

Path-Integral Solution을 이용한 랜덤동요된 조화가진력을 받는 임팩트시스템의 거동분석

Dynamic Behaviors of an Impact System under Randomly Perturbed Harmonic Excitation by the Path-Integral Solution Procedure

마 호 성†

Mha, Ho-Seong

(논문접수일 : 2003년 11월 21일 ; 심사종료일 : 2004년 3월 2일)

요 지

랜덤동요된 조화가진력을 받는 임팩트시스템의 비선형거동을 개발된 반해석적절차에 의해 확률영역에서 분석하였다. 반해석적절차는 path-integral solution을 이용하여 임팩트시스템의 추계론적 미분방정식으로부터 구함으로 얻어진다. 결합확률밀도함수의 전개를 구하고 시스템의 비선형거동 특성인 혼돈거동에 대하여 분석하고 노이즈의 영향을 시간영역과 확률영역에서 알아 보았다. 결과로부터 반해석적절차는 결합확률밀도함수를 통하여 임팩트시스템의 거동에 대한 정보를 제공하는 것을 알 수 있었다. 노이즈의 영향은 혼돈거동의 특성을 약화시키며 궁극적으로 사라지게 함을 알 수 있었으며 또한 혼돈거동의 특성이 상대적으로 높은 노이즈아래에서도 남아있는 것을 밝혔다. 결합확률밀도함수는 응답양상불이 약정상과정임을 확인시켜 주었다.

핵심용어 : 임팩트시스템, Fokker-Planck 방정식, path-integral solution, 혼돈, 노이즈

Abstract

Nonlinear system responses of an impact system under randomly perturbed harmonic excitations are predicted in the probability domain by adopting the semi-analytical procedure previously developed. The semi-analytical procedure is obtained by solving the Fokker-Planck equation corresponding to the stochastic differential equation of the given impact system by utilizing the path-integral solution. The evolutionary joint probability density functions are generated by using the method, and the characteristics of nonlinear dynamic response behaviors of the system are examined. Noise effects on the responses are also examined. It is found that the semi-analytical method can provide the accurate information of the responses via the joint probability functions for the impact system. It is found that the noises weaken and eventually terminate the chaos in the responses, but it is also found that the chaotic signatures reside in the presence of the external noise with relatively high intensity. The joint probability density function shows that the ensemble of the system responses are weakly stationary.

keywords : impact system, Fokker-Planck equation, path-integral solution, chaotic, noise

1. 서 론

동적하중으로 인한 큰 거동을 보이는 기계적 또는 구조적 시스템은 재료적 또는 기하학적 요소로 인하여 비선형거동을 보이게 되며 다양한 거동특성을 나타낸다. 이러한 시스템 중에서 임팩트시스템은 많은 실질적 문제에 적용될 수

있는 이점으로 인하여 여러 분야에서 관심거리가 되어 왔다.^{2), 6)} 결정론적 가진력을 받는 비선형시스템은 주기거동 외에 혼돈거동을 보이는 것으로 잘 알려져 있으며, 혼돈거동의 랜덤성은 큰 관심을 끌고 있다. 또한 임팩트시스템은 고도의 비선형성을 포함하므로 더욱 풍부한 비선형거동을 나타내며 이로 인하여 풍부한 혼돈거동을 보유하고 있음이

† 정회원, 호서대학교 기계건축토목공학부 토목전공교수

† 책임저자, 정회원 · 호서대학교 기계건축토목공학부 토목전공 교수
전화: 041-540-5792 ; Fax: 041-540-5798

E-mail: mhah@office.hoseo.ac.kr

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 6월 30일까지 본 학회에 보내주 시면 2004년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

밝혀졌다.¹¹⁾ 많은 경우 시스템에 가해지는 운동하중은 조화하중으로 가정되고 있으나, 실제적으로 하중에는 불확실성이 포함되어있다. 이러한 불확실성으로 인하여 하중은 결정론적이 아닌 추계론적으로 표현되어야 하며, 랜덤노이즈를 포함한 조화하중을 가함으로써 보다 실질적인 운동시스템의 거동을 분석할 수 있다. 일반적으로 비선형시스템의 랜덤한 거동의 정확한 위치를 예측하는 것은 불가능하나, 임팩트시스템은 극한의 구분적선형시스템으로 볼 수 있으며 path-integral solution을 이용하여 추계론적 미분방정식으로 부터 구한 Fokker-Planck 방정식을 풀으로써, 구분적선형시스템이 갖는 응답거동의 확률적 특성은 평가할 수 있음이 밝혀졌다.¹²⁾

본 연구에서는 path-integral solution 절차를 이용한 임팩트시스템의 거동예측기법을 개발하고 이를 이용하여 임팩트시스템의 혼돈응답거동에 대한 특성을 확률밀도함수의 전개를 통하여 보이고자 한다.

2. 임팩트시스템과 운동방정식

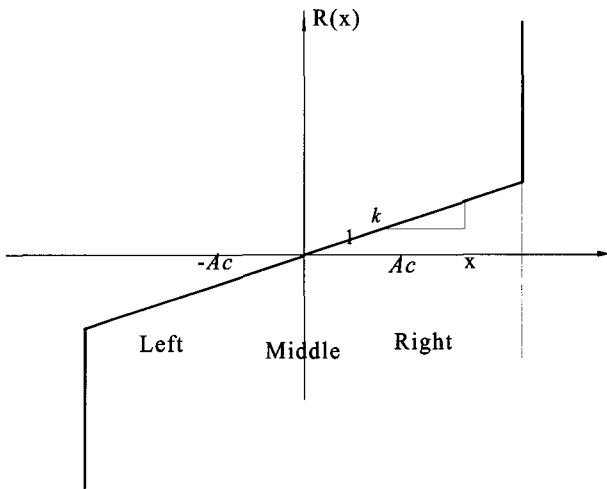


그림 1 Restoring force of impact system

임팩트시스템의 운동방정식은 그림 1로 표현되는 복원력 $R(X)$ 와 함께 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + R(x) = F(t) \quad (1)$$

여기서, m 은 질량, c 는 감쇠상수, 그리고 $F(t)$ 는 가진력이다. 임팩트시스템은 일종의 구분적선형시스템으로써 운동방정식은 시스템의 운동위치에 따라 표현할 수 있다.¹⁰⁾ 시스템의 한계변위 내 ($-Ac \leq x \leq Ac$)에서는 선형이므로, 임팩트시스템의 운동방정식은 다음과 같은 선형이차미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = F^*_0 \cos(\Omega^* t^* + \Phi) + \gamma H(t) \quad (2a)$$

충돌이 일어나는 경계에서의 시스템의 거동은 다음 관계식의 지배를 받게 된다.

$$(x_0)_{after} = (x_0)_{before} \quad (2b)$$

$$(v_0)_{after} = -e (v_0)_{before} \quad (2c)$$

식(2a)에서 k 는 경계내부의 강성도이고, 우변은 랜덤동요된 조화가진력으로 F^*_0 는 가진력의 진폭, Ω^* 와 Φ 는 조화가진력의 진동수와 위상차이다. γ 는 노이즈의 유무를 정하는 계수이고, $H(t)$ 는 가우스 백색노이즈이다. 식(2c)에서 e 는 복귀계수로 충돌시의 에너지손실 정도를 나타낸다. 본 연구에서는 $e=0.95$ 인 경우에 대하여 주로 분석하였다. 시스템의 고유진동수 $w_0 = \sqrt{k/m}$ 을 구하여, 식(2a)에 무차원 변수 $x = X/A_c$, $t = w_0 t^*$ 을 소개한 후 정리하면, 다음과 같은 정규화 된 무차원 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + x = F_0 \cos(\Omega t + \Phi) + \gamma \eta(t) \quad (3)$$

여기서 $\xi =$ 감쇠비, $F_0 = F^*_0 / mA_c w_0^2$, $\Omega = \Omega^* / w_0$ 이고, $\eta(t)$ 는 평균이 0 이고, 델타상관된(delta-correlated) 백색노이즈로 다음과 같이 정의된다.

$$\langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = q \delta(t-t') \quad (4)$$

여기서, q 는 노이즈 강도변수이다.

3. 반해석적 방법(semi-analytical procedure)

식(3)으로부터 임팩트시스템의 추계론적 미분방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi x_2 - x_1 + F_0 \cos(\Omega t + \Phi) + \eta(t) \end{aligned} \quad (5)$$

시간에 대한 시스템응답의 결합확률밀도함수(joint probability density function: PDF)의 전개는 식(5)에 상응하는 Fokker-Planck 방정식을 path-integral solution을 이용하여 전개함으로써 얻을 수 있다.

확률밀도함수 $f(x, t)$ 를 지배하는 Fokker-Planck 방정

식은 다음과 같은 일반적인 형태로 쓸 수 있다.⁴⁾

$$\frac{\partial f(X, t)}{\partial t} = L_{FP}(X, t)f(X, t) \quad (6)$$

식(6)에서, $L_{FP}(X, t)$ 는 Fokker-Planck 연산자(operator)로 다음과 같이 정의된다.

$$L_{FP}(X, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} K_i(X, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Q_{ij}(X, t) \quad (7)$$

식(7)에서 $K_i(X, t)$ 와 $Q_{ij}(X, t)$ 는 각각 drift 변수와 diffusion 매트릭스이다.⁵⁾ 과도확률밀도함수 (transition PDF)인 $P(x, t | x', t')$ 은 특수한 초기조건인 $f(x, t) = \delta(x - x')$ 를 갖는 확률분포로서 식(7)을 만족한다. 따라서 과도확률밀도함수에 대한 Fokker-Planck방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial P(X, t | X', t')}{\partial t} = L_{FP}(X, t)P(X, t | X', t') \quad (8)$$

식(8)으로 표현되는 Fokker-Planck방정식의 정식해(formal solution)는 다음과 같이 범함수적분(functional integration)으로 나타낼 수 있다.

$$f(x, t) = \int_{x_0}^x D\mu(x) \exp\left[-\int_{t_0}^t L\left(\frac{\cdot}{x}(t), x(t)\right) dt\right] f(x_0, t_0) \quad (9)$$

식(9)에서 $D\mu(x)$ 는 적분약수(integration measure), L 은 Onsager-Machlup 범함수이다. Path-integral해법의 이산형은 다음과 같이 표현된다.⁸⁾

$$f(x, t) = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \\ n\tau \rightarrow t - t_0}} \prod_{i=0}^{n-1} \int \dots \int (\mu_i dx_i) \exp\left[-\tau \sum_{j=0}^{i-1} L(x_{j+1}, x_j, \tau)\right] f(x_0, t_0) \quad (10)$$

미소시간증분인 τ 에 대하여, 확률밀도함수의 시간전개(time evolution)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(X', t + \tau) = \int P_\tau(X', t + \tau | X_0, t_0) f(X_0, t_0) d^N x \quad (11)$$

여기서, $P_\tau(X | X_0)$ 은 작은 시간간격 τ 에 대한 조건확률로서 short time propagator라고 불린다. 식(11)에서

부피요소(volume element)은 한 번의 적분기호만을 보였으나, 실질적으로는 N개의 변수에 대하여 N번의 적분을 실행하는 것을 뜻하며, 식(11)은 Chapman-Kolmogorov equation이다. $n \rightarrow \infty$ 으로 정함으로써, 시간이 $\tau = t_0 + n\tau$ 일 때의 확률밀도함수를 얻을 수 있다.

$$f(X_n, t) = \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ \int dx_i P_\tau(X_{i+1}, X_i) \right\} f(X_0, t_0) \quad (12)$$

식(12)에서 $P_\tau(X_{i+1}, X_i)$ 는 short time propagator이며 적합한 short time propagator를 얻기 위하여는 식(12)을 Fokker-Planck방정식의 path-integral해인 식(10)과 일치시켜야 한다.⁹⁾ short time propagator는 초기치인 $P_0(X | X_0)$ 와 Fokker-Planck연산자 L_{FP} 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P_\tau(X', t + \tau | X, t) = \delta(X' - X) - \frac{\partial}{\partial x_i} K_i(X) \delta(X' - X)\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} Q_{ij}(X) \delta(X' - X)\tau \quad (13)$$

역푸리에전환(inverse Fourier transformation) 등의 여러 단계를 거쳐서 식(13)은 결과적으로 아래와 같이 유도된다.

$$P_\tau(X' | X) = (2\pi\tau)^{-\frac{N}{2}} \|Q\|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\tau \frac{Q_{ij}^{-1}}{2} \left(-aQ_{ik}^{(b)}(R) + K_i(R) - \frac{x_i - x_k}{\tau}\right) \left(-aQ_{jl}^{(d)}(R) + K_j(R) - \frac{x_j - x_l}{\tau}\right) - a\tau K_i^{(c)}(R) + \frac{a^2}{2} \tau Q_{ij}^{(e)}(R)\right\} \quad (14)$$

식(14)에서,

$$R = aX' + bX \quad (15)$$

여기서, $a + b = 1(0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1)$.

본 연구에서는 path-integral해를 얻기 위하여, 반복적인 수치해석방법을 도입하였다. 또한 수치에러에 전파는 분포함수와 전파함수(propagation function)의 정규화성(normalizability)을 이용하여 극소화시킬 수 있다.⁸⁾

식(5)에서 $\eta(t)$ 는 δ -correlated Langevin하중이므로, 식(5)로 표현되는 임팩트시스템의 확률과정은 Markov

process가 되며⁵⁾, 따라서 응답거동의 확률밀도함수 $f(X, t)$ 을 지배하는 Fokker-Planck 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(X, t) = -\frac{\partial}{\partial x_1} (x_2 f(X, t)) - \frac{\partial}{\partial x_1} [(-2\xi x_2 - R(x_1) + F_0 \cos(\Omega t + \Phi)) f(X, t)] + \frac{q}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(X, t) \quad (16)$$

여기서 q 는 노이즈강도(noise intensity)이며, $R(x_1)$ 은 임팩트시스템이 갖는 복원력을 뜻한다.

식(6)에 대응하는 short time propagator $P_\tau(X'|X)$ 은 Fokker-Planck 식의 정식해인 path-integral solution^{1),8),9)}을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P_\tau(x'_1, x'_2; t + \tau | x_1, x_2; t) = (2\pi\tau)^{-1} q^{-1/2} \exp\left\{-\frac{\tau}{2} q^{-1} [-2\xi x_2 - R(x_1) + F_0 \cos(\Omega t + \Phi) - \frac{x_2' - x_2}{\tau}]^2\right\} \delta(x_2 - \frac{x_1' - x_1}{\tau}) \quad (17)$$

여기서, $\{x'_1, x'_2\}$ 와 $\{x_1, x_2\}$ 은 각각 시스템거동의 short time propagator의 전상태(pre-state)와 후상태(post-state)를 나타낸다.

4. 결과분석

본 연구에서는 선행된 연구결과에서 얻은 혼돈거동에 대하여 분석하였다.¹¹⁾ 그 중 대표적인 혼돈거동에 대하여 노이즈의 영향 및 응답특성을 분석하였다. 우선 시간영역에서의 거동분석을 직접수치해석 결과를 이용하여 실행하였으며, 노이즈가 응답거동에 미치는 영향은 포인케어맵 상에서의 혼돈거동이 갖는 끌개의 안정성을 고찰하여 분석하였다.

식(2a)으로 표현된 랜덤동요가 있는 조화가진력을 받는 시스템의 응답거동에 미치는 노이즈의 영향을 분석하기 위하여 $\eta(t)$ 의 분산인 D^2 의 값을 조절하여 노이즈의 크기를 결정하였다. 결과분석시 편의상 D 값을 표기하였다.⁷⁾ 혼돈거동을 갖는 노이즈를 받지 않는 경우의 결정론적 시스템에 노이즈를 가해준 경우, 두 시스템이 보이는 응답거동을 비교해 보았다 (그림 2). 상대적으로 적은 노이즈 ($D=0.075$)를 가해준 결과, 두 시스템의 거동은 포인케어맵

상에서 거의 일치함을 볼 수 있다. 결정론적 시스템의 혼돈거동은 그 끌개(attractor)를 부분적으로 확대해 들어가도 선명한 fractal구조가 계속적으로 이어지는 것으로 알려져 있다.³⁾ 노이즈가 가해진 시스템의 혼돈거동에서 이러한 미세부분의 선명한 구조에 어떠한 변화가 있는 지를 확인하기 위하여 두 시스템의 거동영역의 일 부분(그림 2의 박스부분)을 확대하여 보았다.(그림 3) 결정론적 시스템의 혼돈거동은 선명한 구조를 미세지역에서 보여주는 반면, 노이즈를 가해준 시스템의 혼돈거동은 전체적인 패턴을 유지하는 것과는 달리 그 구조가 많이 파괴된 것을 알 수 있다.

노이즈강도 D 를 증가하면서 시스템이 갖는 응답거동의 포인케어맵을 비교하여 노이즈가 응답거동의 전체적 구조에 미치는 영향을 분석하여 보았다.(그림 4) 노이즈강도가 매우 적은 경우 ($D=0.075$)의 끌개구조를 기준으로 노이즈의 영향을 비교하였다.(그림 4a) 노이즈강도가 증가하면서 ($D=0.225$), 시스템이 유지하던 뚜렷한 전체적 fractal구조는 점차 약화됨을 보이지만, 아직 전반적인 시스템거동의 특성을 유지함을 알 수 있다.(그림 4b) 노이즈강도가 더욱 증가되면서 ($D=0.45\sim 0.75$), 혼돈거동의 fractal구조는 더욱 희미해짐을 볼 수 있다.(그림 4c,d,e) 궁극적으로 노이즈강도가 한계값(이 경우에는 $D=1.5$)을 넘으면서 결정론적 시스템에서 보이던 혼돈거동의 특성은 완전히 사라지고, 일반적인 랜덤거동을 보이고 있다.(그림 4f)

위의 결과로부터, 조화가진력을 받는 임팩트시스템에 노이즈를 가한 경우에도, 적은 강도의 노이즈에 대해서는, 비록 미세부분의 패턴은 상실할 지라도 시스템의 전체적인 응답패턴은 결정론적 혼돈거동과 동일한 fractal구조가 그대로 유지됨을 밝혔다. 그러므로, 혼돈거동은 가해진 노이즈에 대하여 매우 강한 안정성을 소유하고 있다고 볼 수 있다. 그러나 노이즈강도가 더욱 증가함에 따라 혼돈거동의 특성은 서서히 붕괴되며, 주하중인 조화가진력에 비해 강한 노이즈에 대하여 시스템이 갖는 혼돈거동은 완전히 상쇄되고, 결국 랜덤한 운동만을 보임을 알았다.

다음은 본 연구에서 개발한 반해석적 분석기법의 결과를 이용하여 임팩트시스템의 거동에 대하여 분석하였다. 앞에서 보였듯이, path-integral solution은 주어진 시스템의 응답으로 이루어진 확률과정의 결합확률밀도함수 $f(x_1, x_2; t)$ 의 시간에 대한 전개과정(evolution)을 제공한다. 이 절에서는 시스템의 응답거동이 갖는 특성을 결합확률밀도함수를 통하여 확률영역에서 분석한다. 식(16)의 Fokker Planck 방정식의 초기치는 결정론적으로 델타함수로서 나타낸다.

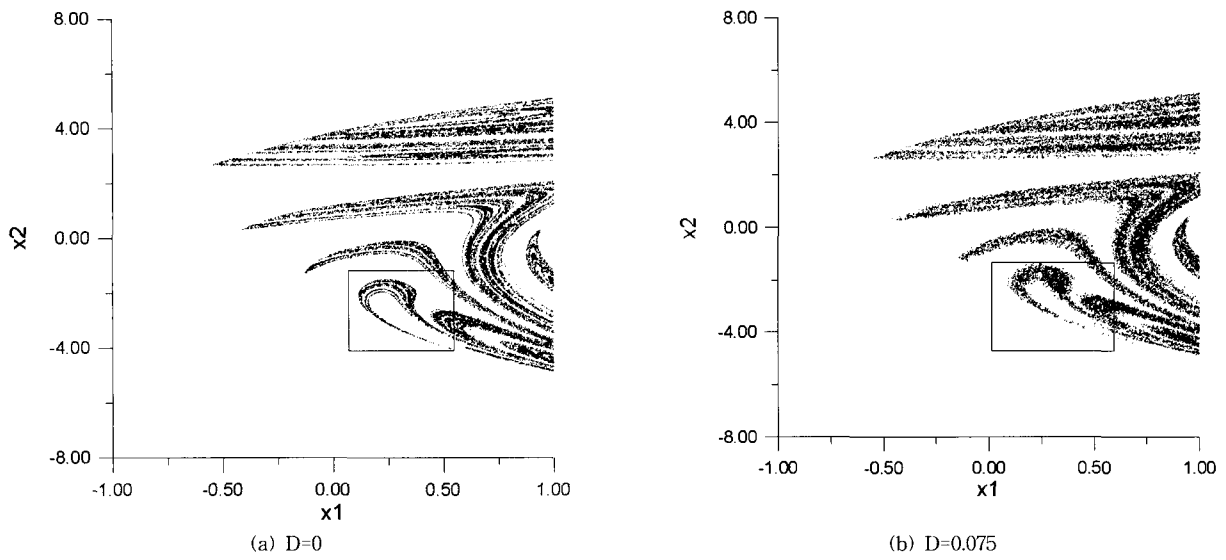


그림 2 Comparison of deterministic and stochastic chaotic motions ($\xi=0.03, F_0=7.5, \Omega=1.99, e=0.95$)

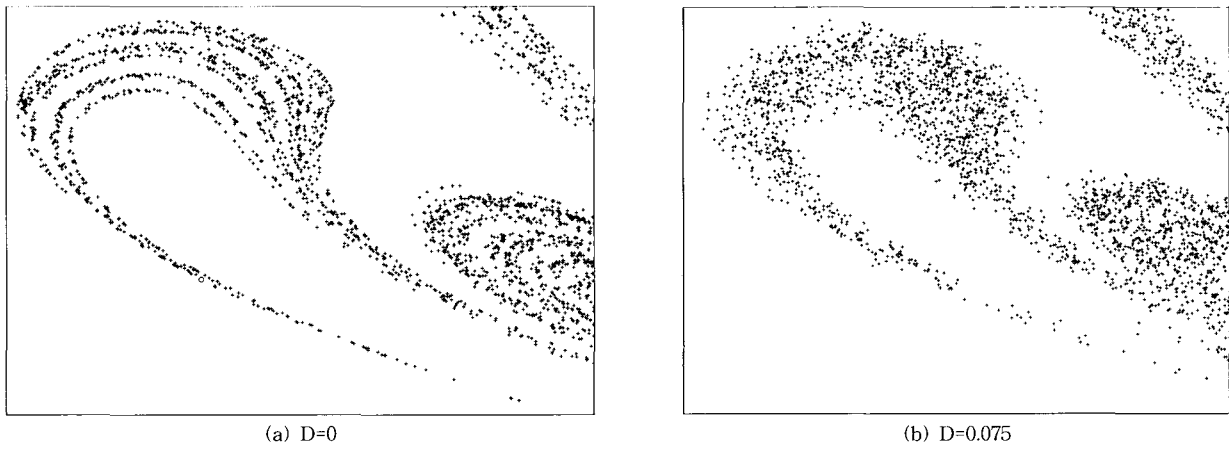
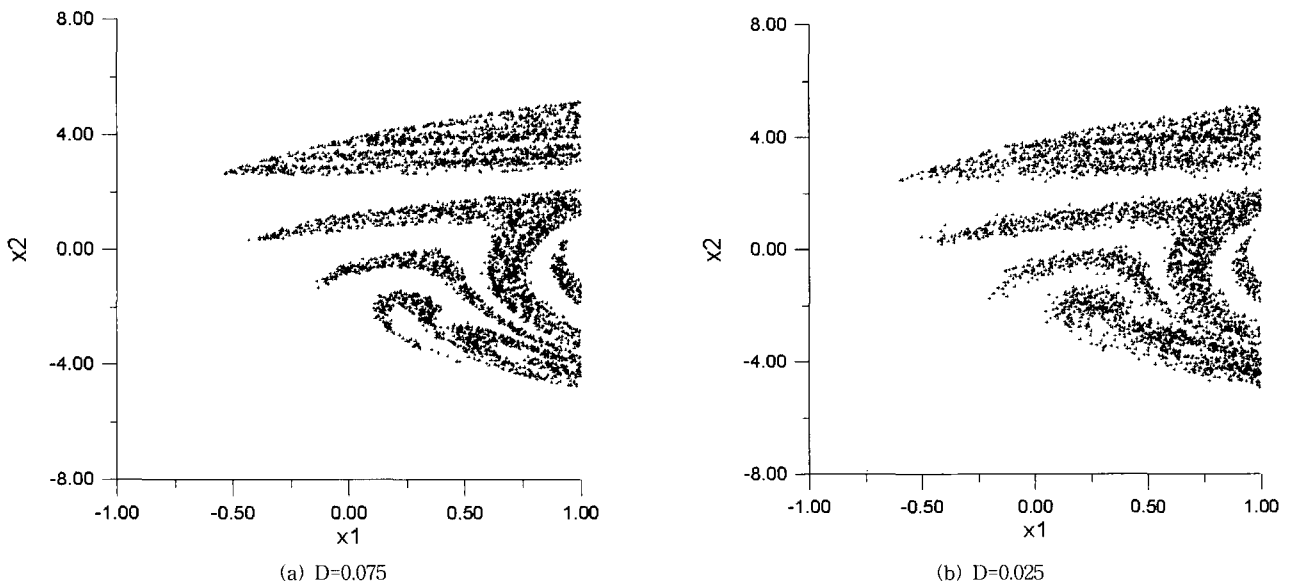


그림 3 Comparison of deterministic and stochastic chaotic motions in detailed attractor structures ($\xi=0.03, F_0=7.5, \Omega=1.99, e=0.95$)



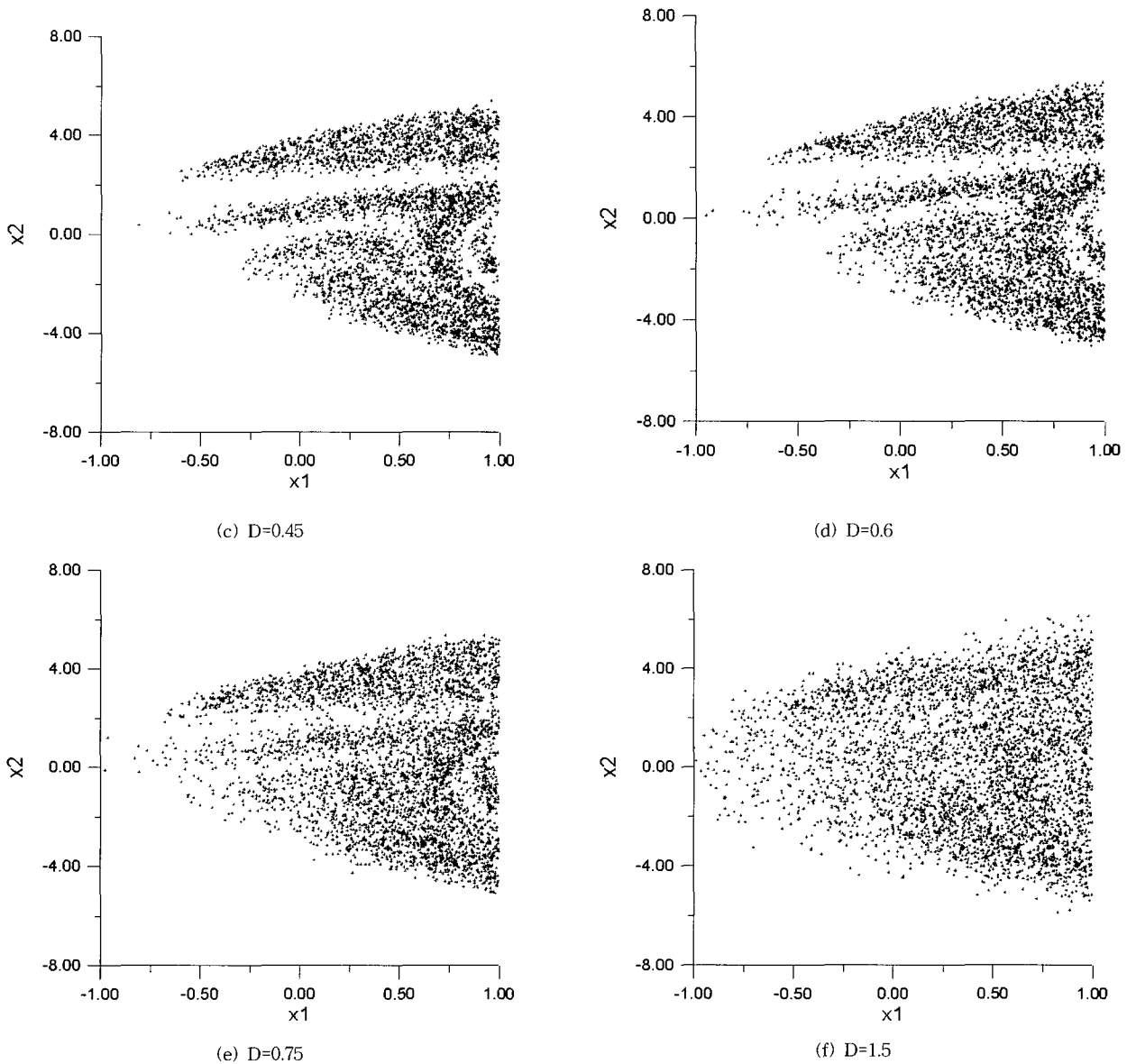


그림 4 Effect of noise intensity on a chaotic response in Poincare maps ($\xi=0.03, F_0=7.5, \Omega=1.99, e=0.95$)

$$f_o(X: t) |_{t=0} = \delta(X - X_0) \tag{18}$$

여기서 $X_0=(0,0)$ 이며 이는 위상면에서 그 면적이 실질적으로 0인 하나의 점을 뜻한다. 본 연구에서는 결합확률 밀도함수를 구하기 위한 초기치로써 식(18)으로 정의되는 초기치를 이용하였다. 앞으로는 확률밀도함수는 결합확률 밀도함수를 칭한다.

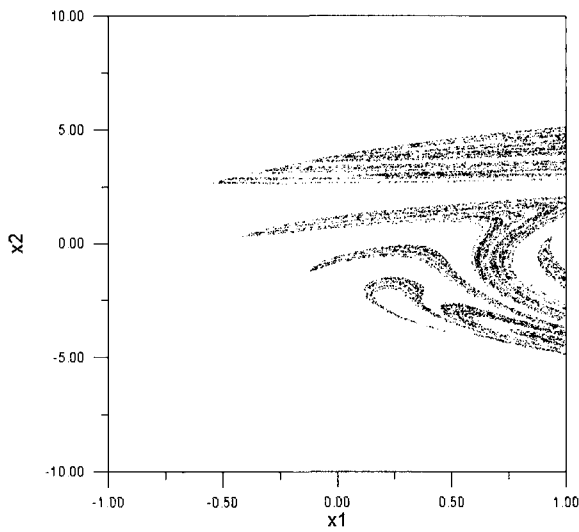
우선 path-integral solution 절차를 통하여 시스템의 응답거동으로 이루어진 앙상블(ensemble)의 확률밀도함수의 시간에 대한 전개과정을 보이고, 확률영역 상에서 노이즈의 영향을 분석해 보았다. 또한 직접수치해석결과와 반해석적 방법의 결과를 비교하여 path-integral solution의

결과를 검증하였다. 직접수치해석결과로부터 얻은 시간영역에서의 해석결과와 Path-integral solution을 이용하여 얻은 PDF를 같은 Poincare section에 나타내었다.(그림 5) 그림에서 보듯이, 본 연구에서 개발한 반해석적 방법은 직접수치해석과 일치하는 결과를 제공할 수 있다. 여기에서 반해석적 방법의 결과는 노이즈가 있는 경우이며 그림 2a가 하나의 샘플을 보이는 반면, 그림 2b는 임팩트시스템의 응답거동으로 이루어진 전체 앙상블의 확률분포이다.

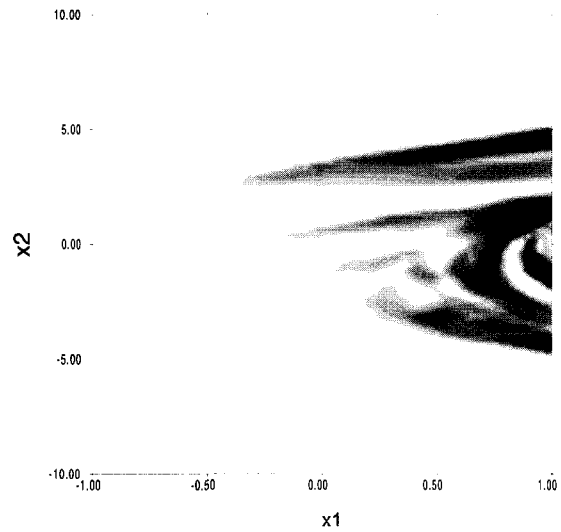
다음은 시스템응답으로 이루어진 확률과정의 전개를 PDF를 통하여 알아보았다.(그림 6) 첫 번째 사이클에서 응답거동의 앙상블은 초기치 $X = (0,0)$ 으로 부터 이미 멀어져 있으며 혼돈거동이 이루는 끌개 쪽으로 크게 양분되어 이동하

고 있음을 볼 수 있다.(그림 6a) 두 번째 사이클에서의 앙상블은 혼돈거동이 위상면상에서 갖는 fractal구조의 외곽선을 따라 분포하고 있다.(그림 6b) 세 번째 사이클에 이르러서, 앙상블의 분포는 혼돈거동의 영역을 거의 덮어가고 있으며, 네 번째 사이클에 이르러서는 완전한 형태의 분포를 이루고 있다.(그림 6c, d) 앙상블의 분포는 이제 그 형태만을 볼 때 완전한 혼돈거동의 구조를 이루고 있으나, 확률값이 변화하고 있으며, 이는 아직 응답거동의 앙상블이

안정되게 분포하지 않았음을 보이고 있다. 그러나 열 번째 사이클에 이르러, 앙상블은 그 형태는 물론, 확률분포값 또한, 안정성을 유지하고 있으며, 시간이 지속됨에 따라서 같은 분포형태와 확률값을 계속해서 유지함을 알 수 있다.(그림 6e,h) 결과로부터, 안정상태의 확률밀도함수는 대응하는 결정론적 시스템의 혼돈거동이 갖는 fractal 구조를 부각시키는 물론 위상면에서의 앙상블에 대한 확률분포를 제공하는 것을 알 수 있다.

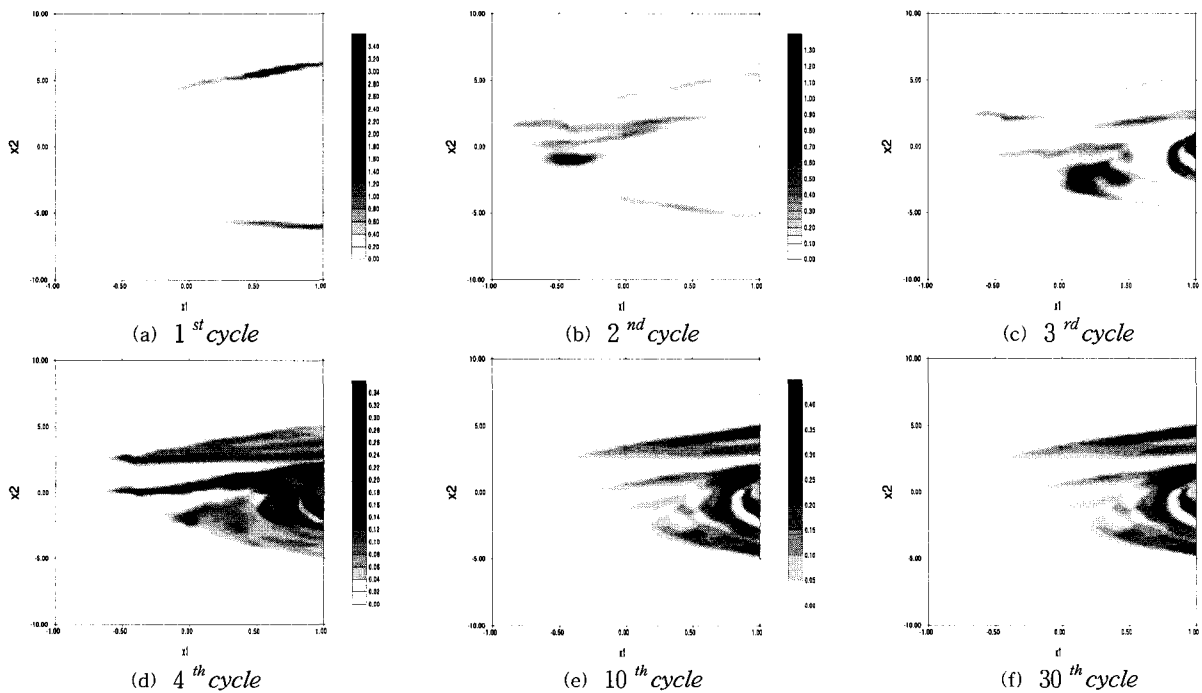


(a) direct numerical simulation (Poincare map)



(b) semi-analytical procedure (joint probability density function on Poincare section)

그림 5 Comparison of results from semi-analytical method and direct numerical simulation ($\xi=0.03, F_0=7.5, \Omega=1.99, e=0.95$) :



(a) 1st cycle (b) 2nd cycle (c) 3rd cycle (d) 4th cycle (e) 10th cycle (f) 30th cycle

그림 6. Evolution of joint probability density function $f(x_1, x_2; t)$ of a perturbed chaotic response in 2-D contour maps ($\xi=0.03, F_0=7.5, \Omega=1.99, e=0.95, q=0.0001$)

시간영역에서의 수치해석결과로부터, 노이즈는 혼돈거동의 특이한 위상면에서 구조를 확대시키며, 궁극적으로 파괴함을 알았다. 여기서는 확률밀도함수를 통하여 시스템의 응답거동에 미치는 노이즈의 영향을 분석하고자 한다.

노이즈의 크기를 달리하여 구한 정상상태의 확률밀도함수를 그림 7에 나타내었다. 노이즈강도가 적은 경우 ($q=0.0005$), 앙상블의 분포형태는 혼돈거동의 fractal구조를 보이고 있으나(그림 22a), 노이즈강도가 커지면서($q=0.001$), 앙상블의 분포는 점차 퍼지는 것을 알 수 있다(그림 22b). 노이즈강도가 다시 두 배 증가하면서 ($q=0.002$), 이러한 형상은 더욱 뚜렷해 지며 혼돈거동의 복잡한 구조의 경계부가 미세한 패턴을 잃으면서 파괴됨을 볼 수 있다.(그림 22c) 노이즈강도가 더욱 커지면($q=0.008$), 앙상블의 분포는 이제 전체적인 혼돈거동의 윤곽만을 나타낼 뿐 분포

내부의 상세한 패턴은 찾아보기 힘들 정도로 사라졌음을 알 수 있다.(그림 22d)

수치해석 및 앙상블분포를 통한 결과로부터, 노이즈는 시스템의 응답에 내재되어 있는 혼돈거동의 특성을 감소시킴을 밝혔다. 노이즈강도가 적은 경우에는 시스템의 혼돈거동은 대부분의 특성을 그대로 유지하며, 노이즈강도가 상대적으로 큰 경우에도 전체적인 혼돈거동의 fractal구조의 윤곽을 유지함을 알았다. 이로부터 노이즈가 추가된 조화가진력을 받는 시스템의 거동에는 완전한 결정론적 시스템에서 발생하는 혼돈거동의 특성이 계속해서 잔재함을 밝혀내었다. 또한 혼돈거동은 매우 강한 안정성을 소유함도 알 수 있다.

앙상블의 분포에서 정상상태의 확률밀도함수가 변화하지 않는다는 사실로부터 포인케어맵상의 응답거동으로 이루어진 확률과정은 약정상과정(weakly stationary process)

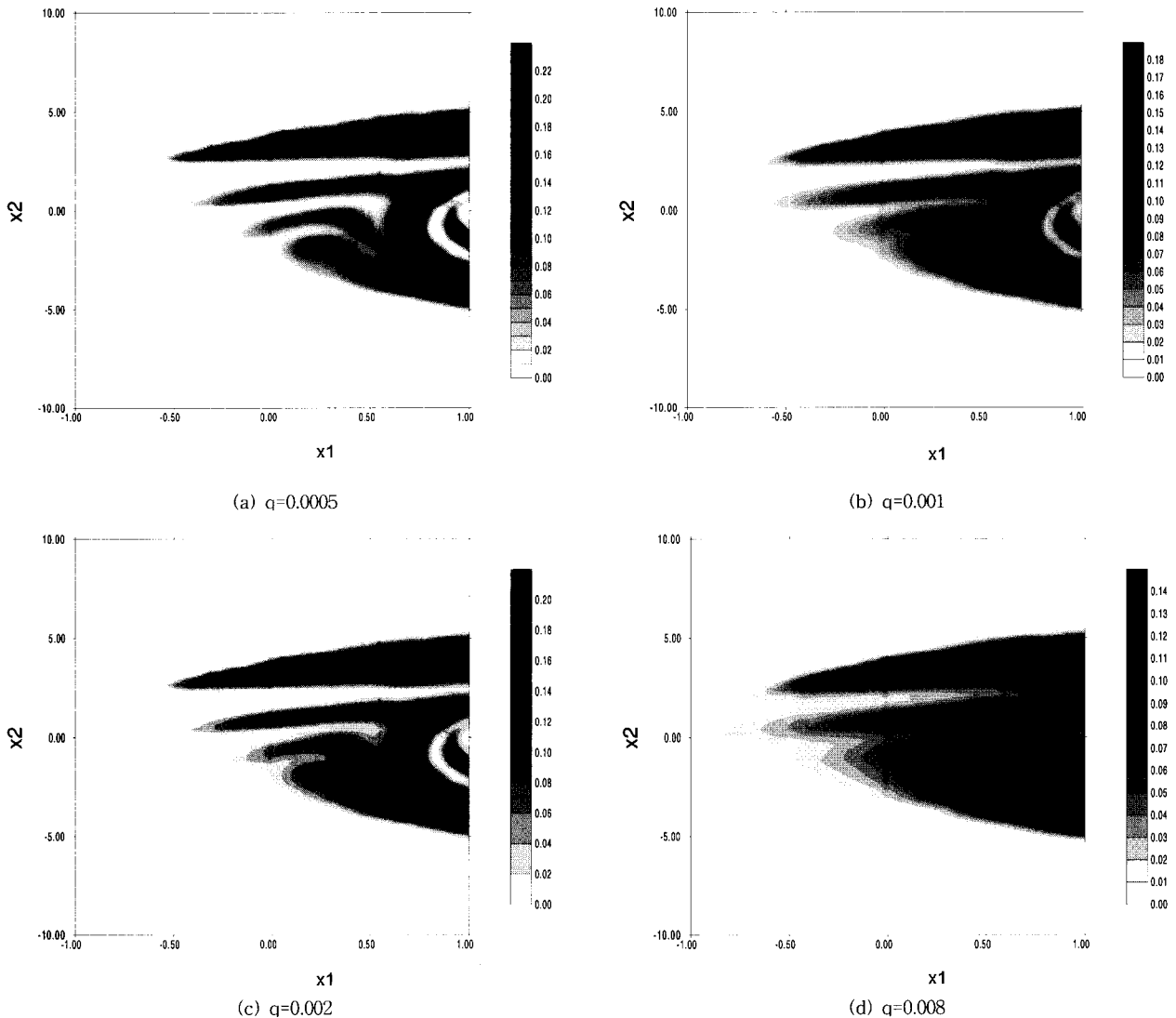


그림 7 Steady state probability density functions showing the effect of noise on the chaotic response with various noise intensities in 2-D contour maps ($\xi=0.03, F_0=7.5, \Omega=1.99, e=0.95$) : $t=20^{th}$ cycle.

입을 알 수 있다.

본 연구를 통해, path-integral solution을 이용하여 구한 확률밀도함수는 시간영역분석에서 얻을 수 있는 정보는 물론, 시스템 응답거동으로 이루어진 앙상블의 분포특성을 제공함으로써 주어진 조건에서 임팩트시스템의 향후 거동을 예측할 수 있다는 것을 밝혔다.

5. 결 론

본 연구에서는 랜덤동요된 조화가진력을 받는 임팩트시스템의 거동분석을 위하여 응답거동으로 이루어진 Markov process의 확률밀도함수를 구할 수 있는 반해석적 방법을 path-integral solution을 이용하여 개발하였다. 반해석적방법을 통하여 구한 결합확률밀도함수의 전개로부터 임팩트시스템의 혼돈거동에 대한 특성과 노이즈의 영향을 분석하였다.

완전한 결정론적 시스템에서 발견되는 혼돈거동은 노이즈가 있는 환경에서도 그 특성이 시스템의 거동에 잔재한다는 것을 밝혔다. 또한 다양한 크기의 노이즈를 적용한 결과 혼돈거동에 미치는 노이즈의 영향은 혼돈구조의 복잡한 거동구조를 완화시키며, 궁극적으로는 파괴하는 것으로 밝혀졌다. 이러한 노이즈의 영향을 분석한 결과, 혼돈거동의 미세한 구조는 쉽게 파괴되나, 상대적으로 높은 강도의 노이즈를 겪는 상황에서도 fractal 구조의 윤곽을 유지함으로써 전체적인 분포형태는 매우 강한 안정성을 갖고 있음을 알 수 있었다. 임팩트시스템의 앙상블은 고도의 비선형성으로 인해, 짧은 시간 안에 위상면에 위치하는 혼돈거동의 형태와 같이 분포됨을 밝혔다. 정상상태의 포인케어맵상의 앙상블에 대한 확률밀도함수는 약정상과정임을 밝혔다.

결과로부터 반해석적 방법은 시스템의 거동에 대한 예측을 정확히 할 수 있으며, 시스템의 응답거동으로 이루어진 앙상블의 확률분포를 제공함으로써 임팩트시스템의 거동특성을 제공함은 물론, 시스템거동에 대한 확률적 특성도 제공할 수 있음을 알 수 있었다.

6. 참고문헌

1. Graham, R. "Path Integral Formulation of General Diffusion Processes," *Zeitschrift fur Physik B*, 26, 1997, pp.281~290.
2. Li, G. X., Rand, R. H. and Moon, F. C. (1990), "Bifurcations and Chaos in a Forced Zero-Stiffness Impact Oscillator," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol.25, No 4, pp.417~432.
3. Moon, F. C. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, 1987
4. Ochi, M. K. (1990), *Applied Probability & Stochastic Processes in Engineering and Physical Sciences*, John Wiley & Sons, New York, 1990
5. Risken, H. *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984
6. Shaw, S. W. "The Dynamics of a Harmonically Excited System Having Rigid Amplitude Constraints," Part I and II, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, 1985, pp.453~464
7. Shinozuka, M, "Simulation of Multivariate and Multidimensional" *Journal of the Acoustical Society of America*, 49, Random Processes, pp.357~367.
8. Wehner, M. F. and Wolfer, W. G. "Numerical evaluation of path-integral solution to Fokker-Planck Equations," *Physical Review A*, Vol. 5, No 27 1983, p.2663~2670.
9. Wissel, C. "Manifolds of Equivalent Path Integral Solutions of the Fokker-Planck Equation," *Zeitschrift fur Physik B*, 35, 1997, pp.185~191.
10. 마 호성, "구분적선형시스템을 이용한 해양구조물의 거동분석," *전산구조공학회*, 1997, pp.251~265.
11. 마 호성, "조화가진력을 받는 임팩트시스템의 거동", *대한토목학회논문집*, 제18권 1-6호, 1998, pp.761~773
12. 마 호성, "Fokker-Planck 방정식의 Path-Integral Solution을 이용한 구분적선형시스템의 비선형동적거동분석", *한국전산구조공학회논문집*, 12권 2호, 1999, pp.251~264.