The Korean Communications
in Statistics Vol. 11 No. 1, 2004
pp. 121-137

On Slope Rotatability of Central Composite Designs of the Second Type[1)]

Hyuk Joo Kim[2)] and Yun Mi Ko[3)]

Abstract

Kim(2002) proposed a second type of central composite design (CCD2), in which the positions of the axial points are indicated by two numbers. In this paper, we study properties of CCD2 when we are interested in estimating the slope of a response surface. Conditions are obtained for CCD2 to be slope-rotatable over axial directions, and some CCD2's are presented that have slope rotatability over axial directions. Also values of a measure of slope rotatability over axial directions are tabulated for various CCD2's. Finally, it is shown that CCD2 is always slope-rotatable over all directions.

Keywords : Central composite design of the second type, Slope rotatability over axial directions, Slope rotatability over all directions.

1. 서 론

반응표면방법론(response surface methodology)에서 사용되는 실험계획 중 2차 다항회귀모형

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{1.1}$$

의 경우에 특히 많이 쓰이는 중심합성계획(central composite design)이 있다. $k=2$, 즉 설명변수가 두 개인 경우 중심합성계획의 계획행렬(design matrix)은 다음과 같다.

1) This work was supported by grant No. R01-2003-000-10220-0 from the Basic Research Program of the Korea Science & Engineering Foundation and by Wonkwang University Research Assistantship in 2003.
2) Professor, Division of Mathematics and Informational Statistics and Institute of Basic Natural Sciences, Wonkwang University, Iksan, Jeonbuk 570-749, Korea
E-mail: hjkim@wonkwang.ac.kr
3) Graduate Student, Department of Informational Statistics, Graduate School, Wonkwang University, Iksan, Jeonbuk 570-749, Korea

$$D=\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \end{array}$$
$$D=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

중심합성계획에서는 축점의 위치를 지정해 주는 수인 α의 중요성이 크며 α의 값에 의해 축점의 위치를 조절할 수 있다는 점이 중심합성계획의 큰 특징이라고 할 수 있다. 이러한 흐름에서 Kim(2002)은 축점에 관한 내용을 좀 더 다양화하여, 중심합성계획에서 축점의 위치를 지정해 주는 수가 한 개가 아니라 두 개인 경우에 관하여 연구하였으며, 기존의 중심합성계획을 CCD1, 축점의 위치가 두 개의 수에 의해 지정되는 중심합성계획을 CCD2라 불렀다. CCD2는 좋은 성질을 많이 가지며 CCD1보다 효율적인 경우도 많은 것으로 밝혀졌다.

한편 1970년대부터 반응변수의 값 자체보다 두 점에서의 반응량의 차이를 추정하는 문제에 관심이 모아졌으며, 이 문제는 자연스럽게 반응표면의 기울기를 추정하는 문제로 연결되었다. Atkinson(1970) 이후 많은 학자들이 이 문제를 다루었다.

반응표면의 기울기를 추정하기 위한 실험계획이 가질 수 있는 바람직한 성질로 기울기회전성(slope rotatability)이 있다. 이것은 Hader와 Park(1978), 그리고 Park(1987)이 제시한 성질이다. 중심합성계획도 이 성질을 가질 수 있다. CCD1의 기울기회전성에 관한 연구는 Hader와 Park(1978), Park(1987), Park과 Kim(1992), Kim(1993) 등에 나와 있다. 본 논문에서는 이 기울기회전성을 CCD2에 적용하여 관련된 내용을 연구하고자 한다.

2. 축점의 위치를 두 개의 수가 지정하는 중심합성계획

이 절에서는 Kim(2002)이 제시한 CCD2를 간략히 살펴본다. CCD2의 계획행렬은 다음과 같다 ($k=2$인 경우).

$$D=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

여기서 중심점의 수 n_0는 1이상의 정수이며, 축점의 위치를 지정하는 수인 α_1과 α_2는 $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$인 수이다.

k가 3이상인 경우에도 $k=2$인 경우를 확장하여 생각하면 계획행렬을 쉽게 알 수 있다. CCD2에서 실험점의 총수를 N이라 하면 $N=F+T$가 된다. 단, 여기서 F는 요인실험점의 수로 $F=2^k$(일부실시법을 쓰는 경우에는 2^{k-p}; p는 적절한 정수)이며, T는 축점의 수와 중심점의 수를 합한 것으로 $T=4k+n_0$이다.

식(1.1)에서 η의 측정값을 y로 놓으면 이 모형은

$$y=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}x_i^2+\sum_{i<j}^{k}\beta_{ij}x_i x_j+\varepsilon \quad (\varepsilon\sim(0,\ \sigma^2)\text{이고 서로 독립})$$

이 된다. 계산이 간단해지도록 하기 위하여 대체모형을 쓰면

$$y_u=\beta_0'+\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_{iu}+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}(x_{iu}^2-\overline{x_i^2})+\sum_{i<j}^{k}\beta_{ij}x_{iu}x_{ju}+\varepsilon_u \quad (u=1,2,\cdots,N) \qquad (2.1)$$

가 된다. 단, 여기서 $\overline{x_i^2}=\sum_{u=1}^{N}x_{iu}^2/N$이고 $\beta_0'=\beta_0+\sum_{i=1}^{k}\beta_{ii}\overline{x_i^2}$이며 CCD2의 경우에는 $\overline{x_i^2}=(F+2\alpha_1^2+2\alpha_2^2)/N$이 된다.

행렬과 벡터를 사용하여 식(2.1)을 나타내면

$$\underline{y}=X\underline{\beta}+\underline{\varepsilon} \quad (\underline{\varepsilon}\sim(\underline{0},\ I\sigma^2))$$

으로 쓸 수 있다. 여기서

$$\underline{y}=(y_1,\ y_2,\cdots,\ y_N)'$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{k1} & x_{11}^2-\overline{x_1^2} & \cdots & x_{k1}^2-\overline{x_k^2} & x_{11}x_{21} & \cdots & x_{k-1,1}x_{k1} \\ 1 & x_{12} & \cdots & x_{k2} & x_{12}^2-\overline{x_1^2} & \cdots & x_{k2}^2-\overline{x_k^2} & x_{12}x_{22} & \cdots & x_{k-1,2}x_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1N} & \cdots & x_{kN} & x_{1N}^2-\overline{x_1^2} & \cdots & x_{kN}^2-\overline{x_k^2} & x_{1N}x_{2N} & \cdots & x_{k-1,N}x_{kN} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\beta}=(\beta_0', \beta_1, \cdots, \beta_k, \beta_{11}, \cdots, \beta_{kk}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{k-1,k})'$$

$$\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N)'$$

이다.

β_0', β_i, β_{ii}, β_{ij}의 최소제곱추정량을 각각 b_0', b_i, b_{ii}, b_{ij}라 하자. 이 추정량들의 분산과 공분산은 Kim(2002)에서 아래와 같이 구해졌다.

$$\begin{gathered} Var(b_0') = \sigma^2/N \\ Var(b_i) = \sigma^2/(F+2\alpha_1^2+2\alpha_2^2) \quad (i=1,2,\cdots,k) \\ Var(b_{ij}) = \sigma^2/F \quad (i\neq j) \\ Var(b_{ii}) = \sigma^2 e \quad (i=1,2,\cdots,k) \\ Cov(b_{ii}, b_{jj}) = \sigma^2 f \ (i\neq j) \end{gathered} \tag{2.2}$$

그 밖의 모든 공분산은 0.

단 여기서 e와 f는 다음과 같다.

$$e=\frac{A_1}{B} \tag{2.3}$$

$$f=\frac{A_2}{B}$$

$$A_1=(k-1)FT-4(k-1)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(F+\alpha_1^2+\alpha_2^2)+2N(\alpha_1^4+\alpha_2^4) \tag{2.4}$$

$$A_2=-FT+4(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(F+\alpha_1^2+\alpha_2^2)$$

$$B=2(\alpha_1^4+\alpha_2^4)\{kFT-4k(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(F+\alpha_1^2+\alpha_2^2)+2N(\alpha_1^4+\alpha_2^4)\} \tag{2.5}$$

반응표면 실험계획이 가질 수 있는 바람직한 성질 중 직교성(orthogonality)과 회전성(rotatability)이 있다. Kim(2002)은 CCD2가 직교성을 가질 조건이

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2=\frac{\sqrt{FN}-F}{2}$$

이며, 회전성을 가질 조건이

$$\alpha_1^4+\alpha_2^4=F$$

임을 밝혔다. 직교성과 회전성에 관한 자세한 내용은 Kim(2002)을 참조하면 될 것이다.

3. CCD2의 기울기회전성

반응표면의 기울기를 추정하는 데에 관심이 있는 경우에는 기울기회전성을 갖는 실험계획이 바람직한 실험계획이다. 이것은 반응변수의 기대값을 추정하는 경우 회전성이 바람직한 성질인 것과 같은 이치이다. 기울기회전성에는 축방향 기울기회전성(slope rotatability over axial directions)과 전방향 기울기회전성(slope rotatability over all directions)이 있다.

3.1 축방향 기울기회전성

최소제곱법에 의하여 적합된 회귀식은

$$\hat{y}(\underline{x}) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} x_i x_j$$

로 나타낼 수 있는데, 여기서 x_i에 대한 $\hat{y}(\underline{x})$의 1차도함수는

$$\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_i} = b_i + 2b_{ii} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} b_{ij} x_j \qquad (3.1)$$

이며, 이 도함수의 분산은 도함수가 추정되는 점 $\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)'$와 주어진 실험계획의 함수이다. 그런데 만일 다음과 같은 두 조건이 만족되면, 주어진 실험계획을 축방향 기울기회전계획이라 부른다.

[1] 각각의 $i(i=1,2,\cdots,k)$에 대하여 $Var(\partial \hat{y}(\underline{x})/\partial x_i)$는 원점에서 점 $\underline{x}$까지의 거리 $\rho = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}$만의 함수.

[2] 임의의 점 $\underline{x}$에 대하여 $Var(\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_1}) = Var(\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_2}) = \cdots = Var(\frac{\partial \hat{y}(\underline{x})}{\partial x_k})$.

어떤 실험계획이 축방향 기울기회전계획이라면 축 방향으로의 기울기의 추정은 계획의 원점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들에 대하여 동일한 신뢰도를 가질 것이다. 축방향 기울기회전성의 개념은 Hader와 Park(1978)에 의하여 제안되었다.

이제 축방향 기울기회전성의 개념을 CCD2에 적용해 보자. CCD2에서는 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} c_{i,ii} = c_{i,ij} = c_{ii,ij} = c_{ij,il} = 0 \quad (i\neq j\neq l\neq i), \\ v_1 = v_2 = \cdots = v_k \\ v_{11} = v_{22} = \cdots = v_{kk} \\ v_{12} = v_{13} = \cdots = v_{k-1,k} \end{aligned} \qquad (3.2)$$

여기서 표현을 간단하게 하기 위하여 다음과 같은 표기법을 사용했으며, 앞으로도 계속 이러한 표기법을 사용할 것이다.

$$v_i = Var(b_i), \quad v_{ii} = Var(b_{ii}), \quad v_{ij} = Var(b_{ij})$$

$$c_{i,ii}=Cov(b_i, b_{ii}),\quad c_{i,ij}=Cov(b_i, b_{ij}),\quad c_{ii,ij}=Cov(b_{ii}, b_{ij}),\quad c_{ij,il}=Cov(b_{ij}, b_{il})$$

따라서 식(3.1)로 표시된 도함수의 분산은

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{\partial \hat{y}(x)}{\partial x_i}\right) &= v_i + 4x_i^2 v_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} x_j^2 v_{ij} \\ &= v_1 + 4v_{11}x_i^2 + v_{12}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} x_j^2 \end{aligned}$$

이 되며, 축방향 기울기회전성을 갖기 위한 조건은

$$4v_{11} = v_{12} \tag{3.3}$$

임을 알 수 있다. 제2절에서 언급한 바와 같이 $v_{11}=\sigma^2 e$(e는 식(2.3), (2.4), (2.5)에 의해 정의되어 있음)이고 $v_{12}=\sigma^2/F$이므로 식(3.3)은

$$4Fe=1$$

이라는 조건이 된다. 이 식을 풀어서 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} &2(N-2k)(\alpha_1^8+\alpha_2^8)-8k(\alpha_1^6\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2^6) \\ &+4(N-2k)\alpha_1^4\alpha_2^4-4kF(\alpha_1^6+\alpha_1^4\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2^4+\alpha_2^6) \\ &-F(4N-kT-8k+8)(\alpha_1^4+\alpha_2^4)+16(k-1)F\alpha_1^2\alpha_2^2 \\ &+8(k-1)F^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)-2(k-1)F^2T=0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

식(3.4)가 바로 CCD2가 축방향 기울기회전계획이 되기 위한 조건이다. 주어진 k, p, n_0의 값에 대하여 식(3.4)를 만족하는 α_1과 α_2의 조합은 무수히 많다. 그중 몇 개씩을 골라 부록의 <표 1>부터 <표 5>까지에 정리해 놓았다. 즉 이 표들에 수록되어 있는 α_1과 α_2를 갖는 CCD2는 축방향 기울기회전계획이다.

한편 Park과 Kim(1992)은 주어진 임의의 반응표면 실험계획에 대하여 그 계획이 축방향 기울기회전계획에 얼마나 가까운가 하는 것을 수치로 나타낼 수 있는 하나의 측도(measure)를 제시하였다. 이 측도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q_k(D) = \frac{1}{2(k-1)\sigma^4}\Bigg[&(k+2)(k+4)\sum_{i=1}^{k}\left\{(v_i-\bar{v})+\frac{a_i-\bar{a}}{k+2}\right\}^2 \\ &+\frac{4}{k(k+2)}\sum_{i=1}^{k}(a_i-\bar{a})^2+2\sum_{i=1}^{k}\left\{(4v_{ii}-\frac{a_i}{k})^2+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k}(v_{ij}-\frac{a_i}{k})^2\right\} \\ &+4(k+4)\sum_{i=1}^{k}(4c_{i,ii}^2+\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k}c_{i,ij}^2)+4\sum_{i=1}^{k}(4\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k}c_{ii,ij}^2+\sum_{\substack{j<l \\ j,l\neq i}}^{k}c_{ij,il}^2)\Bigg] \end{aligned} \tag{3.5}$$

단, 여기서

$$\bar{v} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} v_i,$$
$$a_i = 4v_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} v_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,k),$$
$$\bar{a} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i$$

이다.

이 측도는 주어진 계획이 축방향 기울기회전계획인 경우에 0의 값을 갖고, 축방향 기울기회전계획으로부터 멀어질수록 큰 값을 갖는다. CCD2에 이 측도를 적용해 보자. CCD2에서는 식(3.2)가 성립하므로 식(3.5)는 다음의 식(3.6)과 같이 아주 단순한 식이 된다.

$$Q_k(D) = \frac{1}{\sigma^4} (4v_{11} - v_{12})^2 \tag{3.6}$$

그런데 실험계획들을 효율성에 근거를 두고 비교하거나 모형의 회귀계수들의 추정량의 정도(precision)와 관련한 어떤 기준에 근거를 두고 비교하기 위해서는 계획들의 퍼짐(spread)이 동일하도록 계획들을 스케일링(scaling)하여야 한다. 계획의 순수2차적률인 $[ii] = \sum_{u=1}^{N} x^2_{iu}/N$을 퍼짐의 측도로 삼으며, 일반적으로 다음과 같이 되도록 스케일링을 한다(Myers(1976, p.135) 참조).

$$[i] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^{N} x_{iu} = 0$$
$$[ii] = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^{N} x^2_{iu} = 1 \tag{3.7}$$
$$(i=1,2,\cdots,k)$$

스케일링을 하기 전의 $[ii]$의 값을 C라 하자. $[ii]=1$을 만들기 위해서는 각각의 x_i열에 $1/\sqrt{C}$을 곱해 줘야 한다. 스케일링 전과 후의 b_{ii}의 분산을 각각 $v_{ii}^{(b)}$와 $v_{ii}^{(a)}$로 나타내고 스케일링 전과 후의 b_{ij}의 분산을 각각 $v_{ij}^{(b)}$와 $v_{ij}^{(a)}$로 나타내자. $Var(\underline{b}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$(단 $\underline{b}$는 $\underline{\beta}$의 최소제곱추정량)이므로 스케일링 전과 후의 분산 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$v_{ii}^{(a)} = C^2 v_{ii}^{(b)}$$
$$v_{ij}^{(a)} = C^2 v_{ij}^{(b)}$$

계획들의 축방향 기울기회전성을 비교할 때에도 식(3.7)의 스케일링을 실시한 후에 비교한다. 따라서 식(3.6)의 측도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_k(D) = \frac{C^4}{\sigma^4}(4v_{11}^{(b)} - v_{12}^{(b)})^2 \tag{3.8}$$

CCD2의 경우 $C = (F + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2)/N$이므로 식(2.2)와 식(3.8)에 의해 축방향 기울기회전성의 측도는 다음과 같이 얻어진다.

$$Q_k(D) = (\frac{F + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2}{N})^4 (4e - \frac{1}{F})^2.$$

부록의 <표 6>부터 <표 10>까지에는 k, p, n_0, α_1, α_2의 여러 값에 대하여 $Q_k(D)$의 값을 계산하여 수록해 놓았다.

3.2 전방향 기울기회전성

기울기를 추정하는 문제에서, 반응표면의 한 점 $\underline{x}$에서 축 방향으로 그은 접선의 기울기 뿐 아니라 임의의 방향으로 그은 접선의 기울기를 추정하는 데에 관심이 있는 경우도 많을 것이다. 이 기울기의 분산은 접점 $\underline{x}$의 좌표와 접선의 방향 및 실험계획의 함수이다. 만일 모든 가능한 방향에 걸쳐 기울기의 분산을 평균한 값을 생각한다면 이 평균분산은 접점 $\underline{x}$의 좌표와 실험계획만의 함수가 된다. 그런데 실험계획을 선택함으로써 계획의 원점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들에 대하여 이 평균분산을 일정하게 할 수 있다. 이러한 성질을 전방향 기울기회전성이라 부른다.

Park(1987)은 전방향 기울기회전성을 제시하였으며, 이 성질을 갖기 위한 필요충분조건이 다음과 같다는 것을 보였다.

[1] 모든 i에 대하여

$$2c_{i,ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} c_{j,ij} = 0.$$

[2] $i \neq j$인 모든 (i, j)에 대하여

$$2(c_{ii,ij} + c_{jj,ij}) + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i,j}}^{k} c_{il,jl} = 0.$$

[3] 모든 i에 대하여

$$4v_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} v_{ij}$$

는 같은 값을 갖는다.

이제 이 전방향 기울기회전성을 CCD2에 적용해 보자. 식(2.2)에 주어진 결과들에서 볼 수 있듯이 $c_{ii,jj}$ $(i \neq j)$를 제외한 모든 공분산은 0이므로 조건[1]과 [2]가 만족된다는 것은 명백하다. 또

한 모든 $i(i=1,2,\cdots,k)$에 대하여 v_{ii}의 값이 $\sigma^2 e$로 같고 $i\neq j$인 모든 (i,j)에 대하여 v_{ij}의 값이 σ^2/F로 같으므로 조건[3]도 만족된다는 것을 알 수 있다. 따라서 우리는 CCD2는 α_1과 α_2의 값, 그리고 중심점의 수 n_0와 관계없이 항상 전방향 기울기회전성을 갖는다는 중요한 사실을 알게 되었다.

4. 결 론

중심합성계획은 반응표면분석을 위하여 많이 사용되는 실험계획이며 여러 학문 분야와 산업에서도 활용되고 있다. 중심합성계획은 세 부분 즉 요인실험점, 중심점, 축점으로 이루어지는데 α의 값에 의해 축점의 위치를 자유롭게 조절함으로써 바람직한 성질을 갖는 중심합성계획들을 작성할 수 있다.

본 논문에서는 축점의 위치가 두 개의 수(α_1과 α_2)에 의하여 지정되는 중심합성계획(CCD2)의 기울기회전성에 관하여 논의하였다. CCD2가 축방향 기울기회전성을 갖기 위한 조건을 구하였으며, 축방향 기울기회전성을 갖지 않은 CCD2에 대해서도 이 성질의 정도를 평가할 수 있게 해 주는 측도를 구하였다. 또한 CCD2는 항상 전방향 기울기회전성을 갖는 실험계획이라는 것을 보였다.

참고문헌

[1] Atkinson, A.C.(1970). The design of experiments to estimate the slope of a response surface, *Biometrika*, 57, 319-328.

[2] Hader, R.J. and Park, S.H.(1978). Slope-rotatable central composite designs, *Technometrics*, 20, 413-417.

[3] Kim, H.J.(1993). A measure of slope rotatability over all directions, *The Korean Journal of Applied statistics*, 6, 105-123.

[4] Kim, H.J.(2002). Extended central composite designs with the axial points indicated by two numbers, *The Korean Communications in Statistics*, 9, 595-605.

[5] Myers, R.H. (1976). *Response Surface Methodology*, Blacksburg, VA : Author (distributed by Edwards Brothers, Ann Arbor, MI).

[6] Park, S.H.(1987). A class of multifactor designs for estimating the slope of response surfaces, *Technometrics*, 29, 449-453.

[7] Park, S.H. and Kim, H.J.(1992). A measure of slope-rotatability for second order response surface experimental designs, *Journal of Applied Statistics*, 19, 391-404.

[2004년 2월 접수, 2004년 3월 채택]

부 록

<표 1> $k=2$, $p=0$(즉 $F=4$)인 경우 축방향 기울기회전성을 갖는 CCD2들

(1) $n_0=1$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7267	0.8	0.9	1.0
α_2	1.8219	1.8268	1.8348	1.8457	1.8596	1.8760	1.8947	1.9	1.9153	1.9374	1.9603

α_1	1.1	1.1735	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.9041
α_2	1.9834	2.0	2.0059	2.0266	2.0444	2.0577	2.0645	2.0618	2.0446	2.0025	2.0

(2) $n_0=2$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.2550	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9843
α_2	1.7925	1.7966	1.8	1.8033	1.8125	1.8239	1.8374	1.8524	1.8686	1.8856	1.9

α_1	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.7395	1.8
α_2	1.9027	1.9190	1.9336	1.9452	1.9523	1.9526	1.9427	1.9169	1.9	1.8628

(α_1이나 α_2가 2.0인 축방향 기울기회전 CCD2는 존재하지 않음)

<표 2> $k=3$, $p=0$(즉 $F=8$)인 경우 축방향 기울기회전성을 갖는 CCD2들

(1) $n_0=1$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.1144	2.1178	2.1235	2.1314	2.1416	2.1539	2.1683	2.1847	2.2031	2.2233

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.2449	2.2676	2.2909	2.3141	2.3362	2.3562	2.3730	2.3851	2.3903	2.3861

(2) $n_0=2$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.0934	2.0963	2.1012	2.1080	2.1165	2.1268	2.1387	2.1521	2.1668	2.1828

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.200	2.2170	2.2343	2.2509	2.2658	2.2777	2.2852	2.2862	2.2776	2.2547

<표 3> $k=4$, $p=0$(즉 $F=16$)인 경우 축방향 기울기회전성을 갖는 CCD2들

(1) $n_0=1$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.4877	2.4901	2.4941	2.4997	2.5068	2.5155	2.5257	2.5375	2.5507	2.5653

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.5813	2.5986	2.6171	2.6363	2.6559	2.6753	2.6940	2.7110	2.7255	2.7362

(2) $n_0=2$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.4716	2.4738	2.4773	2.4822	2.4884	2.4960	2.5047	2.5147	2.5257	2.5379

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.5511	2.5652	2.5799	2.5952	2.6104	2.6253	2.6389	2.6506	2.6592	2.6633

<표 4> $k=5$, $p=0$(즉 $F=32$)인 경우 축방향 기울기회전성을 갖는 CCD2들

(1) $n_0=1$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.9439	2.9456	2.9484	2.9523	2.9572	2.9632	2.9703	2.9783	2.9872	2.9970

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	3.0076	3.0191	3.0312	3.0438	3.0569	3.0702	3.0834	3.0961	3.1078	3.1182

(2) $n_0=2$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.9314	2.9329	2.9355	2.9390	2.9435	2.9489	2.9552	2.9623	2.9702	2.9788

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.9881	2.9979	3.0082	3.0188	3.0297	3.0406	3.0511	3.0611	3.0699	3.0770

<표 5> $k=5$, $p=1$(즉 $F=16$)인 경우 축방향 기울기회전성을 갖는 CCD2들

(1) $n_0=1$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.4425	2.4444	2.4476	2.4521	2.4578	2.4648	2.4732	2.4830	2.4944	2.5075

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.5227	2.5402	2.5603	2.5831	2.6087	2.6365	2.6660	2.6960	2.7253	2.7526

(2) $n_0=2$인 경우

α_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
α_2	2.4313	2.4329	2.4357	2.4396	2.4445	2.4504	2.4573	2.4653	2.4744	2.4847

α_1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
α_2	2.4963	2.5095	2.5244	2.5413	2.5601	2.5807	2.6025	2.6247	2.6459	2.6648

<표 6> $k=2$, $p=0$(즉 $F=4$)인 CCD2의 $Q_k(D)$값들

(1) $n_0=1$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.5186							
0.8	.2136	.1730						
1.0	.1096	.1439	.1992					
1.2	.0696	.1222	.2481	.4660				
1.4	.0396	.0786	.1871	.4571	.6766			
1.6	.0143	.0303	.0742	.1896	.3725	.3443		
1.8	.0011	.0039	.0125	.0367	.0856	.1171	.0619	
2.0	.0031	.0020	.0007	.0000	.0021	.0058	.0024	.0043

(2) $n_0=2$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.3784							
0.8	.1506	.1149						
1.0	.0715	.0845	.0962					
1.2	.0408	.0618	.0958	.1278				
1.4	.0210	.0359	.0651	.1073	.1174			
1.6	.0067	.0125	.0249	.0463	.0636	.0461		
1.8	.0002	.0008	.0027	.0069	.0119	.0102	.0011	
2.0	.0035	.0030	.0023	.0016	.0011	.0017	.0071	.0295

(3) $n_0=3$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.2831							
0.8	.1099	.0805						
1.0	.0494	.0546	.0553					
1.2	.0261	.0361	.0481	.0538				
1.4	.0124	.0192	.0298	.0401	.0368			
1.6	.0034	0059	.0103	.0158	.0171	.0089		
1.8	.0000	.0001	.0005	.0012	.0014	.0003	.0015	
2.0	.0034	.0033	.0032	.0032	.0039	.0068	.0158	.0394

(4) $n_0=4$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.2163							
0.8	.0824	.0586						
1.0	.0355	.0376	.0352					
1.2	.0177	.0230	.0278	.0277				
1.4	.0079	.0114	.0159	.0187	.0148			
1.6	.0019	.0031	.0048	.0063	.0055	.0017		
1.8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0000	.0004	.0045	
2.0	.0031	.0032	.0035	.0040	.0055	.0093	.0189	.0399

<표 7> $k=3$, $p=0$(즉 $F=8$)인 CCD2의 $Q_k(D)$값들

(1) $n_0=1$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	1.0755							
0.8	.3140	.1720						
1.0	.0963	.0792	.0555					
1.2	.0364	.0381	.0376	.0374				
1.4	.0167	.0207	.0268	.0383	.0590			
1.6	.0081	.0114	.0179	.0333	.0715	.1274		
1.8	.0033	.0051	.0090	.0187	.0453	.1022	.1225	
2.0	.0006	.0012	.0024	.0057	.0143	.0338	.0541	.0384

(2) $n_0=2$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.8910							
0.8	.2592	.1411						
1.0	.0787	.0639	.0435					
1.2	.0290	.0296	.0278	.0248				
1.4	.0127	.0151	.0179	.0215	.0254			
1.6	.0058	.0077	.0108	.0161	.0243	.0300		
1.8	.0022	.0031	.0049	.0084	.0146	.0219	.0205	
2.0	.0003	.0006	.0011	.0022	.0045	.0077	.0089	.0047

(3) $n_0=3$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.7446							
0.8	.2160	.1170						
1.0	.0650	.0524	.0349					
1.2	.0235	.0236	.0213	.0177				
1.4	.0100	.0115	.0128	.0138	.0140			
1.6	.0044	.0055	.0071	.0093	.0116	.0117		
1.8	.0015	.0021	.0030	.0044	.0064	.0076	.0058	
2.0	.0002	.0003	.0006	.0010	.0016	.0022	.0019	.0005

(4) $n_0=4$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	.6271							
0.8	.1815	.0980						
1.0	.0543	.0434	.0285					
1.2	.0193	.0192	.0168	.0133				
1.4	.0080	.0090	.0096	.0096	.0088			
1.6	.0033	.0041	.0050	.0060	.0065	.0058		
1.8	.0011	.0014	.0019	.0026	.0032	.0033	.0020	
2.0	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0007	.0004	.0000

<표 8> $k=4$, $p=0$(즉 $F=16$)인 CCD2의 $Q_k(D)$값들

(1) $n_0=1$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	2.5887							
0.8	.6734	.3280						
1.0	.1770	.1279	.0736					
1.2	.0549	.0489	.0374	.0254				
1.4	.0203	.0204	.0190	.0165	.0142			
1.6	.0087	.0095	.0102	.0111	.0127	.0160		
1.8	.0040	.0047	.0057	.0075	.0110	.0194	.0341	
2.0	.0018	.0022	.0030	.0044	.0076	.0160	.0359	.0519

(2) $n_0=2$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	2.2962							
0.8	.5969	.2904						
1.0	.1566	.1129	.0647					
1.2	.0483	.0429	.0326	.0217				
1.4	.0177	.0176	.0161	.0136	.0109			
1.6	.0074	.0080	.0084	.0085	.0088	.0091		
1.8	.0034	.0038	.0044	.0053	.0067	.0089	.0112	
2.0	.0014	.0017	.0022	.0029	.0042	.0066	.0099	.0108

(3) $n_0=3$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	2.0440							
0.8	.5310	.2581						
1.0	.1391	.1001	.0572					
1.2	.0427	.0378	.0286	.0187				
1.4	.0155	.0154	.0139	.0114	.0088			
1.6	.0064	.0068	.0070	.0069	.0065	.0061		
1.8	.0028	.0032	.0036	.0040	.0046	.0052	.0054	
2.0	.0012	.0014	.0017	.0021	.0027	.0035	.0043	.0040

(4) $n_0=4$인 경우

$\alpha_2 \backslash \alpha_1$	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	1.8255							
0.8	.4740	.2302						
1.0	.1240	.0891	.0508					
1.2	.0380	.0335	.0252	.0164				
1.4	.0137	.0135	.0121	.0098	.0073			
1.6	.0056	.0059	.0059	.0057	.0051	.0044		
1.8	.0024	.0027	.0029	.0032	.0034	.0034	.0032	
2.0	.0010	.0011	.0013	.0016	.0019	.0022	.0023	.0019

<표 9> $k=5$, $p=0$(즉 $F=32$)인 CCD2의 $Q_k(D)$값들

(1) $n_0=1$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	6.0059							
0.8	1.4754	.6792						
1.0	.3618	.2469	.1322					
1.2	.1034	.0866	.0611	.0369				
1.4	.0349	.0326	.0273	.0203	.0138			
1.6	.0136	.0135	.0127	.0111	.0091	.0074		
1.8	.0060	.0062	.0063	.0062	.0061	.0062	.0069	
2.0	.0028	.0031	.0033	.0037	.0042	.0054	.0080	.0130

(2) $n_0=2$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	5.5723							
0.8	1.3685	.6298						
1.0	.3354	.2288	.1223					
1.2	.0958	.0801	.0564	.0339				
1.4	.0322	.0300	.0251	.0186	.0125			
1.6	.0125	.0124	.0115	.0099	.0080	.0062		
1.8	.0054	.0056	.0056	.0055	.0051	.0049	.0047	
2.0	.0025	.0027	.0029	.0031	.0033	.0038	.0045	.0055

(3) $n_0=3$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	5.1772							
0.8	1.2712	.5849						
1.0	.3114	.2124	.1134					
1.2	.0888	.0743	.0522	.0313				
1.4	.0298	.0277	.0231	.0170	.0113			
1.6	.0115	.0114	.0105	.0090	.0071	.0054		
1.8	.0050	.0051	.0051	.0048	.0044	.0040	.0035	
2.0	.0023	.0024	.0026	.0027	.0028	.0029	.0031	.0032

(4) $n_0=4$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	4.8166							
0.8	1.1825	.5439						
1.0	.2895	.1974	.1053					
1.2	.0825	.0689	.0484	.0289				
1.4	.0276	.0257	.0213	.0157	.0103			
1.6	.0106	.0104	.0097	.0082	.0064	.0047		
1.8	.0045	.0046	.0046	.0043	.0039	.0033	.0028	
2.0	.0021	.0022	.0023	.0023	.0023	.0023	.0023	.0021

<표 10> $k=5$, $p=1$(즉 $F=16$)인 CCD2의 $Q_k(D)$값들

(1) $n_0=1$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	1.8552							
0.8	.4797	.2318						
1.0	.1242	.0887	.0499					
1.2	.0373	.0326	.0241	.0152				
1.4	.0130	.0127	.0111	.0087	.0062			
1.6	.0051	.0053	.0052	.0048	.0042	.0037		
1.8	.0021	.0023	.0025	.0026	.0028	.0033	.0042	
2.0	.0008	.0009	.0011	.0013	.0018	.0027	.0051	.0094

(2) $n_0=2$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	1.6672							
0.8	.4309	.2082						
1.0	.1115	.0796	.0447					
1.2	.0334	.0292	.0215	.0135				
1.4	.0116	.0113	.0099	.0076	.0053			
1.6	.0045	.0046	.0045	.0041	.0034	.0028		
1.8	.0018	.0020	.0021	.0021	.0022	.0022	.0023	
2.0	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0016	.0022	.0027

(3) $n_0=3$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	1.5024							
0.8	.3883	.1875						
1.0	.1004	.0717	.0402					
1.2	.0301	.0262	.0193	.0120				
1.4	.0104	.0101	.0088	.0067	.0046			
1.6	.0040	.0041	.0040	.0035	.0029	.0022		
1.8	.0016	.0017	.0018	.0018	.0017	.0016	.0014	
2.0	.0006	.0007	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0012

4) $n_0=4$인 경우

α_2 \ α_1	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
0.6	1.3575							
0.8	.3507	.1693						
1.0	.0907	.0647	.0362					
1.2	.0271	.0236	.0174	.0108				
1.4	.0094	.0091	.0079	.0060	.0040			
1.6	.0036	.0037	.0035	.0031	.0025	.0018		
1.8	.0014	.0015	.0016	.0015	.0014	.0012	.0010	
2.0	.0005	.0006	.0006	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006