13]에서는 삼각형에서 체바 정리의 사면체로의 유추가 제시되어 있다. 유추는 중요한 수학적 사고 활동의 유형으로, 새로운 수학 문제의 구성이나 문제해결 과정에서 효과적인 인지 조작으로 인정받고 있다. 한편, 살펴본 바와 같이, 체바 정리의 수학사적 발전 및 교수학적 변환에서도 유추는 강력한 수단으로 실제 활용됨을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 다양한 문헌 연구를 통해, 수학사적 발전 과정 및 교수학적 변환을 통해 얻어진 체바 정리의 변환에 대한 구체적인 자료를 제시하였고, 이를 통해 체바 정리가 변환되고 확장되는 패턴을 고찰하였다.

기하학적인 형태로 발명된 체바의 정리(삼각형의 한 꼭지점과 대변의 한 점을 연결한 선분을 체바선(cevian)이라 한다. 삼각형 ABC에서 세 체바선 AX, BY, CZ이 한 점에서 만나면, 등식 $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1$이 성립함)는 그 역에 대한 고찰을 통해, 체바 정리의 원형이 확장되었다. 한편, 체바의 정리에 체바선의 평행성을 첨가하여 '삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA에 각각 점 C_1, A_1, B_1을 잡아 직선 AA_1, BB_1, CC_1이 한 점에서 만나거나 모두가 평행할 필요충분조건은 $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$'과 같은 형태로 일반화되어, 일반화된 체바의 정리가 되었다.

한편, 체바 정리는 유향선분, 삼각함수, 벡터 등의 개념과 관련되어 다양한 형태로 변형, 발전되었으며, 본 연구에서는 변환된 구체적인 형태와 이들에 대한 구체적인 증명 방법들이 제시되었다. 특히, 삼각함수, 벡터 등의 개념은 중등학교 수학교육에서 다루어지는 개념들로, 본 연구를 통해 제시된 자료들을 통해 중등학교 수학 교수-학습 과정에서 학생들의 창의적 수학 탐구 활동을 위한 방향 설정에 도움을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

한편, 본 연구에서는 체바 정리에 대한 일반화를 통해 얻어진 'n각형에 대한 체바의 정리', 공간으로의 유추를 통해 얻어진 '사면체에 대한 체바의 정리'의 구체적인 형태와 상세한 증명을 제시하였다. 일반적으로, 일반화와 유추는 수학적 지식의 생성 및 발전에 중요한 역할을 하는 것으로 알려져 있는데, 본 연구에서는 구체적으로 일반화와 유추에 관련된 체바 정리의 변환 및 확장을 상세히 고찰하였다.

참고 문헌

1. 김종명, "수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학교육관," 한국수학사학회지 10(2), 33-48.
2. 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대출판부, 2000.
3. 유윤재, "역사발생적 원리의 비판적 수용에 대하여," 한국수학사학회지 15(1), 109-114.
4. 한인기, 교사를 위한 수학사, 교우사, 2003.
5. 허민, "수학 교육에 활용할 옛 문제 연구," 한국수학사학회지 13(1), 33-48.
6. Avital, S., "History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning," in *Learn from the Masters*, Swetz, F. · Fauvel, J. · Bekken, O. · Johansson, B. · Katz, V. eds., MAA, 1995, 3-12.
7. Coxeter, H.S. · Greitzer, S.L., *Geometry Revisited*, MAA, 1967.
8. Freudenthal, H., *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 1991.

<러시아어 참고 문헌>

9. Aleksandrov, A.D. · Verner, A.L. · Ryzik, V.I., *8-9학년 기하학*, Prosveshenie, 1991.
10. Atanacyan, L.S. · Denicova, N.S. · Cilaev, E.V., *초등기하학(평면기하학)*, Santaks-press, 1997.
11. Atanacyan, L.S. · Butuzov, V.F. · Kadomtsev, S.B. · Shestakov, S.A. · Yudina I.I., *기하학: 8학년 심화학습 교재*, 교육출판사, 1996.
12. Bekker, B.M. · Nekrasov, V.B., *문제해결을 위한 벡터의 활용*, Mir-Sem'ya 95, 1997.
13. Erdniev, B. · Mantsaev, N. · "Menelaus와 체바의 정리", *Kvant* 3(1990), Fizmatlit, 56-59.
14. Kushnir, I., *기하학(정리와 문제)*. ASTARTA, 1996.
15. Ponarin, Ya.P., *7-11학년을 위한 기하학*, Feniks, 1997.
16. Shklyarski, D.O. · Chentsov, N.N. · Yaglom I.M., *기하학(평면기하학)*, Fizmatlit, 2000.

A Didactic Transposition and Enlargement of the Ceva Theorem

Dept. of Mathematics Education, Gyeongsang National University **Inki Han**

In this article we study on didactic transposition and enlargement of the Ceva theorem(if three cevians AX, BY, CZ, one through each vertex of a triangle ABC, are concurrent, then $\frac{BX}{XC}\frac{CY}{YA}\frac{AZ}{ZB}=1$). We suggest inverse of the Ceva theorem, some different forms of the Ceva theorem(oriented segment form, trigonometric form, vector form), enlarged the Ceva theorem of polygon and tetrahedron, and in detail propose these proofs.

Key words: didactic transposition, enlargement, Ceva theorem, analogy, generalization