한국수학사학회지 제17권 제2호(2004년 5월), 21-32

AHP의 수학적 배경과 수학교육 목적의 실천

서경대학교 수리정보통계학부 **함형범**
hbham@skuniv.ac.kr

AHP는 수학적 이론이 간명하고 실제 적용이 용이하여 다양한 분야에서 폭 넓게 활용되고 있는 의사결정 기법이다. 본 연구에서는 AHP의 수학적 배경을 고찰하고, AHP가 수학교육의 목적인 실용성, 도야성, 심미성, 문화적 가치 등을 실천하고 있음을 논의하였다. 또한 이러한 논의를 통하여 수학 교육과 학습에 대한 하나의 대안을 제시하였다.

주제어 : AHP, 쌍대비교행렬, 고유벡터, 수학의 실용성·도야성·심미성·문화적 가치

0. 서론

AHP(Analytic Hierarchy Process, 계층분석과정)는 복잡한 의사결정문제를 현장사례 및 현장감각을 가진 평가자들의 판단과 수리적 분석을 통하여 해결하는 의사결정방법으로 1970년대 초 Saaty에 의해 처음 개발되었다. AHP가 사용자들에게 본격적으로 알려지기 시작한 것은 1980년에 출간한 Saaty의 저서 'The Analytic Hierarchy Process'를 통해서이며, 일반적으로 의사결정문제 해결을 위한 AHP의 절차는 다음과 같이 4단계로 이루어진다. 첫째, 의사결정 요소들 간의 관계를 분석하여 계층구조를 형성하고, 둘째, 각 계층내의 의사결정 요소들의 쌍대비교를 통하여 계층별로 쌍대비교행렬을 구한다. 셋째, 쌍대비교행렬로부터 각 계층내의 의사결정 요소의 상대적 중요도를 고유벡터 방법으로 추정한다. 넷째, 각 계층별로 얻어진 요소들의 중요도를 결합하여 의사결정대안의 최종가중치인 총 중요도(만족도)를 계산한다. 이상의 절차에서 알 수 있듯이 AHP는 수학적 이론이 명확하여 선형대수의 기초 지식만 있으면 기본 논리를 이해하는데 큰 어려움이 없으며, 실제 적용이 매우 간편하여 다양한 분야에서 폭 넓게 활용되고 있다.

AHP가 초기에 개발되어 의사결정 관련 전문가들에게 알려졌을 때, 수학적 배경이 약하다는 이유로 기존의 효용이론주의자나 수리적 의사결정이론주의자들로부터 많은

공격을 받았다는 일화가 있다[5]. 그러나 그 후 수학적 이론에 문제가 없음이 밝혀지면서 AHP를 연구하고 실무에 이용하는 사람들이 점점 증가하게 되었다. 실제로 1988년부터 2002년까지 영어로 작성된 AHP 관련 박사학위 논문만 외국의 경우 139편, 국내 석·박사학위 논문은 225편이 발표되었고, 최근 10년간 국제 학회지에 게재된 논문이 400여 편, 국내학회지에 게재된 논문은 151편에 이르고 있다[5]. 이는 한국어나 영어로 작성된 논문만을 집계한 것이므로 세계 각국의 언어로 작성된 논문이나 프로젝트 등 실무에 적용된 경우까지를 고려하면 AHP 관련 연구는 훨씬 많을 것으로 추정된다. 또한 적용 분야는 경제 및 경영, 정치, 사회, 기술 등 거의 우리 사회의 모든 분야에서 활용되고 있다.

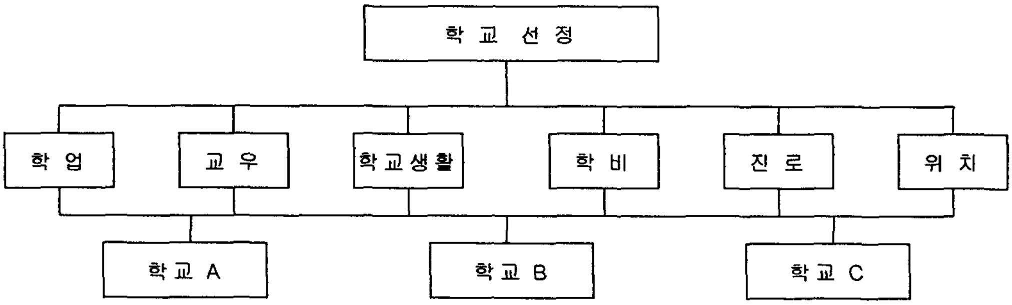
AHP가 수학적 이론만 근거로 개발되어 많은 분야에 적용되는 것은 아니겠으나 이 기법은 Satty[10]가 말했듯이 수학적 배경을 기반으로 하고 있다. 이러한 측면에서 볼 때 AHP는 수학 분야는 아니지만 타 분야에서 개발되어 수학교육의 목적인 실용성, 도야성, 심미성, 문화적 가치 등을 어느 정도 실천하고 있다고 본다. AHP가 많은 사람들에 의하여 연구 및 적용되고 있으나 정작 수학 분야에서는 이 기법의 인지도나 연구가 미흡하다. 이는 [5]의 조사에서도 알 수 있지만, 한국수학사학회지의 경우 창간호에서부터 2004년 3월까지 AHP 관련 논문은 단 한 편[7]뿐이고 다른 수학 관련 학회지의 경우도 마찬가지이다. 이상의 사실을 근거로 본 연구에서는 AHP의 4단계 절차에 대한 수학적 배경과 수학교육의 목적을 연계하여 고찰함으로써 수학 분야에서도 이 기법의 활발한 이론 연구와 적용을 할 수 있는 계기를 마련하고 수학 교육과 학습에 대한 하나의 대안을 제시하고자 한다.

1. AHP의 수학적 배경

AHP의 4단계 절차의 이론을 예제와 함께 살펴보기로 하자.

<단계 1> 첫 번째 단계에서는 의사결정문제에 상호 관련되어 있는 의사결정 요소들 간의 관계를 분석하여 계층구조를 형성하는 것이다. 최상위 계층은 하나의 원소로 구성되며, 이는 의사결정의 포괄적이고 전반적인 목적을 나타낸다. 그 다음 계층들은 바로 상위계층에 영향을 미치는 복수의 요소들로 구성되며, 하위계층으로 내려갈수록 더 세밀한 요소들이 나타난다. 이들 요소들은 낮은 계층에 있는 것일수록 구체적인 것이 되며 계층의 최하층에는 선택의 대상이 되는 여러 대안들로 구성된다. 계층구조의 형성은 요소들 간의 선호정보, 대안에 대한 선호도 평가의 기본 틀이 되기 때문에 AHP기법의 응용에서 가장 중요한 단계라고 할 수 있다. 이러한 계층구조를 형성하기 위해서 주어진 의사결정 문제에서 어떠한 요소들을 고려해야 하며 이 요소들 간에 어떤 관계가 있는지를 명확히 규명해야 한다.

예를 들어 한 수험생이 진학 가능한 대학 A, B, C 중 하나를 선택하기 위하여 학업, 교우, 학교 생활, 학비, 졸업 후 진로, 위치 등 6가지 요소를 고려한다고 하자([3], [4], [11]). 이 문제에 대한 계층구조는 <그림 1>과 같이 나타낼 수 있다. 즉, 의사결정의 최종 목표는 학교의 선정이며, 이것은 6가지 요소들에 대한 중요도에 의해서 영향을 받는다.



<그림 1> 학교 선정을 위한 계층구조

<단계 2> 두 번째 단계에서는 각 계층내의 의사결정 요소들의 쌍대비교를 통하여 계층별로 쌍대비교행렬을 구한다. 이 단계는 특정 계층 내에 있는 요소들의 중요도를 구하기 위하여 의사결정자의 선호도를 정량적으로 평가하여 판단 자료를 수집하는 단계이다. 일반적으로 어느 한 요소 또는 대안에 대한 선호도의 절대적인 평가보다는 두 개씩 짝을 지어 상대평가해서 선호 정보를 얻는 것이 의사결정자의 판단에 대한 부담을 줄일 수 있다. 의사 결정자가 어느 두 요소의 비중을 비교하여 부여하는 비교치를 쌍대비교치라 한다. 쌍대비교는 통상 9점 척도를 사용하며 이것의 의미는 요소 i가 요소 j에 비하여 중요한 정도를 판단하여 부여하는 수치이다. 요소의 수가 n이라면 의사결정자는 $nC_2 = n(n-1)/2$번의 쌍대비교를 하여 쌍대비교치 a_{ij}를 얻게 되며 $n \times n$의 쌍대비교행렬 A를 다음과 같이 나타내자. 즉, 쌍대비교행렬은 대각선상의 원소들이 모두 1이고 역수행렬인 특성을 갖는다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

여기서 모든 i에 대해 $a_{ij} = 1/a_{ji}$이고 $a_{ii=1}$이다.

<그림 1>의 학교 선정 예로부터 <표 1>, <표 2>와 같은 쌍대비교행렬을 구할 수 있다. <표 1>은 학교 선정에 영향을 미치는 계층2의 6개 요소에 대하여 15번의 쌍대비교를 하여 얻은 행렬이며, <표 2>는 계층2의 각 요소에 대하여 계층3의 대안 A, B,

C를 쌍대비교하여 구한 행렬을 나타낸 것이다. 쌍대비교행렬에서 각각의 원소들은 9점 척도를 이용하여 구한다. 즉, <표 1>에서 학업이 학교생활보다 약간 중요하다고 판단하면 9점 척도에 의해 1행 3열에 3을 기입하고 대각원소에 대칭이 되는 3행 1열에는 역수인 1/3을 기입하며 다른 원소들도 이와 같은 방법으로 기입하면 된다.

<표 1> 학교 선정에 대한 6개 요소들의 쌍대비교행렬

	학업	교우	학교생활	학비	진로	위치
학 업	1	4	3	1	3	4
교 우	1/4	1	7	3	1/5	1
학교생활	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
학 비	1	1/3	5	1	1	1/3
진 로	1/3	5	5	1	1	3
위 치	1/4	1	6	3	1/3	1

<표 2> 6개 요소에 대한 A, B, C 학교의 쌍대비교행렬

학업	A	B	C
A	1	1/3	1/2
B	3	1	3
C	2	1/3	1

교우	A	B	C
A	1	1	1
B	1	1	1
C	1	1	1

학교생활	A	B	C
A	1	5	1
B	1/5	1	1/5
C	1	5	1

학비	A	B	C
A	1	9	7
B	1/9	1	1/5
C	1/7	5	1

진로	A	B	C
A	1	1/2	1
B	2	1	2
C	1	1/2	1

위치	A	B	C
A	1	6	4
B	1/6	1	1/3
C	1/4	3	1

쌍대비교 과정에서 의사결정자가 완전한 일관성(consistency)을 갖고 쌍대비교치를 구해야 정확한 의사결정이 가능함은 물론이다. 그러나 쌍대비교치는 의사결정자가 주관적으로 부여하기 때문에 불일치성이 존재할 수밖에 없다. 따라서 완전한 일관성을 유지한다는 것은 불가능하며, 이러한 현실적 상황에서 요소들의 중요도를 구하고 일관성을 검토하는 과정이 필요하며 이는 3단계에서 다루기로 한다.

<단계 3> 세 번째 단계에서는 쌍대비교행렬로부터 각 계층내의 의사결정 요소들의 상대적 중요도인 가중치를 추정한다. 중요도를 계산하는 방법은 산술평균법, 기하평균법, 최소자승법, 고유벡터방법 등이 있으나 쌍대비교행렬의 일관성의 정도를 측정할 수 있는 고유벡터방법을 이용하는 것이 보편적이다. 고유벡터방법은 쌍대비교행렬의 최대 고유치에 대응하는 고유벡터를 의사결정요소의 가중치로 이용하는 방법으로 이 과정을 살펴보기로 하자.

n개 요소의 상대적 중요도를 $w_i(i=1, 2, \cdots, n)$라 하면 식 (1.1)의 쌍대비교행렬

에서 쌍대비교치 a_{ij}는 $w_i/w_j (i, j=1, 2, \cdots, n)$로 추정할 수 있다. 이로부터 a_{ij}와 w_i 간에는 다음 식이 성립한다.

$$a_{ij}= w_i/w_j \;\Rightarrow\; \sum_{j}^{n} a_{ij}\, w_j= n\, w_i \; (i, j=1, 2, \cdots, n) \tag{1.2}$$

식 (1.2)는 고유치와 고유벡터와 관련된 문제와 같다. 즉, 요소 a_{ij}로 구성되는 행렬 A를 다음과 같이 나타내자.

$$A=\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

그러면 식 (1.2)는 식 (1.4)와 같이 표현할 수 있다.

$$A\boldsymbol{w}= n\,\boldsymbol{w}\ ,\ \boldsymbol{w}=[w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n]^T \tag{1.4}$$

이 식으로부터 중요도 벡터 $\boldsymbol{w}$를 구할 수 있으며, 여기서 n은 행렬 A의 고유치이며 $\boldsymbol{w}$는 이에 대응하는 고유벡터임을 알 수 있다. 이러한 중요도 벡터 $\boldsymbol{w}$는 쌍대비교행렬이 완전한 일관성을 만족하고 있다는 전제 하에서 구한 것이다. 즉, a_{ij}가 w_i/w_j의 값을 갖고 있다면 $a_{ij}a_{jk}=(w_i/w_j)(w_j/w_k)=a_{ik}$가 성립되어야 한다. 이것의 의미는 i를 j보다 x배 중요하게 생각하고 j는 k보다 y배 중요하게 생각한다면 i는 k보다 $x\times y$배 중요하다고 평가하는 것이다. 그러나 실제 응답에 있어서는 <단계 2>에서 언급한 바와 같이 쌍대비교치는 의사결정자가 주관적으로 부여하기 때문에 불일치성이 존재한다. 따라서 쌍대비교행렬의 최대 고유치를 갖는 고유벡터를 이용함으로써 요소의 중요도를 근사적으로 구하게 된다.

주관적으로 요소들을 쌍대비교하므로 식 (1.2)에서 a_{ij}는 w_i/w_j와는 편차를 갖게 되어 식 (1.4)는 성립하지 않으나 두 가지 행렬 이론이 이 문제의 해결책을 제시한다. 첫째, $n\times n$행렬 A와 n차원 벡터 $\boldsymbol{w}$에 대하여 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이 $A\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w}$를 만족하는 해이고(즉, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$은 행렬 A의 고유치들임), 모든 i에 대하여 $a_{ii}=1$이면 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=n$이다. 불일치성이 존재하더라도 모든 쌍대비교행렬의 대각원소는 1이므로, 쌍대비교행렬의 고유치들의 합은 항상 n이다. 더욱이 일치성이 만족하는 경우, n이 행렬 A의 고유치이므로 나머지 $(n-1)$개의 고유치들은 모두 0이다. 둘째, 쌍대비교행렬의 원소 a_{ij}가 약간씩 변할 경우에 고유치 역시 약간씩 변한다는 사실이다. 즉, 쌍대비교행렬의 원소들이 일치성을 만족하는 값들로부터 약간씩 벗어나 있는

경우에 고유치 역시 일치성을 만족하는 원래 행렬의 고유치 근처에 있을 것이다. 그러므로 불일치성이 존재하더라도 쌍대 비교행렬 A의 최대고유치는 n에 가까울 것이고, 나머지 $(n-1)$개의 고유치는 0에 가까울 것이다. 따라서 쌍대비교행렬의 최대고유치 $(\lambda_{\max})$을 찾고, $\lambda_{\max}$에 해당되는 고유벡터를 구하여, 이것을 중요도에 대한 근사치로 사용할 수 있다. 즉, 의사결정자가 부여한 쌍대비교행렬을 A, 중요도벡터를 $\boldsymbol{w}$라고 하면 $\boldsymbol{w}$는 다음 식을 통해 유도된다.

$$A\boldsymbol{w}=\lambda_{\max}\boldsymbol{w} \quad \Rightarrow (A-\lambda_{\max}I)\boldsymbol{w}=\mathbf{0} \tag{1.5}$$

실제 의사결정 문제에서 각 요소의 가중치는 식 (1.5)의 특성방정식의 최대고유치에 대응하는 고유벡터 $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$의 원소들의 합이 1이 되도록 조정하여 구한다. 즉, n개 요소의 중요도인 가중치벡터는 $\boldsymbol{w}^*=(\frac{w_i}{\sum w_i}, \cdots, \frac{w_n}{\sum w_i})^T$이다.

가중치 산출 과정에서 응답자들의 일관성을 검증할 수 있다는 것이 또 하나의 AHP가 갖는 장점이며 다음과 같이 $\lambda_{\max}$와 n의 관계로부터 일관성의 기준을 유도하여 사용한다. 실제 측정한 쌍대비교행렬에서 구한 $\lambda_{\max}$가 완전한 일관성을 가진 쌍대비교행렬의 고유치인 n에 가까울수록 평가자가 쌍대비교시 일관성 있는 판단을 내렸다고 간주할 수 있다. 이러한 점에 착안하여 쌍대비교행렬의 일관성 여부를 식 (1.6)과 같이 일관성 지수(consistency index: CI)와 일관성 비율(consistency ratio: CR)을 정의하여 측정한다.

$$CI=(\lambda_{\max}-n)/(n-1), \quad CR=CI/RI \tag{1.6}$$

일관성 비율의 수식에 있는 RI는 무작의 지수(random index)로서 이는 행렬 차수별로 100개의 역수행렬을 임의로 발생시켜 차수별로 이 행렬의 평균 CI를 산출한 값으로 <표 3>과 같다.

<표 3> 무작의 지수

차수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0	0	.58	.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Saaty는 CI가 0.1 이하이면 받아들일 만하다고 제안하고 있으며, CR이 0.1 미만이면 쌍대비교는 합리적인 일관성을 갖는 것으로 판단하고, 0.2 이내일 경우 용납할 수 있는 수준의 일관성을 갖고 있으나, 0.2이상이면 일관성이 부족한 것으로 재조사가 필요하다고 제안하였다[12]. Saaty는 가중치 추정방식으로 일관성을 측정할 수 있는 고

유벡터 방법이 최적임을 지적하고 있으며[11], 이러한 일관성 기준과 관련된 주요 연구로는 [1, 4, 13, 14] 등이 있다.

<표 4>와 <표 5>는 <단계 2>의 <표 1>, <표 2>에 있는 요소들의 중요도를 고유벡터방법으로 구하여 정리한 것이다.

<단계 4> 이 단계에서는 각 계층별로 얻어진 요소들의 중요도를 결합하여 대안들 사이의 중요도를 계산한다. 즉, 1~3단계의 과정을 거쳐 얻어진 요소들 사이의 중요도와 각 요소에 대한 대안들 간의 중요도를 이용하여 대안들의 총 중요도, 즉 만족도를 계산한다. 학교 선정에 대한 예에서 A, B, C학교의 총 중요도를 <표 4>와 <표 5>를 이용하여 구하면 각각 A=037, B=0.38, C=0.25와 같다. 따라서 학교 B가 가장 큰 만족을 준다. 그런데 이 예에서 $CR=0.24$로 일관성 기준을 충족시키지 못하고 있는데 이러한 경우 [4, 13] 또는 EC2000이라는 AHP 전용 소프트웨어 등을 참조하여 모순된 판단을 찾아 수정할 수도 있다.

<표 4> 6개 요소들의 중요도

요소	중요도
학업	0.32
교우	0.14
학교생활	0.03
학비	0.13
진로	0.24
위치	0.14
λ_{max}	7.49

<표 5> 6개 요소에 대한 A, B, C 학교의 중요도

요소	A	B	C	λ_{max}
학업	0.16	0.59	0.25	3.05
교우	0.33	0.33	0.33	3.00
학교생활	0.45	0.09	0.46	3.00
학비	0.77	0.06	0.17	3.21
진로	0.25	0.50	0.25	3.00
위치	0.69	0.00	0.22	3.05

2. AHP와 수학 교육의 목적

AHP가 수학적 이론만으로 의사결정 문제를 해결하는 것은 아니겠으나 앞의 4단계 절차에서 보듯이 선형대수 이론이 근간을 이루고 있음을 알 수 있다. AHP가 많은 사람들에 의하여 많은 분야에서 연구되고 사용되는 이유는 무엇인가? 본 연구에서는 이 물음에 대한 해를 수학 교육의 목적에서 찾아보려고 한다.

오늘날 학생들에게 있어서 수학은 흥미가 없고 공부하기 까다로울 뿐만 아니라 실생활에도 별로 도움이 되지 않는 학문으로 여겨지고 있으며 가능한 한 수강하지 않으려고 한다는 연구 결과가 있다[6]. 그러나 모든 학문이 그렇듯이 수학에도 그 목적이 있으며 수학과 교육과정 해설[2]에서는 수학교육의 목적으로 실용성, 도야성, 심미성, 문화적 가치 등을 들고 있으며 허민([8], [9])은 역사적인 고찰을 통해 이러한 목적을

실현하는 방안을 연구한 바 있다. AHP를 피타고라스의 정리, 뉴턴과 라이프니츠의 미분법 등 수학의 위대한 여러 이론과 비교할 수는 없겠으나 이 기법은 수학교육의 목적을 충실히 실천하고 있는 중이라고 생각한다. 여기서는 이것을 주로 [2], [8], [9]를 인용하여 논의하기로 한다.

수학과 교육과정 해설에서는 수학의 실용성을 다음과 같이 설명하고 있다.

> 수학을 배우면 사회생활을 하는 데나 장차 과학이나 다른 학문을 공부하는데 도움이 되며, 국가 발전에도 도움이 된다는 것이다. (중략) 당장 이용되지는 않지만, 과학 기술의 발달로 수학을 필요로 하는 분야가 많아지고 있기 때문에 수학의 중요성이 점점 증대되고 있다. 따라서 언젠가 수학을 이용하기 위해서는 수학을 배워야 한다는 것이 수학의 실용적 목적이다.(후략)

실용성에 대하여 [8]에서는 수학이 컴퓨터, CT 촬영기의 제작 등 현대 과학 기술과 정보화 사회에서 절대적인 공헌을 하고 있지만 이런 수학은 너무 어렵고 너무 깊은 곳에 잠복해 있기 때문에 이를 구체적으로 보여줄 수 없음을 문제로 지적하고 있다. 이와 같은 측면을 고려할 때 AHP는 기초적인 행렬 이론을 의사결정 문제에 실용적으로 이용하고 있는 셈이다. 서론에서 언급한 바와 같이 많은 사람들 그리고 많은 분야에서 AHP가 연구 및 응용되고 있다는 사실이 이미 이 기법의 실용성을 입증하고 있다. 구체적으로 AHP는 경제 일반, 에너지/자원 · 교통 · 입지 등의 경제문제, 재무/금융/회계 · 인사조직 · 마케팅 · 호텔/관광 등의 경영문제, 정부 · 국방 등의 정치문제, 교육 · 안전/재해/복지 · 도시/환경/건설 · 보건/의료 · 농업 · 체육 등의 사회문제, R&D/신제품개발 · 생산/제조 · 품질 · 컴퓨터/정보 등의 기술문제[5]에 이르기까지 우리 사회의 모든 분야에서 연구, 적용되고 있다. 이와 같이 많은 분야의 많은 사람들이 행렬 이론을 이용하여 의사결정문제를 해결하고 있는 것이다. AHP의 실용성은 수학자는 공상으로 수학을 연구하는 것이 아니며 현실적인 응용을 염두에 두지 않을 수 없다는 말[8]을 실감나게 하며, 너무 어렵지 않은 수학 이론도 인간 사회에 도움이 될 수 있다는 것을 보여주고 있다.

수학과 교육과정 해설에서 제시한 수학의 도야성은 다음과 같다.

> 수학을 배우면 우리의 정신 능력을 향상시킬 수 있다. 수학을 배움으로써 신장될 수 있는 능력은 합리적이고 논리적인 사고력, 추상적 사고력, 창의적 사고력, 비판적 능력, 기호화하고 형식화하는 능력, 단순화하고 종합화하는 능력 등이다. 이러한 능력은 수학과 관련이 없는 분야에 진출하는 사람에게도 요구되는 정신적 능력으로서, 수학을 배워야하는 강력한 이유이기도 하다.(후략)

도야성은 AHP에서 수학 교육의 목적을 가장 잘 실천하고 있는 부분이다. 의사결정

문제에 행렬 이론을 이용하고 있는 것 자체가 다른 사람들이 미처 생각하지 못하고 있는 창의적인 발상이다. AHP에서는 의사결정문제를 구성하고 있는 요소들의 중요도, 최종적인 의사결정 대안을 쌍대비교행렬의 고유벡터로 구한다. 이를 위한 AHP의 4단계 절차는 학교 선정의 예에서 알 수 있듯이 논리적이며 합리적이다. 즉, 복잡한 의사결정 문제를 구성하고 있는 모든 요소들을 세분화하여 계층을 구성함으로써 문제를 단순화시키고 종합화하고 있다. 계층구조만 보더라도 문제가 어떻게 구성되어 있으며 어떻게 해결해야 되는지를 알 수 있다. 쌍대비교행렬을 만들고 고유벡터를 구하는 과정은 문제 해결을 위하여 무엇을 기호화하고 형식화해야 되는지를 보여주고 있는 것이다. "수학에서 뛰어난 업적을 남긴 수학자들이 다른 과학 분야에서도 크게 공헌할 수 있었던 것은, 수학 연구와 함께 다른 분야에 대한 응용도 병행했기 때문이라고 생각한다. 수학적 구조를 강조하는 추상적인 현대 수학만을 학습하면 수학의 도야성이 자동적으로 얻어질 것으로 보이지 않는다. 수학이 응용되는 구체적인 예를 보여주어야 하고 이를 학습해야 한다. 이를 위하여 통합 교과과정의 운영을 신중하게 고려해야 할 것이다."[8]라는 주장에 전적으로 동감한다. Satty는 수학자는 아니지만 수학을 이용하여 AHP라는 의사결정 기법을 만들었으며 최근[13]까지도 쌍대비교행렬의 일관성을 위하여 고유벡터를 연구하고 있다. 수학을 가르치는 사람이나 배우는 사람들도 이와 같이 타 분야를 보고 경험하는 유연한 자세가 필요하다고 생각한다. 이를 통하여 수학의 이론 연구와 함께 응용을 할 수 있는 기회를 얻게 되며 현재 우리나라 대학에서 처한 수학의 위기를 극복할 수 있는 하나의 방안이 될 수 있기 때문이다. 타 분야에서 수학의 이론이 연구되고 응용되는 사례를 적극 발굴하고 그 중 일부를 대학의 수학전공 정규 교과목에 편입하는 문제를 심각하게 논의할 필요가 있다고 본다.

수학과 교육과정 해설에서 제시한 수학의 심미성은 다음과 같다.

> 기하학적 도형이나 황금 분할 등을 보면 수학적 대상도 아름답다고 할 수 있으며, 또 수학의 공식이나 방법이 절묘하고 아름답게 적용되는 경우도 많이 있다. 그러나 수학의 미적 가치에 대한 견해는 주관적인 요소가 강하기 때문에, 수학을 배우는 학생들에게 수학의 심미성을 인식시키기는 매우 어렵다. 그러나 위대한 수학자들은 수학의 아름다움을 인식하였고, 바로 이 아름다움이 그들의 수학 연구에 커다란 원동력이 되었음을 부인할 수 없다.

위의 글에서 지적하듯이 수학에서 심미성을 인식하기는 어려우나 수학사를 통한 수학의 미적 요소를 찾고, 수학 교육에서 수학의 심미성을 이해시키고 활용하려는 연구([8], [9])를 살펴보면 수학에서 심미적 매력을 충분히 느낄 수 있다. 또한 [9]에서는 여러 수학자들의 말과 예를 근거로 하여 "수학적 심미성을 도형이나 수학적 형식성의 겉모습만으로 설명할 수는 없다. 그 속에 숨어있는 수학적 관계와 의미를 알 때 비로소 참된 아름다움을 느낄 수 있다."고 하면서 "수학적 심미성은 수학자의 미적 감각을 만족시키는데 그치지 않고 실용적인 면을 보이기도 한다."고 주장하고 있다. 이러한

점을 고려할 때, Saaty가 수학의 아름다움을 인식하였다고 단정할 수는 없으나 적어도 그는 행렬 이론에 내재되어 있는 지적인 멋과 실용성을 충분히 인식하였고 이것이 AHP 개발에 결정적인 역할을 하였다고 본다. 이는 Saaty가 최근에도 AHP를 위한 행렬 이론을 연구[13]하고 있다는 점에서도 확인할 수 있는 사실이다. 행렬 이론을 통하여 AHP는 복잡한 의사결정문제를 단순, 명확, 간결, 논리 정연화시키고 범용화 하였다는 면에서 행렬 이론의 지적인 멋과 힘을 느낄 수 있다.

수학과 교육과정 해설에서 제시한 수학의 문화적 가치는 다음과 같다.

> 인류가 오래 전부터 오늘날까지 구축해온 수학이라는 문화는 수용, 전달할 가치가 있다는 것이다. 그러나 그 많은 문화를 전달하는 것이 가능하고 전달할 가치가 있는 것인가, 취사 선택하여야 한다면 어느 것을 선택하여 가르쳐야 하는가 하는 의문이 남는다.

수학은 오랜 세월 동안 수많은 사람들의 피나는 노력에 의해 발전된 학문으로 다른 자연 과학과 달리 누적되는 과학이며 이렇게 누적된 수학은 현대 문명사회에 막대한 영향을 끼치고 있는 거대한 분야로 발전되었다. AHP가 수학의 여러 위대한 이론처럼 수백, 수천 년 동안 유효할 정도로 쓸모 있는 기법이라고 주장하려는 것은 아니다. 물론 AHP는 창시자인 Satty를 비롯하여 많은 연구자들에 의해 많은 기간에 걸쳐 더 보완되고 발전되어 완벽하게 완성될 것이다. 그러나 AHP 기법도 수학의 행렬 이론을 근간으로 개발되어 현재 많은 분야의 많은 사람들에 의해 유익하게 활용되고 있다는 면에서 굳이 수학사를 통하지 않더라도 수학이라는 문화를 수용, 전달할 가치가 있음을 강조하고 싶은 것이다. 문제는 이렇게 수용, 전달할 문화적 가치가 있는 수학이 우리나라 대학에서 처한 위기이다. 아무리 수학자를 비롯한 유력한 사회 지도자급 인사 그리고 외국의 석학들까지 수학을 비롯한 기초과학의 중요성과 육성을 강연, 언론 보도 등을 통하여 우리 사회에 역설해도 현실은 나아질 기미가 보이지 않는다. 대학의 경영학, 회계학 전공자에게 은행, 보험 등 금융권에서 유익하게 쓰이는 금융공학, 구조방정식모형 등의 수학적 배경을 설명해도 자신의 전공 분야에 수학이 깊게 관련되어 있고 적용되고 있다는 사실을 모르거나 인정하지 않으려는 경향이 짙다. 심지어 통계학을 전공하는 학생들도 그들이 수리통계학, 회귀분석 등을 학습하면서도 수학을 기피하려는 경향이 많다. 이러한 현상들은 중하위권 대학으로 가면 갈수록 더 크게 나타나고 있음을 각 대학의 요람을 통해 알 수 있다. 수학을 수용하고 전달할 가치가 있음을 과거의 수학사를 통하여 연구하는 것도 필요하지만, 현재 기업이나 생산 현장 등에서 수학이 유용하게 활용되고 있는 사례를 발굴하고 그 중 일부를 수학의 정규 교과목으로 채택하여 학습하는 것도 여러 분야에 수학의 문화적 가치를 구현할 수 있는 방안이라고 생각한다. 이를 위하여 수학을 전공하는 사람들 특히 수학 교육자들은 타 학문 분야와 긴밀한 교류, 산학 협동 등을 통해 수학전공의 교과과정을 연구하고 개발할 필요가 있다고 본다.

3. 결론

본 연구에서는 AHP의 수학적 배경을 살펴보고 AHP가 수학교육의 목적을 실천하고 있음을 논의하였다. 오늘날 우리나라 대학에서 수학은 이공계 기피 현상, 학부제 운영, 대학교육의 실용 및 실무화의 강조 등으로 인해 점점 입지가 줄어들고 있다. 그러나 수학이 이공계는 물론 인문·사회계열 등 모든 분야에도 필요한 학문이며 우리 사회에 실용적, 실무적으로 사용되고 있는 과학이라는 사실을 AHP는 잘 보여주고 있다.

수학이 과거는 물론 현재, 미래 사회에도 유익한 도움을 주고, 수학 수업을 추상적이 아닌 구체적으로 진행하여 흥미를 북돋우고, 수학이 실천하는 학문이라는 것을 이해시키기 위하여 수학 전공자 특히 수학교육자들은 사회 현장에서 수학이 연구 및 활용되는 사례를 발굴하고 학습하는 유연한 자세가 필요하다고 본다. 또한 산학협동, 타학문 분야와 끊임없는 긴밀한 교류 등을 통하여 수학이 고차원의 수학을 공부한 전문 수학자만이 활용할 수 있는 것이 아니라 여러 분야의 사람들이 쉽게 그리고 함께 공유할 수 있는 과학임을 보이고, 실천하는 수학 교과목을 개발하는 것 역시 필요하다고 생각한다. 그러한 의미에서 AHP는 하나의 좋은 예가 될 수 있다.

참고 문헌

1. 고길곤 · 이경전, “AHP에서의 응답일관성 모수의 통계적 특성과 활용방안,” 한국경영과학회지 제26권 제4호(2001), 71-82.
2. 교육부, 중학교 수학과 교육과정 해설, 1994, 59-61; 고등학교 수학과 교육과정 해설, 1995, 70-72.
3. 김성희, 정병호, 김재경, 의사결정분석 및 응용, 영지문화사, 2002.
4. 윤재곤, “AHP 기법의 적용효과 및 한계점에 관한 연구: MIS 성공요인 평가를 위한 3가지 통계기법 비교 중심,” 한국경영과학회지 제21권 제3호(1996), 109-125.
5. 조근태 · 조용곤 · 강현수, 앞서가는 리더들의 계층분석적 의사결정, 동현출판사, 2003.
6. 함형범 · 박태룡 · 김재현, “대학수학 교육에 대한 실증적 고찰: 통계분석을 중심으로,” 한국수학사학회지 제16권 제2호(2003), 87-102.
7. 함형범 · 안창호, “구조방정식모형 구축에 관한 실증적 고찰,” 한국수학사학회지 제17권 제1호(2004), 109-118.

8. 허민, "수학 교육의 목적과 수학사," 한국수학사학회지 제11권 제1호(1998), 58-67.
9. 허민, "수학의 심미성에 대하여," 한국수학사학회지 제15권 제2호(2002), 83-92.
10. Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
11. Saaty, T. L., "Priority setting in complex problems," *IEEE Transactions on Engineering Management* 30(1983), 140-155.
12. Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*, RWS Publications, 1996.
13. Saaty, T. L., "Decision-making with the AHP: Why is the principal eigen-vector necessary," *European Journal of Operational Research* 145(2003), 85-91.
14. Vargas, L. G., "Reciprocal matrices with random coefficients," *Mathematical Modelling* 3(1982), 69-81.

Mathematical Foundations of AHP and Practice for Purposes of Mathematical Teaching

Division of Mathematics and Information Statistics, Seokyeong University
Hyung-Bum Ham

AHP is utilized in various fields since its mathematical theory is simple and it can be applied practically and easily. In this paper we study the mathematical foundations of the AHP. And we discuss that the AHP practices purpose of mathematical teaching. Also, we propose an alternative plan for teaching-learning of mathematics based on the discussion.

Key words: AHP, pairwise comparison matrix, eigenvector, utility · educability · beauty · cultural value of mathematics