

## 특이치 분해를 이용한 중복 센서의 FDI 기법과 성능 분석

# Fault Detection and Isolation using Singular Value Decomposition for Redundant Sensors System

양철관\*, 심덕선

(Cheol-Kwan Yang and Duk-Sun Shim)

**Abstract :** In this paper, we propose a FDI method, which comes from singular value decomposition of measurement matrix for redundant sensors. We analyze the performance of the proposed FDI method by comparing with the GLT method in two ways such as FDI performance and GN&C performance. Also, we propose a GN&C performance index by combining FDI and GN&C performance.

**Keywords :** fault detection and isolation(FDI), redundant sensors, singular value decomposition(SVD), inertial navigation system(INS)

### I. 서론

오늘날 각종 제어, 항법, 통신 시스템들은 매우 다양하고 복잡한 시스템들이 복합적으로 구성되어 하드웨어 및 소프트웨어의 구조가 복잡하게 되었다. 따라서 전체 시스템의 신뢰성(reliability) 확보에 대한 중요성이 커지게 되었고 전체 시스템의 신뢰성 확보는 부분적인 시스템들에 대한 신뢰성 향상을 통하여 이루어질 수 있을 뿐만 아니라 고장검출 및 분리 기법(FDI: Fault Detection and Isolation)이라는 개념에 의해서도 확보될 수 있다. 그러므로 고장검출 및 분리 기법에 대한 연구가 1960년대부터 활발히 진행되어 오고 있다[1,2].

고장 검출 및 분리 기법은 크게 두 방향으로 연구가 진행되어 오고 있는데 1960년대 후반부터 1980년대 초반까지는 주로 하드웨어 여분(hardware redundancy)을 이용한 기법들에 대한 많은 연구가 진행되었고 1980년대 초반부터 현재까지는 해석적 여분(analytic redundancy)을 이용한 기법에 대해서 많은 연구가 진행되어 오고 있다. 하드웨어 여분을 이용한 기법은 단순히 센서 출력 값들을 비교하여 고장을 검출하고 분리하므로 이론적으로 간단하다는 장점이 있지만 구현에 따른 비용과 설치 장소 등의 문제가 발생하게 된다. 이에 비해서 해석적 여분을 이용한 기법은 시스템 내부의 동특성을 이용하여 하드웨어 여분 효과를 얻을 수 있으므로 구현에 따른 비용과 설치 장소 등의 문제를 해결할 수 있다. 그러나 서로 다른 물리량을 측정하는 센서들 사이의 관계식을 이용해야 하므로 이런 관계식을 구해야 하는 문제가 있다. 또한 해석적 여분을 이용하여 고장 검출 및 분리를 수행하더라도 전체 시스템의 신뢰성 확보를 위해서는 여분의 하드웨어가 반드시 필요하게 된다. 특히 관성 항법 시스

템(INS: Inertial Navigation System)은 관성 센서들(자이로, 가속도계)을 이용하여 항체의 위치, 속도, 자세 등의 항법 정보를 구하는 시스템으로 INS의 신뢰성 확보를 위해서는 관성 센서들에 대한 신뢰성 확보가 반드시 필요하므로 여분의 관성 센서들을 확보하는 것이 필수이다. 따라서 관성 항법 시스템과 같이 센서의 신뢰성 확보가 매우 중요한 시스템에서는 여분의 센서뿐만 아니라 센서에 대한 고장 검출 및 분리 기법이 반드시 필요하므로 하드웨어 여분을 이용한 고장 검출 및 분리 기법이 적합하다.

하드웨어 여분을 이용한 고장검출 및 분리 기법은 중복 센서(Redundant Sensors)를 장착하여 이들에 의한 정보를 상호 비교하여 고장을 진단하여 분리하는 것으로 패리티 식(parity equation) 발생, 고장 검출 그리고 고장 센서 분리와 같은 세 단계의 과정이 순차적으로 이루어진다. 먼저 패리티 식은 입력 값(각속도, 가속도)에 독립이 되도록하기 위해서 측정 행렬의 영 공간(null space)의 벡터들을 이용하거나 유수(residual)를 이용하여 발생한다. 이렇게 구해진 패리티 식을 문턱값(threshold)과 비교하여 고장을 검출하고 분리한다. 기존의 고장 검출 및 분리 기법에 관한 연구들은 다양한 방법을 통하여 패리티 식을 구성하였으며 패리티 식의 구성에 따라 고장 검출 및 분리 방법이 결정되었다. 기존의 방법들로는 look-up table을 이용하는 방법[3], 유수(residual)를 이용하는 방법[4], 패리티 공간(parity space)을 이용하는 방법[5], 최대 유사 확률을 이용하는 방법[6], 그리고 시간에 따른 여러 측정치들을 이용하는 방법[7,8,9,10] 등이 있다. 본 논문에서는 특이치 분해(Singular Value Decomposition: SVD)를 이용한 중복 센서의 FDI 기법을 제안하였으며 기법의 성능을 분석하기 위해서 기존의 방법인 GLT(Generalized Likelihood Test) 기법과 비교 분석을 하였다. 비교 방법으로는 FDI 성능 측면과 항법 성능(Guidance, Navigation and Control: GN&C) 측면에서 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하였다. 여기서 기존의 연구 결과들은 FDI 기법의 성능을 분석하기 위해서 FDI 성능 측면만을 고려하였으나 본 논문에서는 FDI 성능과 항법 성능을 결합하여 새로

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 7. 4., 채택확정 : 2003. 10. 13.

양철관, 심덕선 : 중앙대학교 전자전기공학부

(ckyang92@empal.com/dshim@cau.ac.kr)

※ 본 논문은 서울대학교 자동제어특화연구센터와 국방과학연구소에서 지원하여 연구하였음.

은 GN&C 성능 평가 방법을 제안하였다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2장에서는 중복 센서를 이용하는 FDI 기법에 대한 문제 정의와 기존의 FDI 기법인 GLT 기법을 간략히 정리하였고 3장에서는 본 논문에서 제안하는 방법인 SVD 기법을 소개하였다. 제4장에서는 두 가지 성능(FDI 성능, GN&C 성능) 측면에서 SVD 기법의 성능을 분석하였고 고 끝으로 5장에서는 결론을 맺는다.

**II. 문제 정의 및 기존의 FDI 기법**

**1. 문제정의**

본 절에서는 중복 센서를 이용한 센서 고장 검출 및 분리 기법에 대한 문제를 정의한다. 먼저 고장 신호와 측정 잡음을 고려한 n개의 관성 센서에 대한 측정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m(t) = Hx(t) + \epsilon + f \tag{1}$$

여기서

$m = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n]^T$  : n개의 센서 측정치(가속도 혹은 각속도)

$H$  : n개의 각각 센서들의 동체 좌표축에 대한 방향 벡터로 구성된 측정 행렬 ( $H \in R^{n \times 3}$ ,  $n > 3$ )

$x$  : 동체 좌표축에 대한 입력 각속도 혹은 가속도 ( $x \in R^3$ )

$\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_n]^T$  : 센서의 측정 잡음 ( $\epsilon_i \sim (0, 1)$ ,  $E[\epsilon \epsilon^T] = I_{n \times n}$ )

$f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$  : 고장 신호 벡터 ( $f \in R^n$ )

여기서 고장 신호 벡터와 센서의 측정 잡음은 서로 독립이라고 가정한다. 그리고 (1)의 측정 행렬  $H$ 에 대하여 (2)를 만족하는 패리티 행렬( $L$ )이 항상 존재한다.

$$LH = 0 \quad (L \in R^{(n-3) \times n}) \tag{2}$$

$$LL^T = I, \quad L = [l_{c1} \ l_{c2} \ \dots \ l_{cn}], \quad |l_{ci}| = 1$$

(2)를 만족하는 패리티 행렬  $L$ 과 (1)의 측정 식을 이용하여 다음과 같이 패리티식(parity equations)  $p$ 가 구하여진다.

$$p = Lm$$

**문제정의**

(1)과 같은 측정식에 대하여 n개의 중복 센서중 단일 고장이 발생하였을 경우 (2)를 만족하는 패리티 행렬( $L$ )을 이용하여 원하는 고장 검출 및 분리 성능을 만족하도록 해주는 단일 고장 검출 및 분리 기법을 설계하라.

**2. 최대 유사 확률을 이용한 기법(GLT 기법)[6]**

GLT 방법은 여러 문헌에서 사용되어 온 가장 일반적인 FDI 기법으로 GLT 방법에 대하여 간략히 살펴보면 다음과 같다. 센서 시스템에 고장이 없는 경우를  $H_0$ 라고 하고, 고장이 발생한 경우를  $H_1$ 이라 하자. 정상적인 상황일 때는  $E[p]=0$  일 것이며,  $E[pp^T]=LL^T$  임을 쉽게 알 수 있다. 그러나 고장이 발생했을 때는 분산 값에는 변화가 없으나, 고장 신호의 영향에 의해 패리티 벡터의 평균값에 변화

가 생기게 된다. 그러므로 패리티 벡터의 평균값을 통해 고장에 대한 정보를 얻을 수 있다.

$$H_0: p = Lm = LHx + L\epsilon = L\epsilon$$

$$E[p] = 0, \quad E[pp^T] = LL^T$$

$$H_1: p = Lm = LHx + L\epsilon + Lf = L\epsilon + Lf$$

$$E[p] = Lf = \mu, \quad E[(p - \mu)(p - \mu)^T] = LL^T$$

**고장 검출 함수(FD)**

측정 잡음  $\epsilon$ 이 가우시안(Gaussian)이므로  $p$ 도 가우시안 랜덤벡터(Gaussian random vector)이며,  $H_0, H_1$  두 가지 상황에 대해서 다음과 같은 조건 확률밀도 함수를 가진다. 아래의  $P$  는 확률을 나타내는 기호이다.

$$P(p|H_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} |LL^T|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} p^T (LL^T)^{-1} p\right) \tag{3}$$

$$P(p|H_1) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} |LL^T|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} (p - \mu)^T (LL^T)^{-1} (p - \mu)\right) \tag{4}$$

(3)와 (4)을 바탕으로 위의 두 가정에 대한 Log likelihood ratio  $\Lambda(p)$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Lambda(p) &= \max_p \ln \frac{P(p|H_1)}{P(p|H_0)} \\ &= \max_p \frac{1}{2} [p^T (LL^T)^{-1} p - (p - \mu)^T (LL^T)^{-1} (p - \mu)] \end{aligned} \tag{5}$$

(5)를 만족시키는 최대 유사 추정치(Maximum likelihood estimate) 값을  $\hat{\mu}$  라고 하면 위의 경우  $\hat{\mu} = p$  가 된다. 그러므로

$$\Lambda(p) = \frac{1}{2} p^T (LL^T)^{-1} p \tag{6}$$

따라서 고장 검출 함수 (FD)를 다음과 같이 정의한다.

$$FD = p^T (LL^T)^{-1} p \tag{7}$$

**고장 분리 함수**

먼저  $H_k$ 를 k번째 센서에 고장이 발생한 상황으로 표시해 보자. 즉,  $f_k = [0 \ \dots \ 0 \ f_k \ 0 \ \dots \ 0]$ .

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

$$H_k : E[p] = Lf_k, \quad E[pp^T] = LL^T$$

$$\begin{aligned} A_k &= PR(p|H_k) \\ &= K \exp\left(-\frac{1}{2} [(p - Lf_k)^T (LL^T)^{-1} (p - Lf_k)]\right) \end{aligned} \tag{8}$$

위 식에서  $K$ 는 상수이다.  $H_k$ 의 상황에서  $f_k$ 의 최대 유사 추정치  $\hat{f}_k$ 의 값은 (8)의  $A_k$  값이 최대가 될 경우이다. 그러므로 이는 (8-1)이 최소가 될 경우로써  $\hat{f}_k$  값은 (9)와 같이 구하여진다.

$$\begin{aligned}
 & (p - Lf_k)^T (LL^T)^{-1} (p - Lf_k) \\
 &= I_{ck}^T (LL^T)^{-1} I_{ck} \left\{ f_k - \frac{p^T (LL^T)^{-1} I_{ck}}{I_{ck}^T (LL^T)^{-1} I_{ck}} \right\}^2 \\
 & \quad - \frac{\{p^T (LL^T)^{-1} I_{ck}\}^2}{I_{ck}^T (LL^T)^{-1} I_{ck}} + p^T (LL^T)^{-1} p \tag{8-1}
 \end{aligned}$$

$$\hat{f}_k = \frac{p^T (LL^T)^{-1} I_{ck}}{I_{ck}^T (LL^T)^{-1} I_{ck}} \tag{9}$$

여기서  $Lf_k = I_{ck} f_k$  이다. 따라서 이 값을 (8-1)에 대입한 후 정리하면  $H_k$  상황에서의 고장 분리 함수 ( $FI_k$ )를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$FI_k = \frac{(p^T (LL^T)^{-1} I_{ck})^2}{I_{ck}^T (LL^T)^{-1} I_{ck}} \tag{10}$$

이와 같은 방식으로 주어진  $p$ 에 대하여 총  $n$ 개의  $FI$  함수를 얻을 수 있게 된다. 만약  $FD$  함수를 통해 고장이 확인되었을 경우, 전체  $FI$  함수 값을 체크하여 가장 큰 값을 보여주는 것이  $FI_k$  라면  $k$ 번째 센서가 고장이 발생하였다고 판단한다.

**III. 특이치 분해를 이용한 FDI 기법(SVD 기법)**

본 절에서는 본 논문에서 제안하는 SVD 기법을 유도한다. 그 내용은 다음과 같다.

**1. 측정 행렬의 영 공간**

최근에 수학적인 공학 문제들에서 해를 구하거나 분석을 하는데 있어서 특이치 분해(SVD)는 매우 유용하게 사용되고 있으며 많은 분야에 적용되고 있다. 이러한 SVD에 대해서 간략히 살펴보면 다음과 같다.

**보조정리1[11]:** 랭크(rank)가  $r$ 인 임의의  $n \times m$  행렬  $H$  ( $r < m$  and  $r < n$ )에 대해서 다음과 같은 형태로 변환 시켜 주는 행렬  $U, V$ 가 항상 존재한다.

$$U^* H V = A = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 혹은 } H = U A V^* = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^*$$

여기서  $U U^* = U^* U = I_n, V V^* = V^* V = I_m,$

$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\}, \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0, (*)$ 는 complex conjugate transpose를 나타낸다. ■

$n(>3)$ 개의 관성 센서를 사용할 경우 보조정리1에 의해서 측정 행렬  $H$ 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$H = U A V^*$$

여기서  $U = [U_1; U_2], A = \begin{bmatrix} \Sigma & \\ 0 & (n-r) \times 3 \end{bmatrix}, V = I_3,$  그리고  $U_1 \in R^{n \times 3}, U_2 \in R^{n \times (n-3)}, \Sigma_1 \in R^{3 \times 3}.$

측정 (1)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$m = U A V^* x + \epsilon + f. \tag{11}$$

(11)의 좌측에  $U^*$ 를 곱하면 다음과 같은 식이 구해진다.

$$U^* m = A V^* x + U^* (\epsilon + f) \tag{12}$$

(12)로부터 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$\begin{aligned}
 U_1^* m &= \Sigma_1 V x + U_1^* (\epsilon + f) \\
 U_2^* m &= U_2^* (\epsilon + f)
 \end{aligned} \tag{13}$$

**보조정리2:** 측정식(1)에 대해서 다음과 같이  $\alpha$ 와  $\beta$ 에 대하여 정의하자.

$$\alpha \equiv U_1^* m - \Sigma_1 V x = U_1^* (\epsilon + f) \tag{14}$$

$$\beta \equiv U_2^* m = U_2^* (\epsilon + f) \tag{15}$$

여기서  $U_1, U_2, V$ 는 측정 행렬  $H$ 의 특이치 문제에서 얻은 행렬이고  $U = [U_1; U_2]$ 이다. 그러면  $\epsilon + f$ 는 다음과 같이 나타내어질 수 있다.

$$\epsilon + f = U_1 \alpha + U_2 \beta$$

**증명 :** (14)에 의해서

$$U_1 \alpha = U_1 U_1^* (\epsilon + f) = (I - U_2 U_2^*) (\epsilon + f) \tag{16}$$

여기서  $U U^* = U_1 U_1^* + U_2 U_2^* = I.$  (16)으로부터,

$\epsilon + f = U_1 \alpha + U_2 U_2^* (\epsilon + f) = U_1 \alpha + U_2 \beta$  이다. ■

(14)-(15)로부터 측정 행렬  $H$ 에 대하여  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 각각 range space와 null space 컴포넌트(component)들이다. 즉,  $\epsilon + f = U_1 \alpha + U_2 \beta$ 이 의미하는 것은  $\epsilon + f$ 이 측정 행렬  $H$ 의 range space 컴포넌트와 null space 컴포넌트의 합으로 표현될 수 있다는 것이다. 여기서  $U_1, U_2$  그리고  $\beta$ 는 알고있는 값이고  $\alpha$ 는  $x$ 값을 모르기 때문에 알 수 없는 값이다. 그러므로 만약에  $\alpha$ 값을 정확히 알 수 있다면  $\epsilon + f$ 값을 정확하게 구할 수 있다는 것을 의미하는데 이는 실제로 불가능한 것이다. 일반적으로  $x$ 에 대한 최소 자승 추정자는 (14)에서  $\alpha \equiv 0$ 일 경우로서 다음과 같다. 즉,

$$\hat{x}_{LS} = \Sigma_1^{-1} U_1^* m. \text{ 그리고 } \hat{f} = (\epsilon + f)_{\text{null}} = U_2 \beta \text{ 이라고 하자.}$$

여기서  $(\epsilon + f)_{\text{null}}$ 은 측정 행렬  $H$ 에 대한  $\epsilon + f$ 의 영 공간 컴포넌트이다. 영 공간 컴포넌트  $\hat{f}$ 은 아래와 같다.

$$\hat{f} = U_2 \beta = U_2 U_2^* m = U_2 U_2^* (\epsilon + f) \tag{17}$$

(15)에서  $p = \beta = U_2^* m$ 은 일반적으로 FDI 기법들에서 사용되는 패러티 벡터로써 측정 행렬  $H$ 에 orthogonal 하다는 것 외에 다른 물리적 의미는 없다. 하지만 (17)의 패러티 벡터  $p = \hat{f} = U_2 U_2^* m$ 은 측정 행렬  $H$ 에 대한 고장 신호와 측정 잡음의 영 공간 컴포넌트라는 의미를 포함하고 있다. 본 논문에서는  $p = U_2 U_2^* m$ 을 패러티 벡터로 사용한다.

**2. SVD를 이용한 FDI 기법**

본 절에서는 단일 고장에 대한 FDI 기법으로 SVD 기법을 제안한다.

**정의1 :**  $col_i(A)$ 는 행렬  $A$ 의  $i$ 번째 행을 나타낸다고 하자. 그러면 다음과 같이  $n$ 개의 벡터를 정의할 수 있다.

$$\bar{f}_i = col_i(U_2 U_2^*), i = \{1, \dots, n\}$$

정의1로부터,  $\bar{f}_i$ 는  $i$ 번째 센서 고장 신호의 영 공간 컴포넌트를 나타낸다. SVD를 이용한 FDI 알고리즘은 다음과

같다.

1) SVD 알고리즘을 이용하여 측정 행렬 H로부터 행렬  $U_2$ 를 구하고  $p = U_2 U_2^* m$ 을 계산한다. 여기서 m은 센서 측정치이다.

2) 다음을 만족하는 index k를 구한다.

$$k = \arg \max_i p^T \bar{f}_i$$

$$\text{여기서 } p = U_2 U_2^* m, \bar{f}_i = \text{col}_i(U_2 U_2^*),$$

$i = \{1, \dots, n\}$  이다.

3) 2)에서 구한 k에 대해서 아래의 decision을 수행한다.

$$p^T \bar{f}_k \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ Th \\ H_0 \end{matrix}$$

여기서  $H_1$ 은 고장이 발생하였다는 가설,  $H_0$ 는 고장이 발생하지 않았다는 가설, 그리고  $Th$ 는 문턱값으로서 패러티 벡터 p는 가우시안 분포를 가지므로 false alarm 확률에 의해서 문턱값  $Th$ 는 결정된다. 그리고 절차 2)에서 index k가 의미하는 것은 만약에 고장이 k번째 센서에서 발생하였을 경우 패러티 벡터 p의 값은  $\text{col}_k(U_2 U_2^*)$  방향으로 값을 갖기 때문에 내적  $p^T \bar{f}_k$  값이 가장 크게 된다.

**IV. SVD를 이용한 FDI 기법의 성능 분석**

여러 FDI 기법들의 성능을 비교 분석하는 방법으로 두 가지 측면으로 나누어 생각해 볼 수 있다. 첫 번째는 고장 검출 및 분리 성능 측면(FDI 성능 측면)이고 두 번째는 항법 성능 측면(GN&C 성능 측면)이다. 기존의 연구 결과들을 살펴보면 FDI 기법의 성능을 분석하는데 있어서 FDI 성능 측면만을 고려하고 있는데 반하여 본 논문에서는 FDI 성능 측면뿐만 아니라 GN&C 성능 측면에서도 FDI 기법을 분석하고자 한다. 또한 본 논문에서는 6개의 센서를 정12면체에 배치[4]하였을 경우를 고려하였다.

**1. FDI 측면에서의 성능 분석**

FDI 성능 측면에서 FDI 기법을 비교 분석하는 방법으로는 fault detection 확률, correct isolation 확률, 그리고 wrong isolation 확률을 분석하는 것이다. 여기서 fault detection 확률, miss detection 확률, correct isolation 확률, wrong isolation 확률들을 정의하면 다음과 같다.

먼저 n개의 중복 센서 중 i번째 센서에 바이어스 형태의 고장이 발생했다고 가정하자. 그리고 FDI 기법을 N번 수행했을 경우  $N_D$ 번 고장이 발생했다고 검출했고 이 중 i번째 센서를 분리할 경우가  $N_c$ 번이고  $j (\neq i)$ 번째 센서를 분리할 경우는  $N_w$ 일 경우 fault detection, miss detection, correct isolation, 그리고 wrong isolation 확률은 각각 다음과 같다.

$$\text{Fault Detection 확률(PFD)} = \frac{N_D}{N}$$

$$\text{Miss Detection 확률(PMD)} = 1 - \frac{N_D}{N}$$

$$\text{Correct Isolation 확률(PCI)} = \frac{N_c}{N}$$

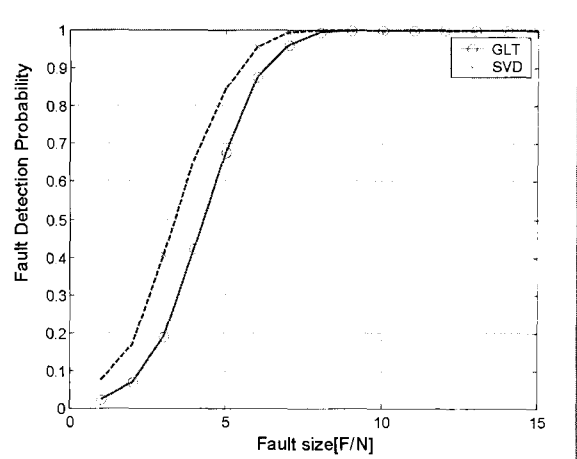


그림 1. 고장 신호 크기에 따른 fault detection 확률.

Fig. 1. Fault detection probability with respect to fault size.

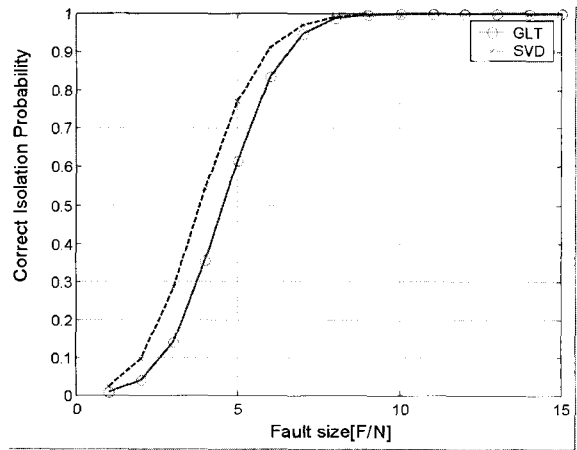


그림 2. 고장 신호 크기에 따른 correct isolation 확률.

Fig. 2. Correct isolation probability with respect to fault size.

$$\text{Wrong Isolation 확률(PWI)} = \frac{N_w}{N}$$

위 식들로부터 PFD=PCI+PWI 임을 알 수 있다.

본 논문에서 제안한 SVD 기법의 성능을 분석하기 위해서 가장 일반적인 FDI 기법인 GLT 기법에 대하여 몬테칼로 시뮬레이션을 수행하여 fault detection 확률, correct isolation 확률, wrong isolation 확률을 비교 분석하였다. 여기서 두 가지 방법에서 사용된 문턱값은 false alarm이 0.1 일 경우에 결정되는 문턱값을 이용하였고  $1\sigma - 15\sigma$  의 고장 크기에 대해서 3,000번의 몬테칼로 시뮬레이션을 수행하였다. 여기서  $\sigma$ 는 측정 잡음의 표준 편차( $E[\varepsilon^T \varepsilon] = \sigma^2 I_n$ )이다.

먼저 그림 1은 고장 신호 크기에 따른 fault detection 확률을 나타낸 것으로 GLT 기법에 비해서 SVD 기법의 성능이 우수함을 알 수 있다.

그림 2는 고장 신호 크기에 따른 correct isolation 확률을 나타낸 것으로 전체적으로 GLT 기법보다 SVD 기법의 성

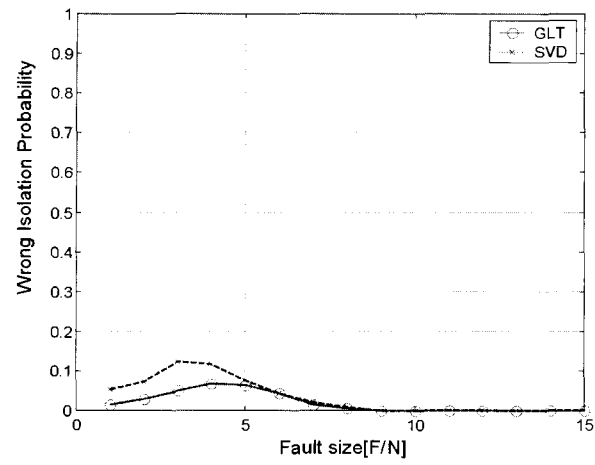


그림 3. 고장 신호 크기에 따른 wrong isolation 확률.  
Fig. 3. Wrong isolation probability with respect to fault size.

능이 우수함을 알 수 있다. 그리고 고장 신호 크기가  $6\sigma$  이상일 경우에 correct isolation 확률이 90% 이상이 됨을 알 수 있다. 그림 3은 고장 신호 크기에 따른 wrong isolation 확률을 나타낸 것으로 전체적으로 GLT 기법이 더 우수함을 알 수 있다. 특히 고장신호 크기가  $3\sigma$ 일 경우 약 7% 정도의 성능 차이를 보이고 있다.

2. GN&C 측면에서의 성능 분석

4.1절에서는 GLT 기법과 SVD 기법을 FDI 성능 측면에서 비교하였다. 비교 결과 그림 1-3로부터 detection 성능과 correct isolation 성능 면에서는 SVD기법이 우수하나 wrong isolation 성능 면에서는 GLT 기법이 우수함을 알 수 있었다. 여기서 센서 측정 (1)에서  $x(t)$ 에 대한 최소 자승해 ( $\hat{x}(t)$ )의 추정 오차 값은 correct isolation 확률 값이 클수록 작아지며 wrong isolation 확률 값은 작을수록 작아지므로 그림1-3과 같은 결과들을 이용하여 항법 성능 측면에서 두 기법의 성능을 비교하는 것이 필요함을 알 수 있다. 본 절에서는 이 두 기법에 대하여 다음과 같이 새로운 성능 지수를 제안하여 GN&C 성능 측면에서 비교 분석하였다.

중복 하드웨어를 사용하는 경우 FDI 기법은 여분의 센서를 이용하여 parity 방정식을 만들어 FDI를 수행하지만 또한 이러한 여분의 센서들은  $x(t)$ 에 대한 추정 성능을 향상시킨다. 측정식(1)에 대한 최소자승법의 해( $\hat{x}(t)$ )는 다음과 같다.

$$\hat{x}(t) = (H^T H)^{-1} H^T m(t) \tag{18}$$

본 절에서는 단일 고장이 발생하였을 경우 고장 신호  $f(t)$ 의 크기에 따른 (18)의 추정자의 추정 성능을 구한 후 correct isolation 확률과 wrong isolation 확률을 결합하여 항법 성능 지수를 결정한다. 먼저  $i$ 번째 센서에서 고장이 발생하였다고 가정하자. 그러면 (18)와 같은 추정자에 대하여 다음과 같은 세 가지 경우에 대한 항법 성능과 FDI 성능을 결합하여 고려할 수 있다.

**Case1:**  $i$ 번째 고장 센서의 측정치를 포함한  $n$ 개의 측정치

를 이용할 경우

**Case2:**  $i$ 번째 고장 센서의 측정치를 제거하여  $n-1$ 개의 측정치를 이용할 경우

**Case3:**  $j$  ( $\neq i$ )번째 센서의 측정치를 제거하여  $n-1$ 개의 측정치를 이용할 경우

1)  $i$ 번째 고장 센서의 측정치를 포함하는 경우

이 경우에는 고장이 발생하였음에도 불구하고 고장을 검출하지 못하였을 경우로서 FDI 성능 측면에서 miss detection 확률과 관련되는 경우이다.

측정식(1)에서  $x(t)$ ,  $f(t)$  그리고  $\epsilon(t)$ 는 서로 상관관계 (correlation)가 없는 것으로 가정하면  $i$ 번째 고장 센서의 측정치를 포함하여 (18)의 추정자를 구하였을 경우를  $\hat{x}_{+i}(t)$ 라 하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{+i}(t) &= (H^T H)^{-1} H^T m(t) \\ &= x(t) + (H^T H)^{-1} H^T (V_{Fi} f(t) + \epsilon(t)) \end{aligned} \tag{19}$$

여기서  $V_{Fi} = \text{diag}([0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0])$ 로서  $i \times i$ 번째 원소의 값만 1인 행렬이다. 따라서 (19)의 추정자에 대한 추정 오차 공분산 ( $C_{+i}$ )을 구하면 (20)과 같다.

$$\begin{aligned} C_{+i}(t) &\equiv E[(\hat{x}_{+i}(t) - x(t))(\hat{x}_{+i}(t) - x(t))^T] \\ &= f(t)^2 (H^T H)^{-1} H^T V_{Fi} V_{Fi}^T H (H^T H)^{-1} + \sigma^2 (H^T H)^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

여기서  $H^T V_{Fi} = h_i$ 이므로 공분산  $C_{+i}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$C_{+i}(t) = f(t)^2 (H^T H)^{-1} h_i h_i^T (H^T H)^{-1} + \sigma^2 (H^T H)^{-1} \tag{21}$$

2)  $i$ 번째 고장 센서의 측정치를 분리시켰을 경우(correct isolation)

$i$ 번째 고장 센서를 분리시켜  $n-1$ 개의 센서 측정치를 이용하여  $x(t)$ 에 대한 추정자( $\hat{x}_{-i}(t)$ )를 구하면 다음과 같다.

$$\hat{x}_{-i}(t) = (H^T W_i H)^{-1} H^T W_i m(t) \tag{22}$$

여기서  $W_i$ 는  $n \times n$ 행렬로써  $i$ 번째 대각 원소만 0이고 나머지 대각 원소는 1인 대각 행렬이다.

그리고 이 경우의 추정 오차의 공분산( $C_{-i}(t)$ )은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} C_{-i}(t) &\equiv E[(\hat{x}_{-i}(t) - x(t))(\hat{x}_{-i}(t) - x(t))^T] \\ &= \sigma^2 (H^T W_i H)^{-1} \end{aligned} \tag{23}$$

이 경우는 고장을 정확히 검출하고 또한 정확히 고장 센서를 분리시킨 경우로서 correct isolation 확률과 관련되는 경우이다. 따라서 이 경우의 항법 성능은 (23)과 같다.

3)  $j$ 번째 센서의 측정치를 분리시켰을 경우(wrong isolation)

정상 센서인  $j$  ( $\neq i$ )번째 센서를 분리시켜 고장 센서 측정치를 포함하여  $n-1$ 개의 센서 측정치를 이용하였을 경우의 추정 오차 공분산( $C_{-j}(t)$ )은 다음과 같이 구하여진다.

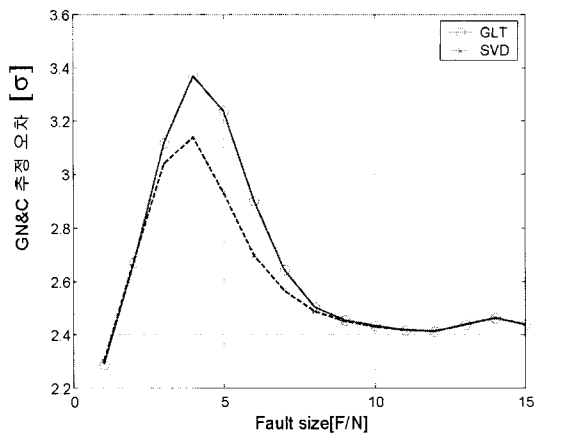


그림 4. GLT와 SVD 기법의 항법 성능 비교.  
Fig. 4. Performance analysis of GLT and SVD.

$$C_{-i}(t) = \sigma^2(H^T H)^{-1} + \frac{\sigma^2}{\|v_i\|^2} (H^T H)^{-1} h_i h_i^T (H^T H)^{-1} + f(t)^2 (H^T W_i H)^{-1} h_i h_i^T (H^T W_i H)^{-1} \quad (24)$$

이 경우는 고장을 검출은 하였으나 고장이 발생하지 않은 센서를 분리시킨 경우로서 wrong isolation에 해당하는 경우로서 이 경우의 항법 성능은 (24)와 같다.

위에서 고려한 세 가지 경우의 항법 성능과 FDI 성능을 이용하여 다음과 같이 평균 추정 오차 공분산을 정의할 수 있다.

$$\bar{C}(t) \equiv m_D(t)C_{+i}(t) + (1 - m_D(t) - w_1(t))C_{-i}(t) + w_1(t)C_{-j}(t) \quad (25)$$

여기서  $m_D(t)$ 는 miss detection 확률이고  $w_1(t)$ 는 wrong isolation 확률이며  $1 - m_D(t) - w_1(t)$ 는 correct isolation 확률이다.

(25)의  $\bar{C}$ 는 FDI 성능에 기반한 평균 공분산 행렬을 의미한다. (25)로부터 x, y, z축 각각에 대한 추정 오차의 표준편차의 합을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{S} = \sqrt{\bar{C}(1,1)} + \sqrt{\bar{C}(2,2)} + \sqrt{\bar{C}(3,3)} \quad (26)$$

(26)을 이용하여 GLT 기법과 SVD 기법의 성능을 비교 분석하기 위하여 그림 1,2의 결과와 (21),(23),(24)의 공분산 결과를 이용하였다. 그림 4는 고장 신호 크기에 따른 (26)의 결과를 나타낸 것으로 전체적으로 SVD 기법의 성능이 우수함을 알 수 있다. 여기서 고장 신호의 크기가 4σ일 경우에 GLT 기법의 경우는 약 3.4σ, SVD 기법의 경우는 약 3.1σ의 값으로 다른 고장 신호의 크기에 비해서 큰 값을 보이고 있는데 이런 결과는 고장 신호가 4σ보다 작을 경우에는 고장 신호의 크기가 작기 때문에 miss detection 확률과 wrong isolation 확률의 영향이 항법 성능에 크게 미치지 않기 때문이며 고장 신호가 4σ보다 클 경우에는 고장 신호가 크기 때문에 패러티 벡터에 측정 잡음의 영향이 줄어들게 되므로 correct isolation 확률이 커지기 때문에 고장 신호가 항법 성능에 영향을 크게 미치지 않기 때문이다.

### V. 결론

본 논문에서는 중복 센서를 사용할 경우 특이치 분해를 이용한 센서 고장 검출 및 분리 기법(SVD 기법)을 제안하였다. 이러한 SVD 기법은 기존의 FDI 기법들에 비해서 알고리즘 구조가 단순하다는 장점이 있다. 또한 기존의 FDI 기법에서는 패러티 벡터 p가 측정 행렬 H에 orthogonal하다는 것 외에 다른 물리적 의미는 없으나 SVD 기법에서는 패러티 벡터 p가 측정 행렬 H에 대한 고장 신호와 측정 잡음의 영 공간 성분(component)라는 의미를 포함하고 있다. 또한 본 논문에서는 제안한 SVD 기법의 성능을 분석하기 위해서 기존의 방법인 GLT 기법과 FDI 성능을 비교 분석했을 뿐만 아니라 GN&C 성능 측면에서도 GLT 기법과 비교 분석을 통하여 SVD 기법의 성능을 분석하였다. 기존의 연구에서는 FDI 기법의 성능 분석이 주로 FDI 성능 측면에서만 이루어져왔으나 본 논문에서는 FDI 성능과 항법 성능을 결합하여 새로운 GN&C 성능 평가 기준을 제안하였다. SVD 기법의 성능 분석 결과 첫 번째 FDI 성능 측면에서는 fault detection과 correct isolation 성능은 SVD 기법이 우수하였으나 wrong isolation 성능은 GLT 기법이 조금 더 우수하였다. 두 번째로 GN&C 성능에서는 SVD 기법의 성능이 GLT 기법 성능보다 우수하였으며 이러한 두 가지 측면에서의 성능 비교 분석을 통하여 본 논문에서 제안한 SVD 기법이 우수한 기법임을 알 수 있다.

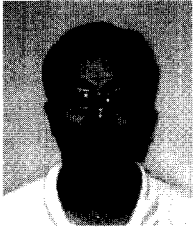
### 참고문헌

- [1] A. Ray, and R. Luck, "An introduction to sensor signal validation in redundant measurement systems", *IEEE Control Systems, Magazine*, 11(2), pp. 44-49, 1991.
- [2] M. A. Sturza, "Navigation system integrity monitoring using redundant measurements," *Navigation:Journal of The Institute of Navigation*, vol. 35, no. 4, pp. 69-87, Winter, 1988-89.
- [3] R. J. Patton, P. M. Frank and R. N. Clark, *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic System*, Springer Verlag, 1st edition May 15, 2000.
- [4] J. P. Gilmore and R. A. McKern, "A redundant strapdown inertial reference unite (SIRU)," *Journal of Spacecraft*. vol. 9, no. 1, July 1972.
- [5] R. G. Brown, "Solution of the two-failure GPS RAIM problem under worst-case bias conditions : parity space approach", *Journal of the ION*, vol. 44, no. 4, Winter 1997-1998, pp. 425-431, 1998.
- [6] K. C. Daly, Eliezer Gai and James V. Harrison, "Generalized likelihood test for FDI in redundant sensor configurations," *Journal of Guidance and Control*. vol. 2, no. 1, Jan-Feb 1979.
- [7] T.-T. Chien and M. B. Adams, "A sequential failure detection technique and its application," *IEEE Transactions on Automatic Control*. October 1976.
- [8] X. J. Zhang, *Auxiliary Signal Design in Fault Detection and Diagnosis*, Springer-Verlag, 1989.

- [9] A. Ray, "Technical briefs-sequential testing for fault detection in multiply-redundant systems," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 111, pp. 329-332, June, 1989.

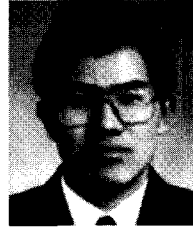
- [10] P. J. G. Teunissen, *Testing theory; an introduction*, Delft University Press.

- [11] G. H. Golub, C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins Univ. Press, pp. 242-245, 1996.



**양철관**

1972년 5월 15일생, 1996년 중앙대 제어계측학과 졸업(학사). 1998년 동대학원 졸업(석사). 2003년 동대학 박사 현재 중앙대 전자전기공학부 Post-doc 과정, 관심 분야는 관성항법시스템, GPS, 건설 필터링, 고장검출 및 분리 기법 등.



**심덕선**

1984년 서울대학교 제어계측공학과 졸업(공학사), 1986년 동대학원 졸업(공학석사), 1993년 University of Michigan 항공우주공학과 졸업(공학박사), 1994년 1월~1995년 1월 University of Michigan 전기 및 컴퓨터 공학과 Post-doc, 2001년 7월~2002년 7월 Pennsylvania State University 전기공학과 교환교수, 1995년 3월~현재, 중앙대학교 전자전기공학부 조교수, 부교수, 교수, 관심분야는 건설 제어, 관성항법 시스템, GPS, 고장검출 및 분리 등.