

## 계수의 특성비에 대한 선형계의 파라미터적 감도해석(II) : K-다항식의 경우

### The Parametric Sensitivity Analyses of Linear System Relative to the Characteristic Ratios of Coefficient(II) : K-Polynomial Case

김 근 식\*, 김 영 철

(Keunsik Kim, and Youngchol Kim)

**Abstract :** Previously it has been shown that the all pole systems resulting good time responses can be characterized by so called K-polynomial. The polynomial is defined in terms of the principal characteristic ratio  $\alpha_1$  and the generalized time constant  $\tau$ . In this paper, Part II presents several sensitivity analyses of such systems with respect to  $\alpha_1$  and  $\tau$  changes. We first deal with the root sensitivity to the perturbation of  $\alpha_1$ . By way of determining the unnormalized function sensitivity, both time response sensitivity and frequency response sensitivity are derived. Finally, the root sensitivity relative to  $\tau$  change is also analyzed. These results provide some useful insight and background theory when we select  $\alpha_1$  and  $\tau$  to compose a reference model of which denominator is a K-polynomial, which is illustrated by examples.

**Keyword :** sensitivity, time response, k-polynomial, generalized time constant

#### I. 서론

선형계의 고전적 제어기 설계방식으로 가장 흔히 사용되는 것 중 하나인 모델정합방식(model matching method)[2]에서는 설계 요구 성능을 만족시키는 기준모델을 선택하는 것이 중요하다. 그런데 설계규격이 오버슈트(overshoot)나 정착시간 같은 시간응답 성능으로 주어지는 경우에는 3차 이하의 저차계가 아니면 이를 체계적으로 구할 수 있는 방법을 찾지 못하고 있다. 최근에 다시 과도응답 설계조건을 위한 제어기 설계문제와 플랜트의 극/영점 위치에 따른 시간응답의 본질적인 제약조건 등에 대한 많은 관심이 일어나고 있다[3-5]. 시스템의 과도응답 성능을 고려하기 위한 전혀 다른 방법으로서, 특성다항식의 계수 공간에서 계수와 시간응답특성의 관계를 이용하는 접근방법이 1960년대 초 Naslin[6]에 의해 처음 시도되었다. 그는 독창적으로 특성다항식의 계수로 정의된 특성비(characteristic ratio)와 펄세턴스(pulsatance)를 도입하여, 비록 경험적인 결과이지만 이들 특성 파라미터가 시간응답의 제동과 응답속도에 밀접하게 관련 있다는 사실을 제시하였다. 그러나 상태공간이론의 출현으로 학계의 주목을 받지 못하였다. 1990년대에 이르러 Manabe[7]는 특성비에 근거한 특성다항식 계수형상화(coefficient shaping) 기법인 소위 계수도법(coefficient diagram method: CDM)을 창안하였다. 많은 실제 적용 예를 통해 CDM이 시간응답성능을 고려한 저차 제어기 설계 문

제에 아주 유용함을 보였다. 그러나 이러한 파라미터적 설계방법은 Kim 등[1]에 의해 보다 더 해석적으로 접근되기 시작하였다. Kim 등은 주펄세턴스(principal pulsatance)가 일반화시정수(generalized time constant)  $\tau$ 의 성질을 가지며, 특성비와 독립적으로 선택되어 임의로 응답속도를 조정할 수 있음을 보였다. 또한, Butterworth filter의 성질을 확장하여 안정하고 원하는 제동특성을 갖는 목표특성다항식의 구성 방법을 제시하였는데, 단지 주특성비(principal characteristic ratio)  $\alpha_1$ 과  $\tau$ 만을 사용한다. 이렇게 구성되는 다항식을 여기서는 K-다항식(K-polynomial)이라고 부르기로 한다. Kim 등은 모델정합에 의한 제어기를 설계할 때 페루프 특성 다항식을 K-다항식으로 정합시키는 소위 특성비지정법(characteristic ratio assignment: CRA)을 제안하였다[1,8-12]. 그러나 특성비와 제동특성, 강인성 등과의 명확한 관계가 아직 밝혀지지 않고 있다. 예를 들어, 어떤 n차 전극시스템(all pole system : APS)의 분모다항식을 n개의 특성파라미터( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \tau$ )로 나타내는 경우, 주어진 파라미터들로부터 스텝응답의 오버슈트나 정착시간 등을 알 수 있는가 하는 문제와 역으로, 원하는 오버슈트 크기와 정착시간을 갖는  $\alpha_i, \tau$ 를 선택할 수 있는가 하는 문제이다. 또한 개개의 특성비의 크기가 시스템 응답이나 안정도에 어떤 관계가 있는가 하는 것도 중요한 문제이다. 이 문제에 대한 부분적인 접근방법으로 특성비에 대한 선형계의 여러 가지 감도해석을 다루었는데, 범위가 넓어서 크게 두 부분으로 나누었다. Part I [14]에서는 특성비가 독립적으로 섭동을 갖는다는 가정 아래, 각각의 특성비 섭동에 대해 n차 다항식의 근이 어떻게 영향을 받는지를 해석하였으며, 근감도함수의 스텝응답을 이용해 특성근의 궤적을 추정할 수 있음을 보였다. 또한 유리함수에 의해 감도함수를 구함으로써

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2003. 6. 18. 채택확정 : 2003. 12. 30.

김근식 : 대전대학 인터넷정보계열(kskim@dcc.ac.kr)

김영철 : 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부

(yckim@cbucc.chungbuk.ac.kr)

※ 본 연구는 한국과학재단 목격기초연구(과제번호 : R01-2003-000-11738-0) 지원으로 수행하였음.

이주 쉽게 시간응답 감도와 주파수응답 감도를 해석하였다. 이를 통해 스텝응답에 지배적인 영향을 갖는 특성비는 단지  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  임을 주장하였다. 이 결과는 고차 플랜트의 저차제어기를 설계할 때 일어나는 모델 차수 정합문제를 피할 수 있기 때문에 효과적으로 이용될 수 있다[9-12]. 본 논문에서는 CRA 설계 시 적용되는 K-다항식에 대한 감도 해석을 다루고자 한다. 목표시스템의 분모다항식을 K-다항식에 의해 구성하는 경우, 2장에서 정의하는 바와 같이 다항식이 단지  $\alpha_1$  과  $\tau$  만의 함수이기 때문에 Part I에서 다른 각 특성비가 독립적으로 섭동하는 경우와는 다른 감도특성을 나타나게 된다. 먼저,  $\alpha_1$  섭동에 따른 K-다항식의 근 감도를 구하고, 함수감도를 통해 선형계의 시간응답 감도와 주파수 응답 감도를 해석하고자 한다. 그리고 일반화시정수  $\tau$ 의 섭동에 대한 K-다항식의 근감도 해석도 다룬다. 각 경우에 적절한 예제를 포함하여 물리적 의미와 타당성을 보인다.

**II. 정의 및 문제설정**

**1. 특성파라미터 및 감도함수 정의**

본 절에서는 주요 특성파라미터를 정의한다. 대부분 Part I [14]에서 정의한 것을 이용하기로 한다. 양의 실수 계수를 갖는 다음 다항식을 고려하자.

$$\delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (a_i > 0) \quad (1)$$

다항식 계수의 특성비  $\alpha_j$ 와 일반화시정수  $\tau$ 는 (2), (3)과 같이 각각 정의 한다.

$$\alpha_1 := \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \alpha_2 := \frac{a_2^2}{a_1 a_3}, \dots, \alpha_{n-1} := \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \quad (2)$$

$$\tau := \frac{a_1}{a_0} \quad (3)$$

여기서,  $\alpha_1 = \alpha$  를 주특성비로 부르기로 한다. 반면 (2)와 (3)를 이용하여 다항식  $\delta(s)$ 의 모든 계수를 다음과 같이  $\alpha_j$  와  $\tau$ 로 표현할 수 있다.

$$a_1 = a_0 \tau \quad (4)$$

$$a_j = \frac{a_0 \tau^j}{\alpha_{j-1} \alpha_{j-2}^2 \alpha_{j-3}^3 \dots \alpha_2^{j-2} \alpha_1^{j-1}}, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

Kim 등[1]은 안정도가 보장되며 원하는 제동특성을 갖는 APS의 특성다항식  $\delta(s)$ 의 계수를 다음 두 조건을 만족하는 특성비  $\alpha_k$ 로 구성하는 방식을 제시하였다.

- (i)  $\alpha_1 \geq 2$
- (ii)  $\alpha_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{n}) + \sin(\frac{\pi}{n})}{2\sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot \alpha_1 = \Gamma_k \cdot \alpha_1,$   
 $k = 2, 3, \dots, n - 1. \quad (6)$

임의의 양의 상수  $a_0, \tau$ 에 대해 (5)와 (6)을 이용하여 (1)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta(s, \alpha_1) &= a_0 \left( 1 + \tau s + \frac{\tau^2}{\alpha_1} s^2 + \frac{\tau^3}{\Gamma_2 \alpha_1^3} s^3 + \frac{\tau^4}{\Gamma_3 \Gamma_2^2 \alpha_1^6} s^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^5}{\Gamma_4 \Gamma_3^2 \Gamma_2^3 \alpha_1^{10}} s^5 + \dots + \left( \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\Gamma_{n-i} \alpha_1^i} \right) \tau^n s^n \right) \quad (7) \\ &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + \dots + a_n s^n \end{aligned}$$

(7)과 같이 다항식의 계수가 (6)에 의해  $\alpha_1$  과  $\tau$  만으로 표현한 다항식을 K-다항식이라 부르기로 한다. 이하 본 논문에서  $\delta(s)$ 는 K-다항식을 나타내는 것으로 한다.

선형계 전달함수  $T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)}$ 를 고려하자. Part I [14] 2.1절에서 정의한 감도에서  $\alpha_k$ 를  $\alpha_1$ 으로 바꾸면 주특성비 섭동에 대한 K-다항식의 근감도, 함수감도가 아래와 같이 정의된다.

(i)  $\delta(s)$ 에서, 임의의  $j$ 번째 계수 섭동에 대한  $l$  번째 근 ( $p_l$ )의 감도와, 주특성비  $\alpha_1$ 의 섭동에 대한 근감도 :

$$(i) \quad \theta_{lj} := \frac{\partial p_l}{\partial a_j}, \quad (ii) \quad US_{\alpha_1}^{p_l} := \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1 / \alpha_1}. \quad (8)$$

(ii)  $T(s)$ 의 분모다항식  $\delta(s)$ 에서,  $j$ 번째 계수 혹은 주특성비가 변할 때,  $T(s)$ 의 계수와 주특성비 섭동에 대한 비규준화함수감도(unnormalized function sensitivity) :

$$(i) \quad US_{a_j}^T := \frac{\partial T(s)}{\partial a_j / a_j}, \quad (ii) \quad US_{\alpha_1}^T := \frac{\partial T(s)}{\partial \alpha_1 / \alpha_1}. \quad (9)$$

(iii) 함수감도에 입력  $R(s)$ 를 인가한 출력함수감도 :

$$Y_{a_j}^s(s) := US_{a_j}^T R(s) \quad \text{또는} \quad Y_{\alpha_1}^s(s) := US_{\alpha_1}^T R(s) \quad (10)$$

(iv) 주특성비 섭동에 대한  $T(s)$ 의 규준화함수감도(normalized sensitivity function) :

$$S_{\alpha_1}^{T(s)} := \frac{\partial T(s) / T(s)}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} = - \frac{\alpha_1 \delta'(s)}{\delta(s)}. \quad (11)$$

여기서  $\delta'(s) = \frac{\partial \delta(s)}{\partial \alpha_1}$  이다.

(v) (11)에  $s = j\omega$ 를 대입하여 표현한 주파수응답감도 :

$$S_{\alpha_1}^{T(j\omega)} := S_{\alpha_1}^{|T(j\omega)|} + j \frac{\partial \arg T(j\omega)}{\partial \alpha_1 / \alpha_1}. \quad (12)$$

(vi) 주특성비 섭동에 대한 계수감도 :

$$S_{\alpha_1}^{a_i} := \frac{\partial a_i / a_i}{\partial \alpha_1 / \alpha_1}. \quad (13)$$

(vii) 일반화시정수  $\tau$ 의 섭동에 대한 근감도 :

$$US_{\tau}^{p_l} := \frac{\partial p_l}{\partial \tau / \tau}. \quad (14)$$

2. 문제의 설정

본 논문에서 계수적 감도해석의 대상은  $T(s)$ 의 분모다항식이 K-다항식으로 구성된 경우로 한정한다. 서론에서 언급한 바와 같이 K-다항식을 이용하면 모델정합에 의한 제어기를 설계할 때 시간응답 설계규격을 고려하기가 용이하다. 여기서 임의의 차수 목표다항식을 단지  $\alpha_1$ 과  $\tau$  만으로 합성할 수 있기 때문이다. 먼저, (8)에 의해 주특성비  $\alpha_1$ 에 대한 K-다항식의 근감도를 구하고, (9)와 (10)의 함수감도를 이용한 시간응답감도를 해석한다. 그리고 (11)과 (12)를 이용하여 주파수응답 감도를 다룬다. 특히 함수감도를 이용하여 주특성비와 스텝응답과의 관계를 제시한다. 또한 일반화시정수  $\tau$ 에 대한 근감도를 다루며 일반화시정수의 근감도 설정에 대한 해석 결과를 제시한다.

III. 감도해석

본 장은 전달함수  $T(s)$ 의 분모다항식이 K-다항식으로 이루어진 경우에 주특성비에 대한 몇 가지 감도를 고찰한다. K-다항식 계수는 오직 주특성비  $\alpha_1$ 에만 종속되어 있다.  $\alpha_1$ 의 변화가 근과 시간응답 그리고 주파수응답에 미치는 영향을 감도측면에서 분석한다. 여기서의 해석방법은 Part I [14]에서 기술한 특성비가 독립적으로 섭동할 경우의 감도 해석과 유사하다. 먼저, 주 정리를 유도하는데 이용되는 보조정리를 기술한다.

**보조정리 1 :** 주특성비  $\alpha_1$ 의 변동에 대한 K-다항식 계수( $a_j, j = 2, 3, \dots, n$ )의 계수감도  $S_{\alpha_1}^{a_j}$ 는 다음과 같다.

$$S_{\alpha_1}^{a_j} = - \sum_{k=1}^j (k-1) = - \frac{j(j-1)}{2}$$

**증명:** (7)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$a_j = \prod_{i=1}^{j-1} \frac{a_0 \tau^j}{\Gamma_{n-i}^i \alpha_1^i} = \frac{a_0 \tau^j}{\prod_{i=1}^{j-1} \Gamma_{n-i}^i} \cdot \frac{1}{\alpha_1^{\eta_j}} \quad (15)$$

여기서,

$$\eta_j := \sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{k=1}^j (k-1) = \frac{j(j-1)}{2}$$

(15)를 (13)에 적용하면 쉽게 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} S_{\alpha_1}^{a_j} &:= \frac{\partial a_j / a_j}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} = -\eta_j = -\sum_{k=1}^j (k-1) \\ &= -\frac{j(j-1)}{2} \end{aligned}$$

1. 근감도(root sensitivity)

본 절에서는 주특성비  $\alpha_1$ 의 섭동에 따른 근의 감도를 해석한다. 이를 유도하기 위해 다항식의 계수에 대한 근감도인 다음 보조정리 2를 인용한다.

**보조정리 2** [14] :  $n$ 차 다항식에서  $j$ 번째 계수  $a_j$ 의 섭동에 대한 근( $p_l, l = 1, 2, \dots, n$ )의 원시감도함수  $\Theta_{lj}$ 는 다음 성질을 갖는다.

(i)

$$\Theta_{lj} = \frac{\partial p_l}{\partial a_j} \approx - \frac{p_l^j}{\sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1} (m+1) p_l^m} = - \frac{p_l^j}{\delta'(p_l)},$$

(ii) 만약  $|p_l| \geq 1$ 이면,

$$|\Theta_{l1}| \leq |\Theta_{l2}| \leq \dots \leq |\Theta_{l(n-1)}| \leq |\Theta_{ln}|,$$

여기서  $l$ 은  $1, 2, \dots, n$ 의 임의의 값이다.

보조정리 1과 2를 이용하여 주특성비의 변화에 대한 근의 감도를 구해보자. 특성비가 각각 독립인 일반적인 다항식의 경우에는 (5)에서 알 수 있듯이 특정 특성비  $\alpha_k$ 의 변동에 대하여 다항식의 계수 중 일부 즉,  $[a_{k+1}, \dots, a_n]$ 만 변동을 일으킨다. K-다항식의 경우에는 주특성비  $\alpha_1$ 이 변동하면  $a_0, a_1$ 을 제외한 나머지 계수가 변하게 된다. 따라서 Part I [14]에서 제시한 특성비에 대한 근감도와 여기서의 K-다항식의 근감도와는 다를 수밖에 없다. 정리 1은 주특성비 섭동에 대한 K-다항식의 근감도를 설명한다.

**정리 1 :** 주특성비  $\alpha_1$ 의 섭동에 대해  $n$ 차 K-다항식  $\delta(s)$ 의 근의 감도와 근의 섭동된 위치( $p_l^s$ )는 다음과 같다.

(i) 근감도 :

$$\begin{aligned} US_{\alpha_1}^{p_l^s} &= \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} = - \sum_{m=1}^n \Theta_{lm} a_m \sum_{k=1}^m (k-1) \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{m(m-1)}{2} \frac{a_m p_l^m}{\delta'(p_l)} \end{aligned}$$

(ii) 근의 섭동된 위치 :

$$p_l^s = p_l^o + \Delta p_l \approx p_l^o + \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} US_{\alpha_1}^{p_l^o}$$

여기서  $p_l^o$ 는  $l$  번째 근의 공칭위치이다.

**증명 :** (i)  $\delta(s)$ 의 근  $p_l = p_l(a_1, \dots, a_n)$ 이 연속해서 편미분  $\frac{\partial p_l}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial p_l}{\partial a_n}$ 이 가능하고, 임의의 계수  $a_j$ 는  $\alpha_1$ 의 함수이므로,  $\alpha_1$ 으로 미분이 가능하다. 그러므로 미분 연쇄법칙에 의해 다음 관계를 얻는다.

$$US_{\alpha_1}^{p_l^s} = \frac{\partial p_l}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} = \frac{\partial p_l}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} \alpha_1 + \frac{\partial p_l}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} \alpha_1 + \dots + \frac{\partial p_l}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} \alpha_1 \quad (16)$$

보조정리 2에 의거  $\frac{\partial p_l}{\partial a_1} = \Theta_{l1}, \dots, \frac{\partial p_l}{\partial a_n} = \Theta_{ln}$ 이고,

$$\frac{\partial a_1}{\partial \alpha_1} \alpha_1 = \frac{\partial a_1 / a_1}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} a_1 = S_{\alpha_1}^{a_1} a_1, \dots, \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} \alpha_1 = S_{\alpha_1}^{a_n} a_n$$

이므로 근감도는 다음과 같이 얻는다.

$$US_{\alpha_1}^{p_l^s} = \Theta_{l1} S_{\alpha_1}^{a_1} a_1 + \Theta_{l2} S_{\alpha_1}^{a_2} a_2 + \dots + \Theta_{ln} S_{\alpha_1}^{a_n} a_n \quad (17)$$

보조정리 1을 (17)에 대입하면 (18)을 얻는다.

$$\begin{aligned}
 US_{\alpha_1}^{p_i} &= \Theta_{11} a_1 \sum_{k=1}^1 (1-k) + \Theta_{12} a_2 \sum_{k=1}^2 (1-k) + \dots + \Theta_{1n} a_n \sum_{k=1}^n (1-k) \\
 &= - \sum_{m=1}^n \Theta_{1m} a_m \sum_{k=1}^m (k-1) = \sum_{m=1}^n \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{a_m p_i^m}{\delta'(p_i)}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

(ii) 근감도정의 (8)로부터  $\partial p_i = \partial \alpha_1 / \alpha_1 \cdot US_{\alpha_1}^{p_i}$  이므로,  $\Delta p_i = \Delta \alpha_1 / \alpha_1 \cdot US_{\alpha_1}^{p_i}$  만큼의 주특성비 섭동에 대한 근의 변화를 얻을 수 있다. 따라서 근의 섭동된 위치( $p_i^s$ )는 공칭위치( $p_i^o$ )에  $\Delta p_i$ 을 더한 값으로 근사화된다. ■

정리 1을 예제를 통해 살펴보기로 한다.

**예제 1 :** 5차의 K-다항식  $\delta(s)$ 를 고려해보자. 주특성비 ( $\alpha_1 = 2.38$ )를 변경 시켜가면서 근의 감도를 구한 후, 정리 1 (ii)를 사용하여 근의 섭동된 위치를 추정하고자 한다. 그리고 이 결과가 실제 근의 궤적과 일치하는지 살펴보기로 한다. 여기서  $\bar{p}_i$ 는  $p_i$ 에 대한 공액 복소근이다.

▶ K-다항식 :

$$\delta(s) = 0.74s^5 + 15.60s^4 + 137.53s^3 + 678.5s^2 + 1500s + 1500$$

▶ 공칭근 :

$$\begin{cases}
 p_i = [p_1, p_2, p_3] = [-4.867 + j2.626, -4.583, -3.342 + j1.803] \\
 \bar{p}_i = \bar{p}_1, \bar{p}_3 = [-4.867 - j2.626, \quad -3.342 - j1.803].
 \end{cases}$$

그림 1은 주특성비  $\alpha_1$  값을 1%씩 일정한 간격으로 증가시켜가면서 감도의 변화를 추적한 것이다. 주특성비  $\alpha_1$  섭동에 대하여 근  $p_3$ 의 감도는  $-0.4-j14.7$ 에서  $3.4-j12.5$ 까지 변한다. 감도의 실수부가 매우 작은 (-)에서 (+) 값으로 천이하므로 근  $p_3$ 의 실수부는 약간 감소한 후 다시 증가한다. 한편 감도의 허수부는 변화가 적지만 상대적으로 큰 (-) 값을 가지므로,  $p_3$ 의 허수부 크기는 지속적으로 감소한다. 그림 1에는 또한 감도로부터 구한 추정 근 위치( $p_i^s$ )와 실제 근 위치( $p_i^*$ )를 함께 도시하였는데, 각각의 근의 자취가 모두 근사하게 일치하고 있음을 알 수 있다. 시각적 구별이 가능하도록 추정 근 위치( $p_i^s$ )는 허수부가 (+)인 복소영역(상반면)에만 도시하였다. 본 예제로써 정리 1은 주특성비에 대한 근 특성의 해석에 매우 유용함을 보였다.

2. 시간응답감도

전달함수에서 매개변수의 섭동이 일어날 때, 주파수응답 뿐만 아니라 시간응답의 변화를 추정하는 일은 시스템 성능해석과 설계에서 매우 중요한 일 중의 하나이다. 본 절에서는, 선형 시스템에 대하여 주특성비의 섭동에 대한 함수 감도를 먼저 구하고, 이 결과를 시간응답감도 문제로 확장하고자 한다. 파라미터 변동이 없는 공칭 선형시스템을  $T^o(s)$ , 파라미터 섭동만큼 변경된 선형시스템을  $\Delta T(s)$ 라고 정의한다. 이 때 각각에 대한 시간응답 출력을  $y^o(t)$ ,  $\Delta y(t)$ 라고 하자. 그리고 함수감도에 입력  $R(s) = 1/s$ 을 인가하여 구한 스텝응답을  $y^s(t)$ 라고 하자. 먼저, 주특

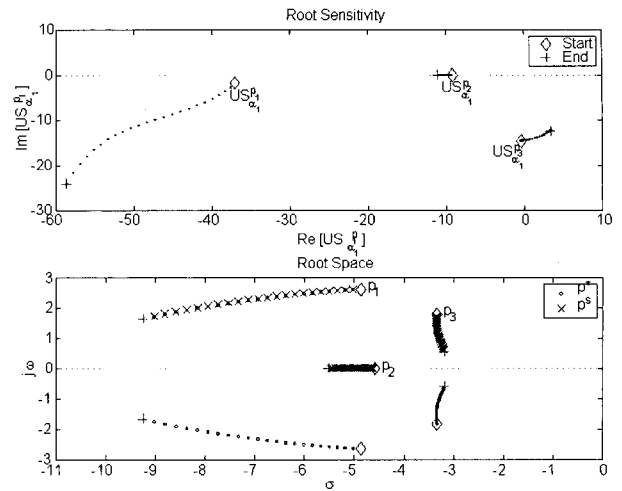


그림 1. 주특성비 섭동에 대한 근감도.

Fig. 1. Roots Sensitivity to principal characteristic ratio perturbation.

성비에 대한 함수감도를 구하기 위하여 계수에 대한 함수 감도( $US_{a_j}^T$ )를 인용하기로 한다.

**보조정리 3 [14] :**  $n$ 차 시스템  $T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)}$ 의 분모

항식  $\delta(s)$ 의  $j$ 번째 계수( $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ )가 섭동할 때, 계수에 대한 함수감도는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$(i) \begin{cases}
 US_{a_j}^T := - \frac{a_j s^j}{\delta(s)} \cdot T(s), \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 \Delta y(t, a_j) \approx \frac{\Delta a_j}{a_j} y_{a_j}^s(t)
 \end{cases}$$

(ii) 만약  $T(0) > 0$  이면  $US_{a_j}^T$ 에 대한 스텝응답  $y_{a_j}^s(t)$ 는 0을 중심으로  $(-, +, -, +, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴하고,  $T(0) < 0$  이면  $y_{a_j}^s(t)$ 는 0을 중심으로  $(+, -, +, -, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴한다.

다음 정리 2에 의해 주특성비 섭동에 대한 함수감도를 구한다.

**정리 2 :**  $n$ 차의 시스템  $T(s) = \frac{n(s)}{\delta(s)}$ 이 안정이고 분모

다항식  $\delta(s)$ 는 K-다항식으로 구성되었다고 가정하자. 주특성비  $\alpha_1$ 의 섭동에 대한 함수감도는 다음 성질을 갖는다.

$$(i) \begin{cases}
 US_{\alpha_1}^T = \frac{T(s)}{\delta(s)} \sum_{m=2}^n a_m s^m \sum_{k=2}^m (k-1) \\
 = \frac{T(s)}{\delta(s)} \sum_{m=2}^n \frac{m(m-1)}{2} \cdot a_m s^m, \\
 \Delta y(t) \approx \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} y_{\alpha_1}^s(t)
 \end{cases}$$

(ii) 만약  $T(0) > 0$  이면  $US_{\alpha_1}^T$ 에 대한 스텝응답  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 는 0을 중심으로  $(+, -, +, -, \dots)$ 의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴하고,  $T(0) < 0$  이면  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 는 0을 중심으로

(-, +, -, +, ...)의 방식으로 교번하면서 0으로 수렴한다.

**증명 :** (i)  $T = T(a_0, \dots, a_n)$ 는 연속해서 편미분  $\frac{\partial T}{\partial a_0}, \dots, \frac{\partial T}{\partial a_n}$ 이 가능하고, 다항식 계수  $a_j$ 는  $\alpha_j$ 의 함수로서  $\alpha_1$ 으로 미분이 가능하므로, 미분연쇄법칙에 의거 다음 관계를 얻는다.

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial T}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial T}{\partial a_3} \frac{\partial a_3}{\partial \alpha_1} + \dots + \frac{\partial T}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \alpha_1} \quad (19)$$

계수에 대한 함수감도 정의(9)로부터  $\frac{\partial T}{\partial \alpha_2} = \frac{1}{a_2} US_{a_2}^T, \dots,$

$\frac{\partial T}{\partial a_n} = \frac{1}{a_n} US_{a_n}^T$ 이므로 (19)를 비규준화함수감도로 표현하면 (20)과 같다.

$$US_{\alpha_1}^T = \frac{\partial T}{\partial \alpha_1 / \alpha_1} = US_{a_2}^T S_{\alpha_1}^{a_2} + US_{a_3}^T S_{\alpha_1}^{a_3} + \dots + US_{a_n}^T S_{\alpha_1}^{a_n} = \sum_{m=2}^n US_{a_m}^T S_{\alpha_1}^{a_m} \quad (20)$$

(20)에 보조정리 1과 보조정리 3을 적용하면 다음을 얻는다.

$$US_{\alpha_1}^T = US_{a_2}^T \sum_{k=2}^2 (1-k) + \dots + US_{a_n}^T \sum_{k=2}^n (1-k) = \sum_{m=2}^n US_{a_m}^T \sum_{k=2}^m (1-k) = \frac{T(s)}{\delta(s)} \sum_{m=2}^n a_m s^m \cdot \frac{m(m-1)}{2} \quad (21)$$

주특성비의 섭동  $\Delta \alpha_1$ 을 갖는  $T(s)$ 를 Taylor's Series로 전개하면 다음과 같다.

$$T(s, \alpha_1 + \Delta \alpha_1) = T^o(s) + \Delta T(s) = T^o(s) + \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \dots \quad (22)$$

(22)를 일차 도함수 항까지 근사화하여,  $\alpha_1$ 의 섭동에 대한 비규준화함수감도로 표현하면 (23)과 같이 표현되며,  $US_{\alpha_1}^T$ 에 대한 스텝응답을  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 로 표현하면  $\Delta y(t) = \Delta \alpha_1 / \alpha_1 \cdot y_{\alpha_1}^s(t)$ 를 얻는다.

$$\Delta T(s) \doteq \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 = \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} US_{\alpha_1}^T \quad (23)$$

(ii) 보조정리 3에서, 계수의 섭동에 대한 함수감도  $US_{a_i}^T$ 에 의한 스텝응답  $y_{a_i}^s(t)$ 는,  $T(0) > 0$ 의 조건에서 (-, +, -, +, ...)의 방식으로 교번하면서 0에 수렴한다. 그리고 보조정리 1에 보인 바와 같이, 주특성비  $\alpha_1$ 에 대한 계수 감도  $S_{\alpha_1}^{a_i} = \sum_{k=1}^i (1-k)$ 는, 항상 (-)값을 가진다. 이상의 결과로부터 주특성비에 대한 함수감도  $US_{\alpha_1}^T = \sum_{m=1}^n US_{a_m}^T \sum_{k=1}^m (1-k)$ 의 스텝응답  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 는,  $T(0) > 0$ 일 때 (+, -, +, -, ...)의 방식으로

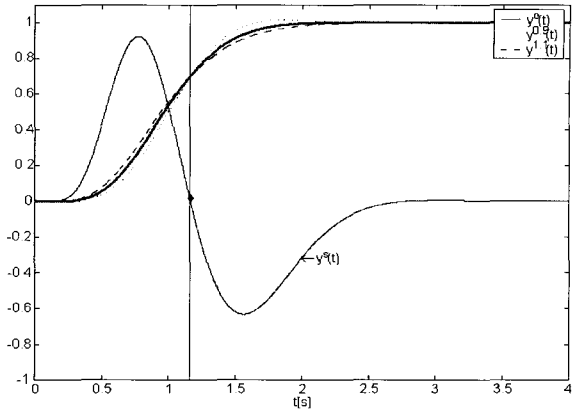


그림 2. 주 특성비에 대한 시간응답 감도.  
Fig. 2. Output sensitivity to principal characteristic ratio.

교번하면서 0 값으로 수렴함을 쉽게 알 수 있다. 같은 방법으로  $T(0) < 0$ 의 조건에서는,  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 는 (-, +, -, +, ...)의 방식으로 교번하면서 0 값에 수렴한다. ■

**예제 2 :** (6),(7)에 의해 구성된 7차의 APS를 고려하자. 스텝응답이 오버슈트를 갖지 않도록 주특성비 ( $\alpha_1^* = 2.265$ )로 선택하고, 일반화시정수  $\tau = 1$ 로 선택하였다. 주특성비를 증감하면 나머지 특성비도 따라서 증감되는데, 이에 대한 시간응답감도를 구하고, 시간응답에 미치는 영향을 조사하였다.

그림 2에서  $y^o(t)$ 는  $T^o(s)$ 의 스텝응답이며,  $y^{1.1}(t), y^{0.9}(t)$ 는 주특성비를 10% 증감( $1.1\alpha_k^*, 0.9\alpha_k^*$ )하였을 때의 각각의 스텝응답이다. 그리고  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 는, 출력함수감도( $US_{\alpha_1}^T$ )에 의한 스텝응답으로서, 시간응답감도다. 주특성비 10% 증가에 대한 스텝응답  $y^{1.1}(t)$ 는 시간응답감도  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 가 (+)영역에 있을 때는  $y^o(t)$ 보다 크고,  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 가 (-)영역으로 천이하면  $y^o(t)$ 보다 작아지면서 정착시간이 길어진다. 주특성비 10% 감소의 경우에는  $y_{\alpha_1}^s(t)$ 의 (-) 값이  $y^{0.9}(t)$ 에 오버슈트를 발생시킨다. 즉, 스텝응답의 오버슈트를 예방하기 위해서는, 주특성비를 증가시키는 것이 좋을 수 있다. 주특성비 증가로 인한 정착시간 증가는 일반화시정수를 줄여 줌으로써 보상할 수 있다.

### 3. 주파수응답 감도

본 절에서는 Huelsman[13]이 정의한 주파수응답감도 정의를 주특성비에 대한 주파수응답감도로 확장하는 문제를 고려한다. 여기서  $T(s)$ 의 분모다항식은 K-다항식이고 함수감도는 (11)을 이용한다. (11)의 우변을 분자, 분모 항으로 나누어 전개하면 다음과 같다.

$$-\alpha_1 \delta(s, \alpha_1) |_{s=jw} = \sum_{i=2}^n \sum_{t=2}^i (i-1) a_i (jw)^t = \delta_{\alpha_1}^s(w^2) + jw \delta_{\alpha_1}^o(w^2) \quad (24)$$

$$\delta(s, \alpha_1) |_{s=jw} = \sum_{i=0}^n a_i (jw)^i = \delta^s(w^2) + jw \delta^o(w^2)$$

(24)를 주파수응답감도 (12)에 적용하고, 실수부와 허수부를 분리하면 다음과 같다.

$$S_{\alpha_1}^{T(jw)} = \frac{\delta_{\alpha_1}^e(w^2)\delta^e(w^2) + w^2\delta_{\alpha_1}^o(w^2)\delta^o(w^2)}{[\delta_e^e(w^2)]^2 + w^2[\delta^o(w^2)]^2} + jw \frac{\delta_{\alpha_1}^o(w^2)\delta^e(w^2) - \delta_{\alpha_1}^e(w^2)\delta^o(w^2)}{[\delta_e^e(w^2)]^2 + w^2[\delta^o(w^2)]^2} \quad (25)$$

여기서 :

(i)

$$\delta_{\alpha_1}^e(w^2) = \sum_{t=1}^m (-1)^t \sum_{i=2}^{2t} (i-1)a_{2t}w^{2t}, \quad n = 2m, n = 2m+1$$

$$\delta_{\alpha_1}^o(w^2) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^t \sum_{i=2}^{2t+1} (i-1)a_{2t+1}w^{2t}, & n = 2m \\ \sum_{t=1}^m (-1)^t \sum_{i=2}^{2t+1} (i-1)a_{2t+1}w^{2t}, & n = 2m+1. \end{cases} \quad (26)$$

(ii)

$$\delta^e(w^2) = \sum_{t=0}^m (-1)^t a_{2t}w^{2t}, \quad n = 2m, n = 2m+1$$

$$\delta^o(w^2) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{m-1} (-1)^t a_{2t+1}w^{2t}, & n = 2m \\ \sum_{t=0}^m (-1)^t a_{2t+1}w^{2t}, & n = 2m+1. \end{cases} \quad (27)$$

주파수크기응답 감도 값이 최저인 주파수( $w_L$ )를 최소감도주파수라고 하고 이 감도 값이 (+) 값으로 천이하는 0 값을 갖는 주파수를 감도교점주파수( $w_r$ )라고 정의하자.  $T(s)$ 의 주파수크기응답이  $-3[db]$ 일 때의 주파수인 차단주파수( $w_c$ )라 하자. Chestnut[15]는, 차단주파수가 증가될수록 응답속도가 증가되고, 차단주파수 이상에서 주파수크기응답의 감쇠율이 클수록 스텝응답의 오버슈트가 증가한다고 주장하였다. Kim 등[1]은, CRA를 이용하여 특성다항식의 계수를 결정할 때, 주특성비를 증가시키면 스텝응답의 정착시간은 길어지지만 오버슈트가 감소한다는 것을 보였다. 여기서는 그러한 성질을 주특성비에 대한 주파수응답감도의 관점에서 살펴보기로 한다. 다음 예제는 이에 관한 것이다.

**예제 3 :** 분모가 K-다항식인 8차의 APS를 고려해보자. 스텝응답이 오버슈트를 갖지 않도록 주특성비를  $\alpha_1^* = 2.23$ 로 선택하고 주파수응답감도를 구하기로 한다. 주특성비를 5% 감소시키고 주파수응답감도와 주파수크기응답과의 관계를 살펴본다. 주특성비 섭동에 대한 주파수크기응답과 감도함수 그리고 스텝응답을 그림 3에 도시하였다. 이 때 주파수 구간별 함수감도에 따른 주파수크기응답 및 시간응답과의 관계를 다음과 같이 정리할 수 있다.

- (i) 감도함수가 지속적으로 감소하는 영역 ( $0 < w < w_L$ )에서 :  $|T(jw)|dB$ 는 주특성비가 5% 감소하기 전보다 감쇠율은 작아진다. 차단주파수가 증가하므로 응답속도가 빨라진다.
- (ii) 최소감도주파수( $w = w_L$ )에서 :  $|T(jw)|dB$ 의 편차는 최대가 된다.
- (iii) 감도함수가 다시 0을 향하여 증가하는 영역

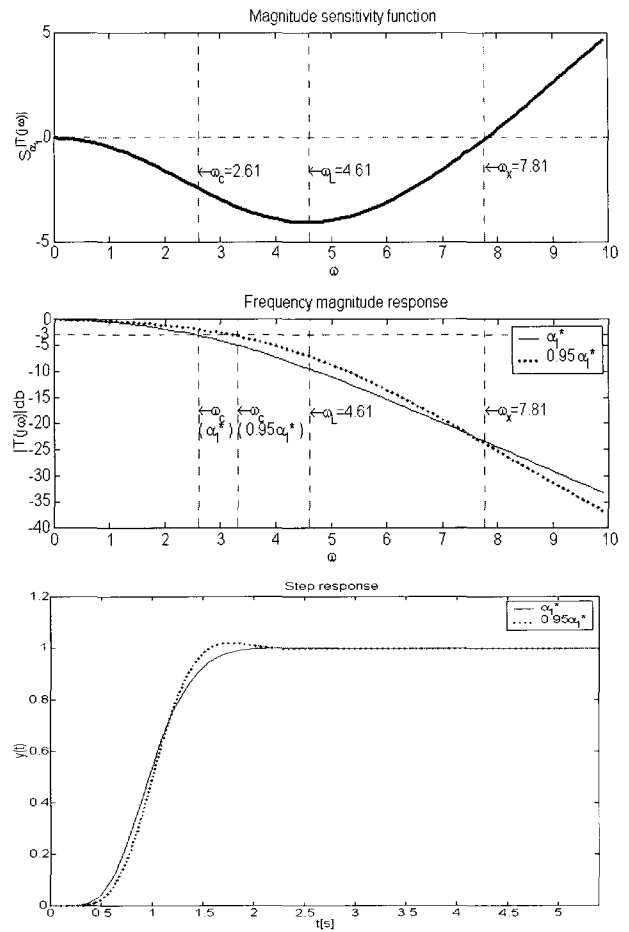


그림 3. 주특성비 섭동에 대한 함수감도, 주파수응답, 스텝 응답.

Fig. 3. Function sensitivity, frequency response and step response to the principal characteristic ratio change.

( $w_L < w < w_r$ )에서 :  $|T(jw)|dB$ 의 편차가 줄어들면서 감쇠율이 증가하게 되어 스텝응답의 오버슈트를 유발한다.

(iv) 감도교점주파수( $w = w_r$ )에서 :  $|T(jw)|dB$ 의 편차가 0이 된다.

4. 일반화시정수에 대한 근 감도

Kim 등[1]은 일반화시정수에 의해 선형계의 시간응답을 시간 축에서 완전히 스케일링(scaling) 할 수 있음을 밝혔다. 또한 일반화시정수 조정에 따른 극점의 위치 변화에 대해서도 해석하였다. 두 APS  $T_1(s), T_2(s)$ 의 특성비와 차수가 동일하고, 일반화시정수가 각각  $\tau_1, \tau_2$ 라 할 때, 일반화시정수비를  $\tau_{12} = \tau_2/\tau_1$ 로 놓으면 이것과 특성다항식의 계수 및 극점과의 관계가 (28)과 같음을 밝혔다.

$$\hat{a}_j = \tau_{12}^j a_j \leftrightarrow \hat{p}_j = \frac{p_j}{\tau_{12}}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

여기서,  $a_j$ 와  $p_j$ 는  $T_1(s)$ 의 계수와 극이고,  $\hat{a}_j$ 와  $\hat{p}_j$ 는  $T_2(s)$ 의 그것이다.

이 관계를 이용하여 특성비가 고정되고 일반화시정수만 섭동할 때의 근감도를 구하기로 한다.

**정리 3.** K-다항식의 특성비가 고정되고 일반화시정수  $\tau$ 가  $\Delta\tau$  만큼 섭동하면, 근감도는 다음과 같다.

(i) 근감도 :  $US_r^p = \sum_{j=1}^n j \theta_{lj} a_j = - \sum_{j=1}^n j a_j \frac{p_l^j}{\delta'(p_l)}$

(ii)  $\tau$ 가  $\tau_1$ 에서  $\tau_2$ 로 변동하였다면, 두 근감도는  $US_{\tau_2}^p = US_{\tau_1}^p \cdot \frac{1}{\tau_2}$ 의 관계를 가지며, 근감도는 복소공간에서 항상 기울기가  $Im\{US_{\tau_1}^p\} / Re\{US_{\tau_1}^p\}$ 인 직선상에 위치한다.

(iii) 근의 섭동된 위치 :

$$p_l^s = p_l^o + \Delta p_l \approx p_l^o + \frac{\Delta\tau}{\tau} US_r^p.$$

여기서  $p_l^o$ 는  $l$  번째 근의 공칭위치이다.

**증명 :** (i) 특성비가 고정되고 일반화시정수  $\tau$ 가  $\Delta\tau$  만큼 섭동을 일으키는 경우를 가정한다.  $\delta(s)$ 의 근  $p_l = p_l(a_1, \dots, a_n)$ 이 연속해서 편미분  $\frac{\partial p_l}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial p_l}{\partial a_n}$ 이 가능하고, 임의의 계수  $a_j$ 는  $\tau$ 의 함수이므로  $\tau$ 로 미분이 가능하다. 그러므로 미분연쇄법칙에 의해 다음 관계를 얻는다.

$$US_r^p = \frac{\partial p_l}{\partial \tau / \tau} = \frac{\partial p_l}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial \tau} \tau + \frac{\partial p_l}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial \tau} \tau + \dots + \frac{\partial p_l}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial \tau} \tau \quad (29)$$

(7)로부터  $\tau$ 의 섭동과 각 계수는 다음 관계를 갖는다

$$\frac{\partial a_1}{\partial \tau} \tau = \frac{\partial a_1 / a_1}{\partial \tau / \tau} a_1 = a_1, \quad \frac{\partial a_2}{\partial \tau} \tau = 2a_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial a_n}{\partial \tau} \tau = na_n \quad (30)$$

$$\frac{\partial a_j}{\partial \tau} \tau = ja_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

보조정리 2와 (30)을 (29)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$US_r^p = \theta_{l1} a_1 + \theta_{l2} a_2 + \dots + \theta_{ln} a_n = \sum_{j=1}^n j \theta_{lj} a_j = - \sum_{j=1}^n j a_j \frac{p_l^j}{\delta'(p_l)}. \quad (31)$$

(ii) 보조정리 2를 (31)에 대입하고  $\tau = \tau_1$ 으로 놓으면 근감도는 다음과 같다.

$$US_{\tau_1}^p = \sum_{j=1}^n j \theta_{lj} a_j = - \sum_{j=1}^n j \frac{p_l^j}{\sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1}(m+1) p_l^m} a_j = - \frac{1}{\sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1}(m+1) p_l^m} \sum_{j=1}^n j p_l^j a_j \quad (32)$$

$\tau = \tau_2$ 로 놓고 (28)을 (32)에 대입하면 다음과 같이 정리된다.

$$US_{\tau_2}^p = - \frac{1}{\sum_{m=0}^{n-1} \tau_{12}^{m+1} a_{m+1}(m+1) \left(\frac{p_l}{\tau_{12}}\right)^m} \sum_{j=1}^n j \left(\frac{p_l}{\tau_{12}}\right)^j \tau_{12}^j a_j = \left\{ - \frac{1}{\sum_{m=0}^{n-1} a_{m+1}(m+1) p_l^m} \sum_{j=1}^n j p_l^j a_j \right\} \cdot \frac{1}{\tau_{12}} = US_{\tau_1}^p \cdot \frac{1}{\tau_{12}} \quad (33)$$

(33)으로부터 일반화시정수가  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ 로 변경되면 근감도는 시정수비의 역수 배 만큼 달라짐을 알 수 있다. 일반화시정수가  $\tau_1$ 일 때의 근감도가  $US_{\tau_1}^p = x + jy$ 이라면  $\tau_2$ 일 때의 근감도는 (33)으로부터  $US_{\tau_2}^p = (x + jy) / \tau_{12}$ 이다. 따라서 복소공간에서 두 감도 값을 연결한 직선의 기울기  $a$ 는 다음과 같다.

$$a = \frac{\frac{y}{\tau_{12}} - y}{\frac{x}{\tau_{12}} - x} = \frac{y}{x} = \frac{Im\{US_{\tau_1}^p\}}{Re\{US_{\tau_1}^p\}} \quad (34)$$

(iii) 일반화시정수에 대한 근감도정의 (14)로부터,  $\partial p_l = \partial \tau / \tau \cdot US_r^p$  이므로,  $\Delta p_l \approx \Delta \tau / \tau \cdot US_r^p$  만큼의 근의 변화를 얻을 수 있다. 따라서 근의 섭동된 위치( $p_l^s$ )는 공칭 위치( $p_l^o$ )에  $\Delta p_l$ 을 더한 위치이다. ■

예제를 통해 일반화시정수 섭동에 대한 근감도의 거동을 관찰해보자.

**예제 4 :** 주특성비  $\alpha_1 = 2.035$  와 일반화시정수  $\tau = 0.5$  를 선택하여 다음과 같이 5차의 다항식  $\delta(s)$ 와 근을 얻는다. 이 때 주특성비를 고정시키고 일반화시정수  $\tau$ 를 0.5에서 2까지 0.05씩 등 간격으로 증가시켜가면서 근의 감도를 구한 후 정리 3(iii)을 사용하여 근의 섭동된 위치를 얻는다. 그리고 이 결과가 실제 근의 위치와 일치하는지 살펴보자. 여기서  $\bar{p}_i$ 는  $p_i$ 에 대한 공액 복소근이다.

▶ 다항식 :

$$\delta(s) = 0.11s^5 + 2.45s^4 + 27.50s^3 + 184.2s^2 + 750s + 1500$$

▶ 공칭근 :

$$\begin{cases} p_i = [p_1, p_2, p_3] = [-2.28 + j6.26, -6.70, -5.50 + j3.84] \\ \bar{p}_i = \bar{p}_1, \bar{p}_3 = [-2.28 - j6.26, -5.50 - j3.84]. \end{cases}$$

정리 3 (ii)에 의해 그림 4의 근감도의 자취는 직선임을 알 수 있다. 예컨대,  $p_3$ 의 초기 근감도는 5.5-j3.8이고, (34)에 의한 감도자취의 기울기는 약 -0.7이며, 섭동된 근감도들은 모두 직선상에 위치한다. 또한  $\tau$ 의 변동에 대한 근감도는 시정수비의 역수( $1/\tau_{12} = \tau_1/\tau_2$ )배 만큼 달라지므로  $\tau$ 를 증가시키면 근감도의 크기가 줄어들기 때문에 근의 위치 변화거리도 짧아진다. 모든 근감도의 실수부는 (+)이고 허수부는 0 이하이기 때문에 섭동된 근의 실수부는 증가방향으로 허수부는 감소방향으로 향하고 있다. 더불어 감도로

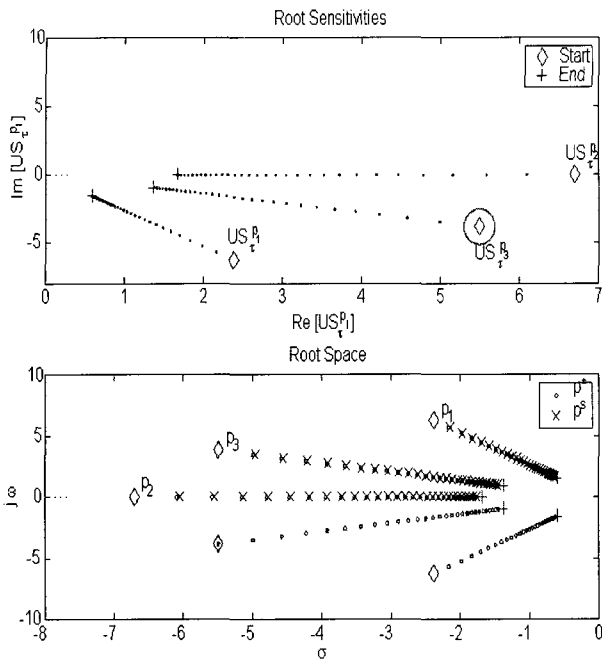


그림 4. 일반화시정수에 대한 근 감도.  
Fig. 4. Root Sensitivities to generalized time Constants.

부터 구한 추정 근위치( $p_i^o$ )와 실제 근위치( $p_i^*$ )를 함께 도시하였는데 그 자취가 서로 일치함을 확인할 수 있다. 시각적 구별이 가능하도록, 추정 근위치( $p_i^*$ )는 복소평면 상반면에만 도시하였다. 본 예제를 통해 살펴본 바와 같이, 정리 3은 일반화시정수에 대한 근의 성질을 해석하는데 유용하다.

IV. 결론

선형계 전달함수의 분모다항식은 특성비  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ 와 일반화시정수  $\tau$ 의 함수로 나타낼 수 있는데, Naslin[6]은 일찍이  $\alpha_i$ 가 제동특성과 관계있다는 경험적 사실을 제시한 바 있다. Kim 등[1]은 단지  $\alpha_1$ 과  $\tau$ 만으로 안정도가 보장되고 제동특성을 조정하기가 용이한 임의 차수의 K-다항식을 제안하였다. 본 논문 Part II에서는  $\alpha_1$ 의 섭동에 대한 K-다항식의 근감도를 해석하였으며, K-다항식을 분모다항식으로 갖는 전달함수의 함수감도를 구하고 이를 이용하여 시간응답감도와 주파수응답감도를 구하였다. 이 모든 감도는 주어진 전달함수로부터 유도된 유리함수 형태로 나타났으며, 감도함수의 스텝응답으로부터 근궤적과 과도응답의 변동을 아주 근사하게 추정할 수 있음을 보였다. K-다항식을 이용하여 제어기를 설계할 경우, 강인성 해석이나 근의 분포 연구에 응용될 수 있다. 감도 측면에서 주특성비 감소에 따른 스텝응답 오버슈트의 원인을 분석하였으며 주파수응답 감도와 주파수응답 크기와 관계를 규명하였다. 또한, 일반화시정수의 섭동에 대한 근감도를 해석하였다. 이 결과들은 CRA[7-12] 기법을 이용한 제어기 설계시 수반되는 K-다항식의 선택에 유용하게 적용될 것이다.

참고문헌

- [1] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Transient response control via characteristic ratio assignment", *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol AC-48, no. 12 pp. 2238-2244, Dec. 2003.
- [2] C. T. Chen, *Analog and Digital Control System Design : Transfer-function, State space and Algebraic methods*, Saunders College Publishing, 1993.
- [3] D. Swaroop, "On the synthesis of controllers for continuous time LTI systems that achieve a non-negative impulse response," *Automatica*, vol. 39, pp. 159-165, 2003.
- [4] K. J. Astrom, "Limitations on control system performance," *Proc. of 1997 European Control Conference*, pp. TU E E4, Brussels, Belgium, July, 1997.
- [5] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [6] P. Naslin, *Essentials of Optimal Control*, Boston Technical Publishers, Inc., Cambridge, M.A, 1969.
- [7] S. Manabe, "Coefficient diagram method," *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, pp. 199-210, Seoul, Korea, 1998.
- [8] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. Manabe, "Controller design for time domain specifications," *Proc. of IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, July, 2002.
- [9] K. S. Kim, Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "PID controller design with response specifications," *Proceeding of the 2003 American Control Conference*, Denver, Colorado, 2003
- [10] 김근식, 조태신, 김영철, "시간응답 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템공학논문지, 제9권 4호, pp. 259-268, 2003.
- [11] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Charateristic ratio assignment method and an application to a benchmark problem", *Proceeding of IFAC Symposium on Robust Control Design*, Milan, Italy, June, 2003.
- [12] K. S. Kim, Y. T. Woo, Y. C. Kim, "Design of first order controllers with time domain specifications", *International Conference on Control, Automation, and Systems*, pp. 1-7, Geongju, Korea, 2003.
- [13] L. P. Huelsman, *Active and Passive analog Filter Design - An Introduction*, McGraw-Hill Book Company, 1993
- [14] 김근식, 김영철, "계수의 특성비에 대한 선형시스템의 파라미터적 감도해석(I) : 일반적인 경우," 제어 · 자동화 · 시스템공학논문지, 제 10권 3호, pp. 205-215. 2004.
- [15] H. Chestnut and R. W. Mayer, *Servomechanisms and Regulating System Design, vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1959.

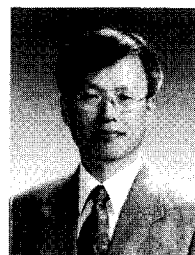




**김근식**

1963년 5월 2일생. 1985년 한양대학교 전자공학과(공학사), 1987년 한양대학교 전자공학과(공학석사), 2003년 충북대학교 전자공학과(공학박사). 1987년~1994년 국방과학연구소, 1994년~1996년 자동차부품연구원, 1996년~

현재 대전대학 인터넷정보계열 부교수. 관심분야는 저차제어기 설계 및 구현, 감도해석.



**김영철**

1954년 12월 29일 생. 1981년 고려대학교 전기공학과(공학사), 1983년 서울대학교 전기공학과(공학석사), 1987년 서울대학교 전기공학과(공학박사), 1988년~현재 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 교수. 1992년~1993년 미국 Texas A&M Univ. Post-Doctoral Fellow.

2001년~2002년 미국 Vanderbilt Univ./Tennessee State Univ. 방문교수. 대한 전기학회 편집이사, 관심분야는 Linear Control Theory, Parametric Robust Control 등.