

# 모달 스트레인 에너지를 이용한 3차원 형상 비교

최 수 미<sup>†</sup>

## 요 약

3차원 모델간의 형상을 비교하는 것은 형상을 기반으로 하는 인식, 검색, 분류 등을 위해 매우 중요하다. 본 논문에서는 모델의 이동, 회전, 스케일 변화에 영향받지 않고, 모델을 구성하는 정점들이 비균일 하고 불완전한 경우에도 강인한 3차원 형상 비교 방법을 제안한다. 먼저 입력 데이터로부터 고유 모드를 이용한 모달 모델을 구성하고 모달 스트레인 에너지를 이용하여 형상 간의 유사성을 비교한다. 제안된 방법은 고유 진동수에 따라 고유 모드들을 순서화 함으로써 형태 변형을 전역적인 것에서부터 지역적인 것으로 체계화한다. 이렇게 체계화된 형상 표현과 모달 스트레인 에너지를 이용함으로써 국부적인 형태에 치우치지 않고 전체적인 형태의 유사성을 평가하였다.

## 3D Shape Comparison Using Modal Strain Energy

Soo-Mi Choi<sup>†</sup>

## ABSTRACT

Shape comparison between 3D models is essential for shape recognition, retrieval, classification, etc. In this paper, we propose a method for comparing 3D shapes, which is invariant under translation, rotation and scaling of models and is robust to non-uniformly distributed and incomplete data sets. First, a modal model is constructed from input data using vibration modes and then shape similarity is evaluated with modal strain energy. The proposed method provides global-to-local ordering of shape deformation using vibration modes ordered by frequency. Thus, we evaluated similarity in terms of global properties of shape without being affected localised shape features using ordered shape representation and modal strain energy.

**Key words:** Shape comparison(형상 비교), Modal model(모달 모델), Modal strain energy(모달 스트레인 에너지)

## 1. 서 론

3차원 모델링 툴이나 스캐닝 장비들이 보편화됨에 따라 다양한 3차원 모델을 손쉽게 획득할 수 있게 되었다. 또한 컴퓨터의 계산 및 그래픽 처리 능력이 급속히 발전하고 인터넷을 통해 3차원 모델의 공유

가 쉬어짐에 따라 3차원 모델들을 관리할 필요성이 증가되고 있다.

3차원 모델의 형상을 비교하는 것은 형상을 기반으로 하는 인식, 검색, 분류 등의 시스템에서 매우 중요한 기술이다. 형상 비교에 대한 기존 연구들은 주로 2차원 영상을 사용하여 이루어졌다. 2차원 영상을 이용한 접근 방법들은 주로 곡률(curvature)과 같은 형상의 특징을 이용한 방법, 외곽선(contour curve) 또는 실루엣(silhouette)을 사용하는 방법, 색과 텍스처(texture), 웨이블릿 변환(wavelet transformation), 푸리에 변환(fourier transformation) 등을 이용한 방법들이 대부분이다. 최근에는 3차원에서 모델간의

※ 교신저자(Corresponding Author) : 최수미, 주소 : 서울시 광진구 군자동 98(143-747), 전화 : 3408-3754, FAX : 3408-3662, E-mail : smchoi@sejong.ac.kr

접수일 : 2003년 7월 28일, 완료일 : 2003년 9월 18일

<sup>†</sup> 정회원, 세종대학교 컴퓨터공학부 조교수

※ 이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-003-D00308).

형상을 비교하려는 연구들이 진행되고 있다. 물론 기존의 2차원 영상 기반의 방법들이 3차원 관련 연구들에 적용되거나 확장되어 이용되고는 있지만 2차원 영상으로부터 3차원 모델로의 차원 변환에서 오는 한계점으로 인하여 3차원 형상 비교를 위한 새로운 방법들이 필요하게 되었다.

3차원 모델을 대상으로 하는 초기의 대표적인 연구들로는 Extended Gaussian Images[1], Harmonic Shape Images[2]를 들 수 있다. 그러나 이 방법들은 형상 비교의 대상이 되는 모든 3차원 모델들이 위상적으로 손상이 없는 완전한 표면 메쉬(surface mesh)나 명시적 볼륨(explicit volume)으로 표현되어야 한다는 제약 사항을 가졌다. 또한 특정 자료구조를 이용하여 3차원 모델의 위상이나 형상을 표현한 형상 비교 연구들도 발표되고 있다. 이 방법들은 우선 3차원 물체를 특징 정보들의 집합으로 구성한 후, 물체의 공간적 관계나 특징들 사이의 차이점에 기반하여 모델간의 유사성을 평가하였다. 그 대표적인 방법들로는 generalized cylinders[3], shock graphs[4], medial axes[5], skeletons[6] 등이 있다. 이러한 접근 방법들은 대개 3차원 모델의 외형으로부터 shock graph나 medial axes와 같은 구조적 데이터 표현자(structural data descriptor)들을 추출하고, 그 표현자들을 통해 얻게 되는 모델의 특성들을 유사성 비교에 이용하기 때문에 구멍(hole)과 같은 위상 특징을 갖는 모델간의 유사성 평가 작업에 이용할 수 없고, 주로 2차원의 골격화를 3차원으로 확장하였기 때문에 계산 시간 복잡도가 높은 편이다. 최근에는 3차원 모델이 갖는 기하학적 및 위상학적 특성을 고려하여 모델 간의 매칭 및 유사성 평가에 관한 연구 방법들이 소개되고 있다[7,8].

인터넷 상에 산재해 있는 모델링 틀에 의해 생성된 3차원 모델들은 일반적으로 점들 간의 간격이 전체적으로 균일하지 않고, 부분적으로 데이터가 부족한 불완전한 점 집합이 대부분이다. 또한 동일한 형상이면서도 서로 다른 삼각화된 메쉬 구조를 갖는 경우도 있다. 그러므로 이러한 불완전한 점 집합으로 구성된 모델간에 안정적으로 형상을 비교할 수 있는 방법이 필요하다. 이에 대한 해결책으로 물체의 기하학적 형상과 물리적 특성을 결합한 통합 모델을 이용하는 방법을 들 수 있다.

물리적인 특성을 반영할 수 있는 대표적인 모델로

는 매스-스프링 모델(mass-spring model)과 유한요소법(finite element method)에 기반한 모델을 들 수 있다. 이와 관련된 연구들을 살펴보면, Christensen[9]은 변형하고자 하는 물체를 8개의 절점으로 이루어진 매스-스프링 격자에 걸쳐놓고, 동역학적인 시뮬레이션과 자유변형(free form deformation) 모델을 사용하여 포함된 물체를 변형하는 방법을 제안하였고, Nedal[10]은 사람의 근육이 변형되는 과정을 실시간으로 시뮬레이션할 수 있는 모델을 제안하였다. Gourret[11]은 사람의 손과 변형하는 물체간의 상호작용을 모델링 하기 위하여 유한요소모델을 사용하였다. 선형 보간함수로 이루어진 3차원 유한요소를 이용하였고 상호작용을 애니메이션 하기 위해서는 동적 평형방정식을 적용하였다. Chen과 Zeltzer[12]는 20개의 노드로 이루어진 brick 요소와 parabolic 보간함수를 사용하였으며, 뼈와 근육을 연결하는 건(tendons)에 힘을 가해 근육의 변형을 모델링 하는데 유한요소모델을 제안하였다. Essa[13] 등은 형상 적합과 움직임 추적에 의한 영상 분석에 동적 유한요소모델을 사용하였다. 이들은 27개의 노드 단위의 superquadric 유한요소와 동적 평형방정식에 대한 모드 해석 방법을 사용하였다. Bro-Nielsen[14] 등은 모의수술시의 인체의 피부조직의 변형을 모델링하는데 사면체 요소와 선형 보간 함수를 이용한 유한요소모델을 제안하였으며, 실시간 시뮬레이션을 수행하기 위해 전처리 단계에서 많은 계산을 수행하였고 물체를 표면과 내부로 구분하여 변형 계산을 물체의 표면에서만 수행하도록 하였다. Zhu[15] 등은 유한요소법과 볼륨 그래픽스를 이용하여 근육 변형을 위한 복셀기반의 생체 역학적인 모델(bio-mechanical model)을 제안하였다.

이처럼 형상 표현이나 상호작용 방법과의 결합 외에도 기하학적 형상과 물체의 특성을 결합한 통합 모델은 3차원 형상을 비교할 수 있는 중요한 기준치를 제공할 수 있다. 본 논문에서는 고유 모드를 기반으로 모달 모델을 구성한 후, 이들 모델간의 변형시 필요한 모달 스트레인 에너지를 이용하여 새로운 3차원 형상 비교 방법을 제안한다.

이어지는 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 고유 모드와 고유 좌표계에 대해 설명하고, 3장에서는 고유 모드를 이용한 모달 모델에 대하여 기술한다. 4장에서는 형상 비교를 위한 측도인 모달 스트레

인 에너지에 대하여 설명하고, 5장에서는 제안 방법을 3차원 형상 비교에 적용한 결과를 제시한다. 마지막으로 6장에서는 결론 및 향후 연구 방향에 대하여 기술한다.

## 2. 고유 모드와 고유 좌표계

다자유도계(multi-degree of freedom system)의 고유 진동이라는 것은 운동 중에서 전체 시스템에 의해 유발되는 어떤 변위의 모습이나 형태를 의미한다. 진동의 고유 모드 즉 고유 진동수와 모드벡터(고유벡터)는 시스템의 성질을 나타내며 모드벡터의 크기를 제외하고는 유일하다. 본 장에서는 대상 물체의 형상을 체계적으로 분석하고 이를 형상비교에 사용하기 위하여 고유 모드와 고유 좌표계에 대하여 설명한다.

각각의 점들의 위치는 각 고유 모드에서 어떻게 배치되는가에 따라 유일하게 결정되어진다. 이러한 고유 좌표계는 물체의 일반화된 대칭축으로 간주할 수 있다. 진동의 고유 모드인 고유 진동수와 모드벡터는 식 (1)과 같은 외부로부터 작용하는 힘이 없는 비감쇠 자유진동(undamped free vibration) 방정식으로부터 유도된다. 여기서  $M$ 은 질량행렬(mass matrix)이고,  $K$ 는 물체를 이루는 물질의 특성을 나타내는 강성행렬(stiffness matrix)이다.  $U$ 는 노드의 변위 벡터를 나타낸다.

$$M\ddot{U} + KU = 0 \tag{1}$$

안정상태의 진동 만을 고려하면 다음과 같은 식을 사용할 수 있다[16]. 질량행렬과 강성행렬에 관련된 일반 고유값 문제(generalized eigenproblem)를 나타내는데,  $\phi$ 의 계수들의 행렬식이 소멸하는 경우에만 즉 식 (3)을 만족하는 경우에  $(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \dots, (\omega_n^2, \phi_n)$ 의 고유해를 갖게 된다.

$$K\phi = \omega^2 M\phi \tag{2}$$

$$\Delta(\omega^2) = |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = 0 \tag{3}$$

여기서  $\Delta(\omega^2)$ 는 특성행렬식(characteristic determinant)으로 불리며 이 식은  $n$ 개의 뚜렷한 근을 갖는데 이 근들을 고유값(eigenvalue)라고 부른다.  $n$ 개의 근을  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ 라고 표시를 하며 이들의 양의 제곱근  $\omega_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )는 고유 진동수이다.

고유 진동수들은 크기가 증가하는 순서로 즉  $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ 로 배치할 수 있다. 가장 낮은 진동수  $\omega_1^2$ 은 기본 진동수(fundamental frequency)로 알려져 있으며 실제의 많은 문제들에 있어서 가장 중요한 값이다.

각 고유 진동수에 대응하는 고유벡터들은 모드벡터들로 불리는데 물리적으로 소위 말하는 고유 모드를 나타낸다. 이들 벡터들의 요소 그 자체의 값들은 임의의 값을 가지지만 두 개의 어떤 요소 사이의 비가 상수로 일정하다는 점에서 유일하다고 할 수 있다. 그러므로 고유 모드들의 모양은 유일하지만 진폭은 그렇지 못하다. 모드벡터들은 식 (4)와 같이 모드행렬(modal matrix)로 알려진  $n$ 차의 정방행렬  $\Phi$ 로 편리하게 재배치할 수 있다. 고유값 행렬  $\Omega^2$ 은 크기 순으로 정렬된  $\omega_i^2$ 을 대각성분으로 갖는다. 고유 모드들의 요소들을 조정하여 진폭을 유일하게 만드는 정규화 방법으로는 식 (6)을 사용한다.

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n] \tag{4}$$

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\phi_i^T M \phi_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

고유 모드들은 직교성(orthogonality)으로 알려진 아주 중요하고 유용한 성질을 포함하고 있다. 여기서 직교성은 일반적인 것은 아니고 질량행렬과 강성행렬에 대한 직교성이다. 그러므로 모드들이 식 (6)에 의해서 정규화되면 모든 모드벡터들은 질량행렬에 대하여 정규직교화(orthonormalized)가 되어 다음 성질을 만족한다. 여기서  $I$ 는 단위행렬이다.

$$\Phi^T M \Phi = I, \quad \Phi^T K \Phi = \Omega^2 \tag{7}$$

이와같이 비감쇠 자유진동 방정식으로부터 유도된 모드벡터는 고유 진동수에 의해 순서화된(frequency-ordered) 직교 좌표계를 생성하게 된다. 고유 모드에 의한 좌표계는 실제 변위의 조합으로 이루어져 있는데 역으로 형상 복원 과정을 고유 좌표계의 중첩으로 표현할 수 있다. 물리적으로 이것은 시스템의 어떤 운동이라도 고유 모드들에 적당한 상수들을 곱한것들의 중첩으로 간주할 수 있음을 의미하는데 여기서 상수들은 운동에서의 각 모드의 참여

도를 나타낸다. 낮은 진동수의 모드들은 전체적인 모습을 찾아내는데 주로 영향을 미치고, 높은 진동수의 모드들은 국부적인 모습을 찾아내는데 영향을 미친다.

### 3. 고유 모드를 이용한 모달 모델

모드해석방법은 그 가진력이 초기 변위와 초기 속도가 주어진 초기 기진의 형태이거나 아니면 외부로부터 작용하는 힘이건 간에 비감쇠계의 응답을 유도하는데 사용할 수 있다. 모드해석방법의 모드행렬을 사용하면 운동 방정식을 변환하여 독립화된 방정식의 집합으로 만들 수 있다. 즉, 모드행렬  $\Phi$ 에 의해 노드변위벡터  $U$ 를 모드변위벡터  $\tilde{U}$ 로 변환 ( $U = \Phi \tilde{U}$ )하고, 질량행렬  $M$ 과 강성행렬  $K$ 를 대각행렬  $\tilde{M}$ 과  $\tilde{K}$ 로 변환하여 식 (8)을 얻게된다.

$$\begin{aligned} \tilde{M} \ddot{\tilde{U}} + \tilde{K} \tilde{U} &= \tilde{F} \\ \tilde{M} &= \Phi^T M \Phi, \quad \tilde{K} = \Phi^T K \Phi, \quad \tilde{F} = \Phi^T F \end{aligned} \quad (8)$$

기하학적 형상과 고유모드를 이용한 물리적 특성이 결합된 통합된 모델을 위해서 먼저 초기 참조형태와 동일한 크기의 유한요소인 타원체를 생성하고, 이를 원하는 레벨로 삼각 분할한 후 삼각형 꼭지점들을 노드점으로 사용한다. 노드의 갯수는 정확도와 처리 시간을 고려해서 삼각분할의 레벨에 따라 결정할 수 있다. 이러한 노드들의 위치는 샘플링된 정점들의 위치로부터 계산되어지는 가상적인 힘에 따라 움직이게 된다. 유한요소에 의한 접근방법의 주된 장점 중의 하나는 임의의 점에서의 변위와 노드점에서의 변위를 보간함수를 사용하여 직접 연관시켜준다는 점이다. 이때 보간함수  $h_i$ 는  $i$  노드점에서의 값이 1이면 요소 내의 다른 모든 노드점들에서의 값은 0이 되는 특성을 가지고 있다. 즉, 연속적인 보간함수  $h_i$ 는 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.

[ 조건 1 ] 노드  $i$ 에서의 값은 1이고 다른 모든 노드들에서는 0의 값을 갖는다.

[ 조건 2 ] 임의의 점에서  $\sum_i h_i = 1$  을 만족한다.

본 연구에서는 대상 물체로부터 샘플링된 많은 점들로부터 고유 모드를 찾아내고 이를 기반으로 3차원 형상간의 유사성을 판단하고자 한다. 초기형상을 샘플링된 정점들에 적합해나가기 위해 노드점들의

위치를 변화시키기 위해서는 강성행렬과 질량행렬을 샘플링된 정점 위주로 재구축하여야 한다. 이런 경우에 이상적인 형태의 보간함수로 가우시안 함수를 사용할 수 있다. 본 논문에서는 일반적인 보간함수의 특성[16]을 만족하고, 노드들의 위치 이동을 효율적으로 계산할 수 있도록 다음 식을 노드 간 보간함수로 사용한다.

$$g_i(x, y, z) = e^{-[(x-x_i)^2/2\sigma_x^2 + (y-y_i)^2/2\sigma_y^2 + (z-z_i)^2/2\sigma_z^2]} \quad (9)$$

식 (9)에서  $x_i, y_i, z_i$ 는 각각  $x, y, z$  축에서의 중심이고,  $\sigma$ 는 표준편차(standard deviation)이다. 이때  $i$  번째 노드에서의 보간함수  $h_i$ 는 식 (10)과 같이 정의된다.

$$h_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^n q_{ik} g_k(x, y, z) \quad (10)$$

$n$ 은 유한요소에서 노드의 수이고,  $q_{ik}$ 는 한 노드 점에서의 값이 1이면 다른 모든 노드점들의 값이 0이 되게하는 계수이다. 여기서 보간계수행렬은 행렬  $G$ 의 역행렬이 된다.

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1, z_1) & \dots & g_1(x_n, y_n, z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ g_n(x_1, y_1, z_1) & \dots & g_n(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix} \quad (11)$$

그러나 위의 가우시안 기반 보간함수는 non-conforming 하게 된다. 즉, 보간함수의 일반적인 특성인 [조건 2]를 만족하지 않게 된다. 만일 [조건 2]를 만족시키는 conforming 요소들이 요구되는 경우에는  $h_i$ 에 정규화 항을 포함시킨 식 (12)를 사용할 수 있다. 본 논문에서의 형상 비교를 위해서는 conforming 보간함수를 사용하거나 non-conforming 보간함수를 사용하는 두 경우에 별다른 차이점을 보이지 않았기 때문에 간단한 형태의 non-conforming 보간함수를 사용하였다.

$$h_i(x) = \frac{\sum_{k=1}^n q_{ik} g_k(x, y, z)}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{jk} g_k(x, y, z)} \quad (12)$$

물체의 질량, 밀도, 볼륨을 측정하는 방법은 다양하나 본 논문에서는 사용자가 먼저 대상 물체의 질량 밀도(mass density)  $\rho$ 를 결정하고, 그리고 나서 물체의 질량을 볼륨으로부터 추정한다. 밀도를 결정하고 나면 질량행렬  $M$ 은 식 (13)처럼 보간행렬  $H$

를 바탕으로 구성한다.

$$M = \int_V \rho H^T H dV = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$M_{11} = M_{22} = M_{33}$$

부분행렬  $M_{11}, M_{12}, M_{13}$ 는 양정수 대칭행렬(positive definite symmetric)로 요소들은 다음 식에 의해 계산한다.  $q_{ik}$ 와  $q_{jl}$ 은 보간계수이고,  $g_k$ 와  $g_l$ 은 식 (9)와 같다.

$$m_{ij} = \rho \int_V \sum_{kl} q_{ik} q_{jl} g_k(x, y, z) g_l(x, y, z) dV \quad (14)$$

식 (15)와 같은 가우시안 적분을 사용하면 식 (14)는 식 (15)가 된다. 여기서  $g_{kl}$ 은 행렬  $G$ 의 요소로써  $g_i(x_j, y_j, z_j)$ 을 의미한다.

$$\int_V g_k(x, y, z) g_l(x, y, z) dV = \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 \sqrt{g_{kl}} \quad (15)$$

$$m_{ij} = \rho \pi^{\frac{3}{2}} \sigma^3 \sum_{kl} q_{ik} q_{jl} \sqrt{g_{kl}} \quad (16)$$

강성행렬  $K$ 를 구하기 위해서는 먼저 스트레인 보간행렬  $B$ 를 구해야한다. 3차원 유한요소의 노드에서 스트레인은  $\epsilon = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T$ 로 정의된다.  $u = (u, v, w)$ 는 노드에서의 변위벡터이다.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (18)$$

대응하는 스트레인 변위행렬  $B$ 는 보간함수  $h_i$ 를 적절히 미분함으로써 구할 수 있다. 3차원에서  $B$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial x} h_n & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & \frac{\partial}{\partial y} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial y} h_n & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \frac{\partial}{\partial z} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial z} h_n \\ \frac{\partial}{\partial y} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial y} h_n & \frac{\partial}{\partial x} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial x} h_n & 0 \cdots 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial z} h_n & 0 \cdots 0 & \frac{\partial}{\partial x} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial x} h_n \\ 0 \cdots 0 & \frac{\partial}{\partial z} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial z} h_n & \frac{\partial}{\partial y} h_1 \cdots \frac{\partial}{\partial y} h_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} h_i = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^m (x_k - x) a_{ik} g_k(x, y, z)$$

물체가 등방성(isotropic)이라는 가정을 할 경우 물질의 특성을 나타내는 즉 스트레스(stress)와 스트레인(strain) 관계를 표현하는 행렬  $C$ 로 식 (20)를 사용할 수 있다[16].  $\alpha, \beta, \xi$ 는 탄성계수  $E$ 와 푸아송 비율(Poisson ratio)  $\nu$ 로 구성된 함수이다.

$$C = \beta \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \beta = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \xi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (21)$$

위와 같이 스트레인 변위행렬  $B$ 와 구성물질의 특성을 나타내는 행렬  $C$ 가 구해지면 3차원 강성행렬  $K$ 를 식 (22)에 의해 계산할 수 있다. 강성행렬은 대칭행렬로써  $K_{12}^T = K_{21}, K_{31}^T = K_{13}, K_{23}^T = K_{32}$ 을 만족한다. 또한 가우시안 함수를 사용하기 때문에  $K_{12} = K_{21}, K_{13} = K_{31}, K_{23} = K_{32}$ 는 같게된다.

$$K = \int_V B^T C B dV = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$K_{11} = \beta \int_V \sum_{ik} q_{ik} q_{ji} \left[ \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial z} \right] dV$$

$$K_{22} = \beta \int_V \sum_{ik} q_{ik} q_{ji} \left[ \xi \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial z} \right] dV$$

$$K_{33} = \beta \int_V \sum_{ik} q_{ik} q_{ji} \left[ \xi \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial x} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial z} \right] dV$$

$$K_{12} = \beta \int_V \sum_{ik} q_{ik} q_{jl} \left[ \alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial y} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dV$$

$$K_{13} = \beta \int_V \sum_{ik} q_{ik} q_{jl} \left[ \alpha \frac{\partial g_k}{\partial x} \frac{\partial g_l}{\partial z} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial x} \right] dV$$

$$K_{23} = \beta \int_V \sum_{ik} q_{ik} q_{jl} \left[ \alpha \frac{\partial g_k}{\partial y} \frac{\partial g_l}{\partial z} + \xi \frac{\partial g_k}{\partial z} \frac{\partial g_l}{\partial y} \right] dV$$

위와 같이 질량 및 강성행렬을 구한 다음, 질량과 강성행렬에 대한 고유 벡터로 이루어진 모드행렬  $\Phi$ 를 구한다. 모드행렬  $\Phi$ 가 구해지면 동적 평형방정식에서의 노드변위벡터  $U$ 를 모드변위벡터  $\bar{U}$ 로 변환 ( $U = \Phi \bar{U}$ )하고, 질량행렬  $M$ 과 강성행렬  $K$ 를 대

각행렬  $\tilde{M}$  ( $\tilde{M} = \Phi^T M \Phi$ )과  $\tilde{K}$  ( $\tilde{K} = \Phi^T K \Phi$ )로 변환할 수 있다.

#### 4. 모달 스트레인 에너지

앞 장에서 제시한 모달 모델은 물체의 형상을 복원함과 동시에 계산된 모드 진폭( $\tilde{u}$ )을 통해 복원하는데 사용된 스트레인 에너지(strain energy)를 구할 수 있다. 즉, 모드  $i$ 에서의 스트레인 에너지  $E_{mode\ i}$ 는 식 (23)과 같이 계산된다.  $\omega$ 는 고유진동수이다.

$$E_{mode\ i} = \frac{1}{2} \tilde{u}_i^2 \omega_i^2 \quad (23)$$

그러나 위의 스트레인 에너지는 미터법에서 일반적으로 사용되는 세 가지 공리 중의 대칭성을 나타내는 [공리 2]를 만족하지 않는다.

- [공리 1]  $\delta(A, B) \geq \delta(A, A) = 0$
  - [공리 2]  $\delta(A, B) = \delta(B, A)$
  - [공리 3]  $\delta(A, B) + \delta(B, C) \geq \delta(A, C)$
- $\delta()$  : metric distance function

크기가 다른 두 물체  $A$ 와  $B$ 가 있을 때  $A$ 에서  $B$ 로 변하는 에너지와  $B$ 에서  $A$ 로 변하는 스트레인 에너지는 서로 다르게 된다. 즉,  $\delta(A, B) \neq \delta(B, A)$ 이다. 그 차이는 물체 크기의 차에 반비례하게 된다. 그러므로 크기가 다른 3차원 물체를 비교하기 위해서는 스트레인 에너지를 물체의 볼륨 크기( $V$ )로 나누어줌으로써  $\delta(A, B)$ 와  $\delta(B, A)$ 의 차를 가능한 줄이도록 한다.

그리고  $B$ 가  $A$ 와  $C$ 의 직선 상에 있다면 일반적으로 [공리 3]에서  $\delta(A, B) + \delta(B, C) = \delta(A, C)$  성질을 만족해야 한다. 그래서 본 논문에서의 에너지 계산에서는 스트레인 에너지의 제곱근을 취한다. 즉, 복원하는데 사용된 에너지는 식 (24)에 의해 계산된다. 식 (24)에서  $n$ 은 복원하는데 사용된 모드의 수이다.

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2V} \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i^2 \omega_i^2} \quad (24)$$

이러한 모달 스트레인 에너지는 3차원 형상의 유사성을 측정하는 기준을 제공할 수 있다. 모달 스트레인 에너지를 이용한 3차원 형상간의 유사도 측정

의 처리 단계는 그림 1과 같다. 점선 안의 부분은 단일 물체의 3차원 형상 복원을 위한 처리 단계이고, 나머지 부분은 다른 물체로 변형 될 때의 모달 스트레인 에너지를 측정하기 위한 부분이다. 3차원 형상 복원을 위해서는 먼저 3차원 점 집합으로부터 기하학적 중심과 주축을 구한다. 변형 모델의 초기 참조 형태를 생성한 후 계산된 중심으로 위치 이동하고, 계산된 주축에 의해 회전한다. 그리고 초기 참조 형태를 원하는 레벨로 삼각 분할하고, 유한요소의 노드점을 변형 모델에 겹쳐 놓는다. 그리고 나서 유한요소의 질량 및 강성 행렬을 계산한다. 변형 모델과 입력된 3차원 점들과의 대응관계는 양방향 최단 거리를 사용하여 결정하고, 이를 통해 가상적인 힘의 크기를 계산한다. 형상 복원을 위한 모드변위벡터는 가중최소제곱법을 사용하여 식 (25)와 같이 계산한다.

$$(W\Phi)\tilde{U} = (p_\mu - p'_\mu) \quad (25)$$

$\Phi$ 는 보간된 모드변환행렬(modal transform matrix)로써  $\Phi = H\mathcal{O}$ 를 나타낸다. 이는 유한요소의 노드점에서의 변위와 모델 표면 상의 점들의 변위가 어떠한 관련이 있는가를 설명해 준다. 모델 표면의 한 점을  $p_\mu$ 라 할 때, 가상적인 힘에 의해 당겨지거나 밀려진 위치를  $p'_\mu$ 로 표시하였다.  $p'_\mu$ 의 위치는 변형 모델 표면의 점들과 입력점들 간의 양방향 최단거리 대응에 의해 추정한다.

각 단계에서의 형태는 모드변위벡터들만으로 표현될 수 있다. 그리고  $U = \Phi\tilde{U}$ 에 의해 모드변위벡터  $\tilde{U}$ 는 노드변위벡터  $U$ 로 변환되어진다. 각 단계에서의 복원된 모델의 표면점은 보간함수에 의해 노드변위벡터로부터 그 위치를 계산한다. 반복 횟수  $N$ 은 사용자에게 의해 지정될 수 있으나 실험한 결과에 의하면 2번 또는 3번 정도에서 전체적인 형상을 복원해 내었다. 이때 매 반복 때마다 노드 위치를 계산된 노드 변위 만큼 자동으로 이동시킨다. 지정된 반복 횟수 후에 복원된 변형 모델로부터 모달 스트레인 에너지를 계산한다.

다른 물체로 변형 될 때의 모달 스트레인 에너지를 측정하기 위해서는 변형시키하고자 하는 물체의 3차원 점들(점 집합 2)에 대한 중심과 주축을 계산한다. 그리고 현재의 변형 모델(변형 모델 1)을 새로이 구한 중심으로 위치 이동시키고, 새로운 주축으로 회

전시킨다. 그리고 나서 변형 모델 1과 점 집합 2와의 대응 관계를 양방향 최단 거리 대응법에 의해 결정하고 가상 힘을 계산한다. 다음 작업은 형상 복원에서와 동일하고 마지막으로 점 집합 2로의 모달 스트레인 에너지를 계산한다.

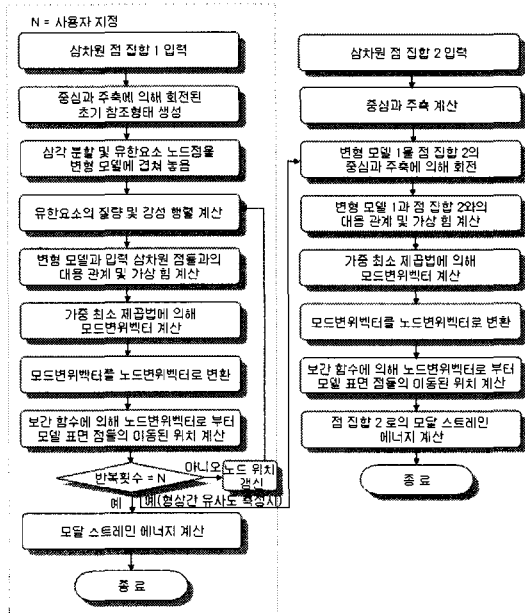


그림 1. 모달 스트레인 에너지를 이용한 3차원 형상간의 유사도 측정

### 5. 실험 및 결과

본 논문의 실험에서는 먼저 모델링 틀에 의해 생성된 3차원 모델들로부터 추출된 3차원 정점들을 이용하여 제안 모달 모델로 재구성 한 후 모달 스트레인 에너지를 이용하여 형상 비교를 수행하였다. 사용한 3차원 모델은 인터넷에서 다운로드 받거나 3D Studio Max를 이용하여 생성하였다.

그림 2는 3차원 모델에서 정점만을 추출한 후 모달 모델로 재구성한 결과를 보여준다. 입력 데이터는 흰 바탕에 검은 점들로 표시되었고 이차원적으로 투영되어 보여진다. 입력 점 영상의 오른쪽에는 초기 참조 모델과 첫 번째, 두 번째 반복에서의 결과들을 보여준다. 모델링 틀에 의해 생성된 모델로부터 추출된 점 데이터는 일반적으로 점들 간의 간격이 전체적으로 균일하지 않고, 부분적으로 데이터가 부족한 불안정한 점 집합이 대부분이다. 또한 동일한 형상이면서도 서로 다른 삼각화된 메쉬 구조를 갖는 경우도 있다. 이러한 경우에도 추출된 정점들로부터 재구성된 모달 모델은 정점 데이터가 있는 부분에 적합하면서 정점 데이터가 없는 부분에 대해서는 탄성력을 바탕으로 적절하게 형상을 표현한 것을 볼 수 있다. 그림 2 (d)의 브랜드 잔의 밑 부분 역시 적은 입력 데이터에도 불구하고 정교한 형태로 재구성하는 것을 볼

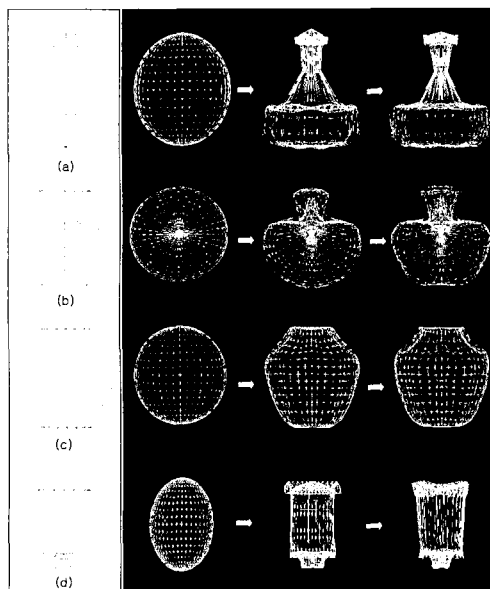


그림 2. 입력 정점 데이터로부터 모달 모델로 재구성

수 있다. 표 1은 그림 2에서 사용한 3차원 모델의 정점들로부터 모달 모델로 재구성될 때의 정점의 수, 모드의 수, 처리 시간을 보여준다. 표 1에서 형상 복원을 위한 모드 수와 모델의 삼각분할 레벨(정점의 수와 면의 수 결정)은 형상의 복잡도에 따라 지정되었다. 예를 들어, 삼각분할 레벨의 파라미터로 32가 주어지면 1986개의 점과 3968개의 면을 가진 초기 참조모델을 생성하고, 삼각분할 레벨의 파라미터로 20이 주어지면 762개의 점과 1520개의 면을 가진 초기 참조 모델을 생성하게 된다. 일반적으로 삼각분할 레벨은 보다 정확한 형상을 원할수록 높은 파라미터를 지정하고, 입력된 데이터 정점의 수보다 많은 정점을 가진 초기 참조모델을 생성하도록 하였다. 실험 결과 걸린 시간은 주로 고유모드 수에 영향을 받았고, 모델 데이터의 점의 수가 많을수록 처리 시간이 증가했다. 이는 고유모드 수에 따라 질량행렬 및 강성행렬을 계산하는데 소요되는 시간이 증가하기 때문이다.

그림 3은 샘플 모델로부터 비교 모델로 변형될 때의 스트레인 에너지를 고유진동수가 적은 20개 모드를 사용하여 비교한 결과이다. 오른쪽의 모달 스트레인 에너지 그래프에서 낮은 진동수에 대응하는 고유 모드들은 전체적인 형상과 관련이 있고, 높은 진동수에 대응하는 고유 모드로 갈수록 국부적인 형상과 관련이 있다. 그러므로 본 연구에서는 국부적인 형상에 영향을 받지 않고, 계산 시간을 줄이기 위하여 고유진동수에 따라 순서화된 고유 모드 중 고유진동수가 적은 20개 모드에서의 스트레인 에너지 합을 구하고 이를 형상 비교 측도로써 사용하였다. 이렇게 순서화된 고유진동수와 그와 관련된 고유 모드들은 서로 짝이 되어 3차원 형상에 대한 유일한 특성을 표현할 수 있다. 그림 3의 흰 박스안의 샘플 꽃병에서 (a)와 (b)로 각각 변형될 때의 에너지를 비교해 보면 샘플

표 1. 모달 모델로 재구성 : 정점의 수, 모드의 수, 처리 시간

입력 모델	모달 모델		
	정점의 수	모드의 수	처리 시간 (sec)
(a)	384	762	130
(b)	576	762	145
(c)	480	762	134
(d)	210	762	123

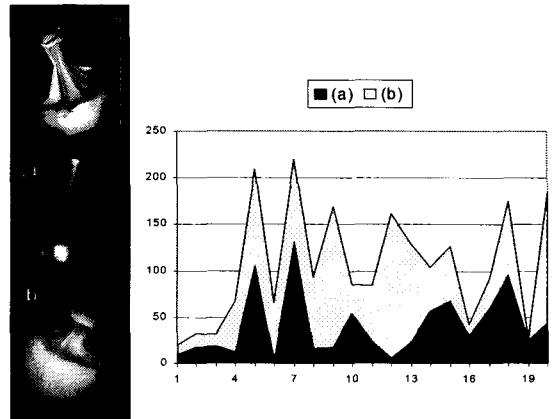


그림 3. 모달 스트레인 에너지를 이용한 형상 비교

플 꽃병으로부터 (a)의 꽃병으로 변형될 때의 스트레인 에너지는 812.7이고, (b)의 꽃병으로 변형될 때의 스트레인 에너지는 1302.8이다. 이로부터 스트레인 에너지가 적은 (a)의 꽃병을 샘플 꽃병과 더 유사하다고 판단할 수 있다. 여기서 스트레인 에너지는 포즈 정규화(pose normalization) 후 계산되어진 값으로 크기변환 및 회전에 영향을 받지 않는다.

그림 4는 가장 낮은 진동수의 고유 모드부터 추가 적용하여 하나 하나의 3차원 형상에 대한 모달 모델을 재구성한 결과이다. 그림 4로부터 알 수 있듯이 낮은 진동수의 모드들은 전체적인 형상을 찾아내는데 주로 영향을 미치고, 높은 진동수의 모드들은 국부적인 모습을 찾아내는데 영향을 미친다. 210 모드를 사용한 (e)에서는 전체적인 바나나 형상을 복원하고, 258 모드를 사용한 영상 (f)에서는 보다 세밀한 부분까지 복원한 결과를 볼 수 있다.

그림 5는 정점 데이터들로부터 모달 모델로 재구성된 여러 형상들을 보여준다. 그림 6은 그림 5 (a) 꽃병을 샘플로 선택했을 때 각 모델별 스트레인 에너지를 보여주는 그래프이다. 이때 가장 적은 스트레인 에너지가 필요한 (e) 꽃병을 (a) 꽃병과 가장 유사하다고 판단할 수 있다. 그림 7은 그림 5 (i)의 사과를 샘플로 선택했을 때 각 모델별 스트레인 에너지를 보여주는 그래프로 유사한 모델로는 (c)와 (b)와 같이 등근스런 부분이 포함된 형상 모델들이 선택되었다. 모달 스트레인 에너지를 이용하여 삼차원 형상을 비교한 실험 결과 육안으로 느끼는 것과 대부분 일치하였다. 특히, 유사성을 정량적인 에너지 그래프로 보여줌으로써 샘플 모델과 유사한 물체 또는 유사하지 않는 물체를 순서화하는 것이 가능해졌다.



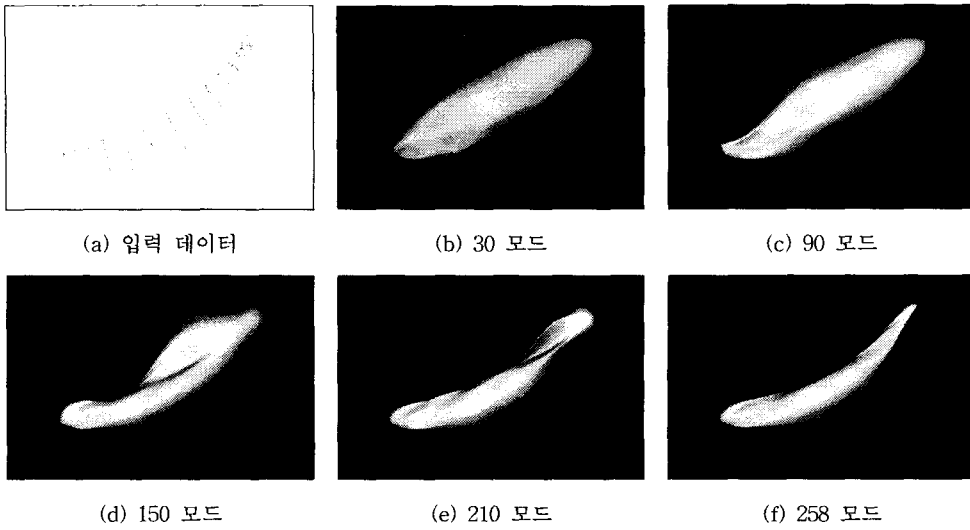


그림 4. 고유모드 수에 따른 모달 모델

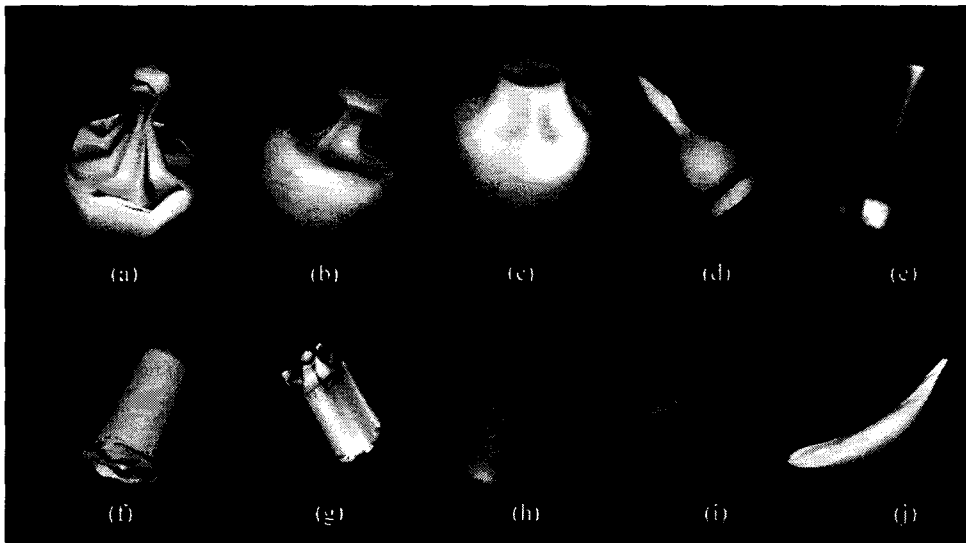


그림 5. 형상 비교 실험 : 모달 모델

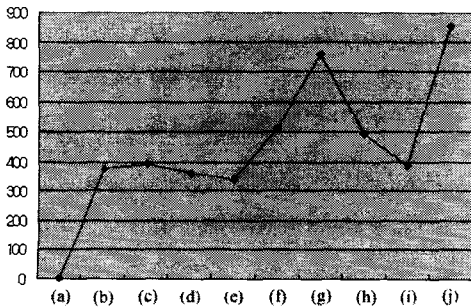


그림 6. 스트레인 에너지 그래프 : 샘플 모델 (a)

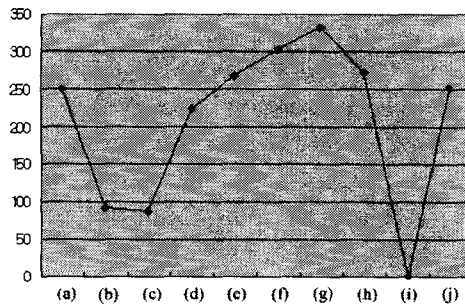


그림 7. 스트레인 에너지 그래프 : 샘플 모델 (i)

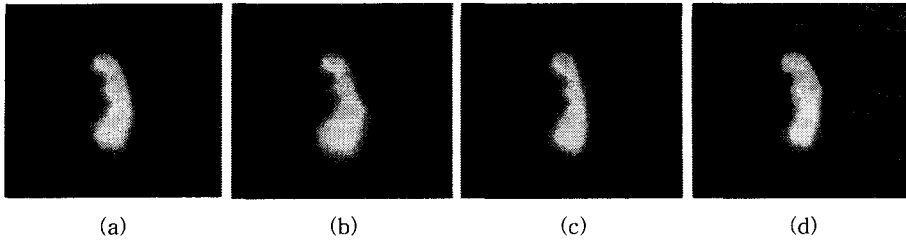


그림 8. 사용된 모델 예 : 신장

표 2. 볼륨, 중심거리, 곡률, 스트레인 에너지에 따른 형상 비교

	볼륨 차	거리	곡률 차	스트레인 에너지	순위
신장(3배 확대)	0.0	0.0	0.0	0.0	1
신장(5배 축소)	0.0	0.0	0.0	0.0	1
폐	45.7	23.7	1.0	156.5	7
+10%(상부)	33.8	4.2	0.9	48.7	5
-10%(상부)	10.0	4.5	0.9	20.2	3
+20%(상부)	34.3	5.0	1.0	55.1	6
-20%(상부)	10.5	7.3	0.9	24.7	4

또한 본 논문에서는 스트레인 에너지를 이용한 결과와 3차원 모델의 실루엣 영상을 이용하여 볼륨, 중심거리, 곡률을 측정된 결과와 비교하는 실험을 수행하였다. 그림 8은 비교 실험에 사용한 신장 모델의 몇 가지 예로써 (a)는 신장 표준 모델이고, (b)는 하부를 0.2배 확대한 모델. (c)는 상부를 0.2배 축소한 모델, (d)는 하부를 0.2배 축소한 모델이다. 표 2는 실험 결과 중 표준 모델에 전체 크기가 3배 확대, 5배 축소, 그리고 부분적으로 크기를 변형시킨 모델에 대한 유사성 비교 평가 결과를 수치로 보여준다. 스트레인 에너지를 이용한 결과는 볼륨, 중심거리, 곡률 차가 클수록 비례해서 큰 것으로 나타나 부분적인 형상 변형 실험에서도 스트레인 에너지를 이용한 형상 비교가 안정적임을 보여주었다.

## 6. 결론 및 향후연구

본 논문에서는 3차원 형상 모델간의 유사성을 평가하기 위하여 점점 데이터로부터 모달 모델로 재구성하는 방법과 모달 스트레인 에너지를 이용하는 방법을 제안하였다. 진동의 고유 모드를 이용한 모달 모델은 고유 진동수에 따라 고유 모드들을 순서화함으로써 형태 변형을 전역적인 것에서부터 지역적인 것으로 체계화할 수 있다. 이렇게 체계화된 형상

표현과 모달 스트레인 에너지를 이용하여 3차원 모델간의 유사성 비교에서 국부적인 형태에 치우치지 않고 전체적인 형태를 비교할 수 있었다. 제안 방법은 3차원 모델을 구성하는 메쉬들의 누락, 삽입, 그리고 동일한 모델이면서도 서로 다른 삼각화된 메쉬 구조를 갖는 경우에도 강인한 특성을 갖으며, 3차원 모델의 이동, 회전, 스케일 등에 민감하지 않는 특성을 갖는다. 실험 결과 제안 방법은 전체 변형과 부분 변형에 강인하고, 유사 모델과 그렇지 않은 모델간의 차이를 정량적으로 평가할 수 있었다.

본 논문에서 제안한 모델은 3차원 형상을 닫힌 형태(closed form)로 표현함으로써 구체와 같은 위상(topology)을 갖는 대상 물체에 적합하다. 이는 입력 데이터가 불완전한 데이터에서도 전체적인 탄성력에 의해 적절히 재구성하고 형상을 비교하기 위함이지만 다양한 위상을 갖는 모델에 적용하기 위해서는 제안 모델의 위상을 여러 형태로 변경시킬 수 있는 방법이 필요하다. 이를 위해 대상 물체에 따라 사용자가 위상을 선택하거나 혹은 자동적으로 위상을 변경해 나갈 수 있는 방법들에 대한 향후 연구가 필요하다.

## 참고 문헌

[1] B. Horn, "Extended gaussian images", Proc.

- of the IEEE, Vol. 72, No. 12, pp. 1671-1686, 1984.
- [ 2 ] D. Zhang and M. Hebert, "Harmonic maps and their applications in surface matching", IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR '99), 1999.
- [ 3 ] T. Binford, "Visual perception by computer", IEEE Conference on Systems Science and Cybernetics, 1971.
- [ 4 ] S. Skiena, W. Smith and P. Lemke, "Reconstructing sets from interpoint distances", Proc. of Sixth Annual Symp. on Computational Geometry, pp. 332-339, 1990.
- [ 5 ] E. Bardinet, S.F. Vidal, S.D. Arroyo, *et al.*, "Structural object matching", Technical Report DECSAI-000303, Dept. of Computer Science and AI, University of Granada, Spain, Feb. 2000.
- [ 6 ] J. Bloomenthal and C. Lim, "Skeletal methods of shape manipulation", Shape Modeling and Applications, pp. 44-47, 1999.
- [ 7 ] M. Hilaga, Y. Shinagawa, T. Kohmura and T.L. Kunii, "Topology Matching for Fully Automatic Similarity Estimation of 3D Shapes", The proceeding of SIGGRAPH 2001, pp. 203-212, 2001.
- [ 8 ] R. Osada, T. Funkhouser, B. Chazelle and D. Dobkin, "Matching 3D Models with Shape Distribution", Proc. Shape Modeling Int'l, 2001.
- [ 9 ] J. Christensen, J. Marks and J.T. Ngo, "Automatic motion synthesis for 3D mass-spring models", The Visual Computer, Vol. 13, pp. 20-28, 1997.
- [10] L.P. Nedel and D. Thalmann, "Real time muscle deformation using mass-spring systems", Proceedings of Computer Graphics International (CGI98), pp. 156-165, 1998.
- [11] J.P. Gourret, N.M. Thalmann and D. Thalmann, "Simulation of object and human skin deformations in a grasping task", Computer Graphics Proceedings, ACM SIGGRAPH, pp. 21-30, 1989.
- [12] D. Chen and Zeltzer, "Pump it up: computer animation of a biomechanically based model of muscle using the finite element method", Computer Graphics Proceedings, ACM SIGGRAPH, pp. 89-98, 1992.
- [13] I. Essa, S. Sclaroff and A. Pentland, "A unified approach for physical and geometric modeling for graphics and animation", Proceedings of Eurographics, Vol. 11, pp. 129-138, 1992.
- [14] M. Bro-Nielsen and S. Cotin, "Real-time volumetric deformable models for surgery simulation using finite elements and condensation", Proceedings of Eurographics, Vol. 15, pp. 57-66, 1996.
- [15] Q.H. Zhu, Y. Chen and A.E. Kaufman, "Real-time Biomechanically-based Muscle Volume Deformation using FEM", Computer Graphics Forum, Vol. 17, No. 3, pp. 275-284, 1998.
- [16] K. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.



최 수 미

1993년 이화여자대학교 전자계산학과(이학사)  
 1995년 이화여자대학교 전자계산학과(이학석사)  
 2001년 이화여자대학교 컴퓨터학과(공학박사)  
 2001년~2002년 이화여자대학교

정보통신연구소 연구전임강사

2002년~2004년 세종대학교 컴퓨터공학부 전임강사  
 2004년~현재 세종대학교 컴퓨터공학부 조교수  
 관심분야 : 컴퓨터 그래픽스, 가상·증강현실, 의료영상  
 가시화