

입자 속도 및 인텐시티를 공간 영역에서 이산화할 때 발생하는 오차 Particle Velocity and Intensity Estimation Error in Spatial Discrete Domain

최영철* · 김양한*

Young-Chul Choi and Yang-Hann Kim

(2004년 2월 19일 접수 : 2004년 3월 27일 심사완료)

Key Words : Error Analysis(오차해석), Velocity(속도), Intensity(인텐시티)

ABSTRACT

This paper studies the errors that associated with particle velocity and intensity in a space. We theoretically derived their bias error and random error. The analysis shows that the more samples do not always guarantee the better results. The random error of the velocity and intensity are increased when we have many samples. The characteristics of the amplification of the random error are analyzed in terms of the sample spacing. The amplification was found to be related to the spatial differential of random noise. The numerical simulations are performed to verify theoretical results.

1. 서론

센서를 통하여 측정된 신호에는 센서간 특성차이에 의한 오차, 측정위치 부정확성에 의한 오차 등 여러 요인에 의해 오차가 존재할 수 있으며 또한 배경 잡음 등 여러 가지 잡음 등이 신호와 함께 측정된다. 이러한 오차와 잡음은 측정된 물리량을 기반으로 다른 물리량(예: 측정된 음압을 이용하여 인텐시티를 추정)들을 예측할 때 큰 오차를 발생시킬 수 있다. 예를 들면 음향 홀로그래피에서 측정오차는 음원면과 홀로그래피면 사이의 공간에서 음장을 예측하는 후방예측(backward prediction)을 할 때, 큰 오차를 발생시킴은 잘 알려져 있다.⁽¹⁾ 이러한 오차를 해석하기 위해 남경욱⁽²⁾ 등은 평면 음향 홀로그래피에서 측정오차의 원인이 공간에 위치한 센서들 사이에서 불규칙

할 경우에 임의의 점에서 음압 오차에 대해 연구한 바 있다. 홀로그래피면에서의 랜덤 오차가 후방 예측 시 큰 오차를 유발시킴을 이론적으로 증명하였다. 중요한 사실은 바이어스 오차는 음장 예측에 전혀 영향을 주지 않는다는 사실이다.

음압 신호로부터 예측하는 속도 및 인텐시티는 공간 미분 항이 들어 있기 때문에 공간 샘플링 간격을 작게 하여 오차를 줄일 수 있는 것으로 알려져 있다.^(3,4) 그러나 오차의 원인이 공간에 불규칙하게 분포할 경우 속도 및 인텐시티의 오차가 구체적으로 어떠한 형태이며 실질적으로 그 오차를 줄일 수 있는 방법이 무엇인가에 대한 것은 알려져 있지 않다. 주목할만한 사실은 공간상의 속도, 혹은 인텐시티 관련 오차는 한 지점에서 발생하는 오차에 대한 개념보다는 공간에 분포된 속도, 혹은 인텐시티에 대한 소위 "분포된 오차"의 개념이 필요하다는 것이다.

이러한 점에 착안하여 음압신호에 측정오차가 존재할 경우 입자속도 및 인텐시티를 예측할 때 발생하는 오차에 대해 정량적으로 살펴 보기로 한다. 특히 여러 파라미터 중 공간 샘플링 간격이 이러한 오차에 어떠한 영향을 미치는지에 대해 중점적으로 살펴보기로 한다.

† 책임저자 : 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : youngcc@kaist.ac.kr

Tel : (042) 869-3065, Fax : (042) 869-8220

* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

2. 오차가 입자 속도 및 인텐시티에 미치는 영향

입자속도 및 인텐시티는 선형 음향 계의 경우 오일러(Euler) 식을 이용하여 측정된 음압을 공간 미분함으로써 추정할 수 있다.^(3,4) 이때 공간 샘플링 간격을 좁게 하여 많은 데이터를 얻으면 속도 및 인텐시티를 예측할 때 오차가 줄어드는 것으로 알려져 있다.^(3,4)

이해를 돕기 위해 우선 노이즈 및 오차가 없는 1차원 평면파에 대한 예를 들어 보자. 정상상태(steady-state)에서 어느 한 주파수의 임의 위치(x)에서의 음압($P(x)$)은

$$P(x) = A \exp(-j k x) \quad (1)$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $P(x)$ 는 공간상의 음압 분포를 나타내고 A 는 음압크기, j 는 허수 그리고 k 는 파수(wavenumber)를 의미한다. 공간상에서 연속적인 음압신호를 측정하는 것은 현실적으로 어렵기 때문에 간격으로 측정하여 입자속도 및 인텐시티를 추정하게 된다. 이때 이산화 과정에 의한 오차가 발생하게 되는데, 각 물리량에 대한 이러한 오차를 정규화 시켜보면 식 (2)와 같이 나타난다.^(3,4)

$$\begin{aligned} e(P) &= \frac{P - P_e}{P} = 1 - \cos(k\Delta) \\ e(U) &= \frac{U - U_e}{U} = 1 - \frac{\sin(k\Delta)}{k\Delta} \\ e(I) &= \frac{I - I_e}{I} \approx \frac{2}{3}(k\Delta)^2 - \frac{2}{5}(k\Delta)^4 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $k\Delta \ll 1$, U 는 속도, I 는 인텐시티를 의미하며, 아래 첨자 e 는 추정된 값을 의미한다. 이러한 오차를 '유한차분 오차'라고 하며, Fig. 1에서 그래프로 설명하고 있다.

식 (2)와 Fig. 1에서 볼 수 있듯이 특정 주파수에서 측정간격이 작을수록, 즉 공간상에 샘플링이 많을수록 오차가 줄어들음을 알 수 있다. 이것은 데이터가 많을수록 좋은 결과를 얻는다는 일반적인 사실과도 일치한다.

이와 같은 결과는 오차 및 잡음이 없는 이상적인 경우에 대한 결과들이다. 그러나 측정 신호에는 여러 가지 원인에 의한 오차 및 잡음이 포함되어 측정되는데, 이때에도 위와 같이 측정 간격을 작게 할수록 항상 좋은 결과를 얻을 수 있을까? 결론부터 말하면 놀랍게도 위의 결과와는 반대로 공간상의 샘플링 간격이 작아 질수록 오차가 커지게 된다.

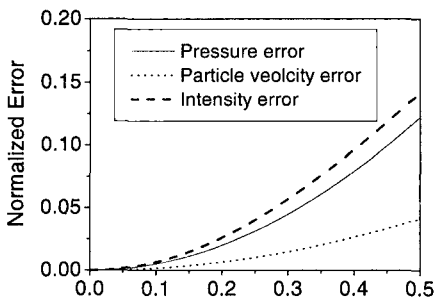


Fig. 1 Systematic intensity error as a function of wave number and separation distance, where k is wave number, and Δ is microphone spacing. The errors are seen to decrease as the spacing is reduced. This means that the accuracy of the finite difference approximations can be improved by reducing the spacing

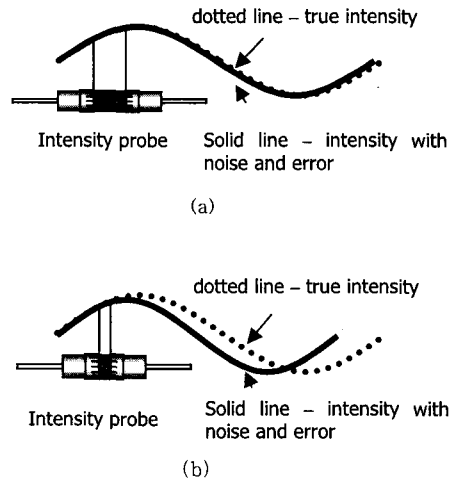


Fig. 2 Intensity measurement using an intensity probe when measured signal may include some errors. This figure shows the error of the measured intensity when sensor spacing are (a) large and (b) small

예를 들어 인텐시티 탐측자(intensity probe)를 이용하여 인텐시티를 측정하는 방법에 대해 살펴 보자. 공간상에 위치한 임의의 점의 인텐시티를 구하기 위해 Fig. 2 처럼 두 지점의 음압을 측정하게 되는데, 만약 마이크로폰의 특성차이에 의한 오차 또는 측정 위치의 부정확성에 의한 오차가 포함되어 진다면, Fig. 2처럼 예측한 인텐시티는 오차가 발생한다.

Fig. 2에서 점선은 실제 공간상의 인텐시티 분포를 나타내고, 실선은 센서에 측정오차가 포함된 경우 예측한 인텐시티 분포를 나타내고 있다. Fig. 2(a)처럼 파장에 비해 측정간격이 크면 실제 음압분포와 측정된 음압 분포가 거의 차이가 없기 때문에 이로부터 예측한 인텐시티의 오차는 작지만, Fig. 2(b)처럼 공간상의 측정간격이 작아지면 센서에 의한 측정 오차는 예측한 인텐시티의 오차를 더 크게 만들 수 있다.

이와 같이 측정된 음압 신호에 오차 및 잡음이 포함되어 있는 경우 이를 이용하여 예측한 속도 및 인텐시티의 오차가 구체적으로 어떠한 측정변수(예: 측정잡음, 간격 등)에 영향을 받으며 그 경향은 어떠한지 정량적인 분석이 필요하다.

음향 물리량에 대한 오차를 정량적으로 해석하기 위해 오차의 확률적 특성을 대표하는 양은 1차 및 2차 통계적 특성을 보는 경우 바이어스 오차(Bias error)와 랜덤 오차(Random error)라 할 수 있다.⁽⁵⁻⁶⁾ 즉

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

$$\sigma^2(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}^2] - |E[\hat{\theta}]|^2 \quad (3)$$

여기서 E 는 앙상블 평균(Ensemble mean)을 의미하고, B 는 바이어스 오차, σ^2 은 랜덤 오차를 나타내며, $\hat{\theta}$ 는 측정값을 의미하고 θ 는 참값을 표시한다.

3. 속도 및 인텐시티 오차의 정량화

수식에 대한 물리적 의미를 간단 명료하게 이해하기 위해 식 (1)과 같이 우선 1차원 평면파에 대한 오차를 유도하기로 한다. 이것은 음향 홀로그래피가 사실은 2차원 음압 분포 등을 표현하나 2차원적 분포가 1차원적 분포의 연장선 상에서 이해 될 수 있기 때문이기도 하다.

공간상의 임의의 점 m 에서 오차가 포함된 음압 신호는 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{P}(m) = P(m) + n(m) \quad (4)$$

여기서 \hat{P} 은 측정된 음압신호를 나타내고 P 는 실제 음압신호를 의미한다. 그리고 n 은 여러 가지 원인에 의한 오차 및 잡음을 나타낸다. n 은 공간에 불규칙하게 분포해 수많은 n_i 값들을 가지고 있는 모집단에서 임의로 뽑아서 배치한 것으로 생각할 수 있다. 이 경우 측정사건은 수많이 있을 수 있어 하나의 참 값에 대해 측정 사건은 앙상블로 존재하고, 실제 측정사건은 이중의 하나라고 볼 수 있다.

n 을 각 모집단의 평균이 0, 분산이 σ^2 인 공간상의 백색잡음(spatial white noise)으로 가정하면 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$E[n(m)] = 0$$

$$E[n_i(m), n_j(m')] = \sigma^2 \delta(m - m') \quad (5)$$

음향물리량인 음압, 속도, 및 인텐시티는 오일러 식 $(-\nabla p = \rho_0 \frac{du}{dt})$ 과 인텐시티식($I = P \cdot U$)에 의해 서로 관계되어져 있으므로 잡음이 포함된 음압신호인 식 (4)를 오차를 나타내는 식 (3)에 대입하면, 각 물리량에 대한 오차를 구할 수 있다.

우선 바이어스 오차를 구해 보면

$$B\{\hat{P}(m)\} = 0$$

$$B\{\hat{U}(m)\} = 0$$

$$B\{\hat{I}(m)\} = 0 \quad (6)$$

과 같다. (상세한 유도 과정은 부록 A 참조) 식 (6)은 음압신호에 분산이 σ^2 인 잡음이 존재할 경우 각 물리량에 대한 바이어스 오차가 세가지 경우 모두 없음을 이야기 한다. 즉, 측정된 음압 신호에 랜덤 오차가 존재하더라도 이로부터 예측한 속도 및 인텐시티의 바이어스 오차는 전혀 없음을 의미한다. 이는 사실 쉽게 예상할 수 있는 결과이기도 하다.

오차의 확률적 특성을 대표하는 다른 양인 랜덤오차를 구해 보면

$$\begin{aligned} \sigma^2\{\hat{p}(m)\} &= \sigma^2 \\ \sigma^2\{\hat{v}(m)\} &= \sigma^2 \frac{2}{\rho_0^2 c^2 (k\Delta)^2} \\ \sigma^2\{\hat{i}(m)\} &= \sigma^2 \frac{1}{4\rho_0^2 c^2 (k\Delta)^2} \{P(m+1)^2 + |P(m)|^2\} \end{aligned} \quad (7)$$

과 같다. (상세한 유도 과정은 부록 B 참조)

여기서 ρ 와와 c 는 각각 매질의 밀도와 음파 속도를 나타내며, Δ 는 측정 간격, k 는 파수를 의미한다.

식(7)은 우리에게 흥미로운 사실을 보여주고 있다. 공간상의 측정 간격이 작아질수록 음압의 랜덤 오차는 백색 잡음의 분산인 σ^2 으로 일정하지만, 속도와 인텐시티의 랜덤오차는 $(k\Delta)^2$ 에 비례하여 커진다는

것이다. 앞에서 살펴보았듯이 잡음이 없는 경우에는 샘플링 간격이 좁을수록 오차가 줄어들었지만, 음압 신호에 오차가 존재한다면 예측한 속도 및 인텐시티의 랜덤 오차는 오히려 증가한다는 것을 의미하고 있다.

따라서 예제로 보여준 Fig.2에서 측정 신호에 같은 양의 오차가 존재할 때, 측정간격을 반으로 줄인다면 랜덤오차는 4배 증가한다는 것을 의미한다.

앞서 얻은 이론적인 내용을 좀더 심도 있게 이해하기 위하여 몇 가지 상식적으로 가능한 경우에 대하여 컴퓨터 모사실험을 통한 관찰이 필요하다.

앞의 이론적인 내용은 공간상의 한 점에 대한 결과를 보여 주고 있다. 공간에 분포했을 때는 어떤 특성이 나타나는지 알아보기 위해 1차원 평면파에 대한 컴퓨터 모사실험을 수행하였다.

Fig.3은 1차원 평면파에 일정량의 노이즈가 존재하고, 단지 공간상의 샘플링 개수만을 달리 하였을 때의 컴퓨터 모사실험 결과를 보여주고 있다. 여기서 SNR(signal to noise ratio)은 415, 주파수는 1kHz, 어레이 크기(aperture size)는 0.5 m 이다. 입자 속도와 인텐시티는 노이즈가 포함된 음압신호로부터 관계식에 의해 추정된 값이다. 측정점의 개수는 노이즈에 의한 영향을 잘 보기 위해 Fig.3 (a)는 50개, (b)는 100개로 하여 결과를 얻었다. Fig.3 (a)와 (b)를 비교해 보았을 때, 공간 샘플링은 바이어스 오차에 영향을 미치지 않지만, 랜덤 오차일 경우 Fig.1의 결과와는 달리 샘플링을 많이 한 Fig.3 (b)일 경우 예측한 속도와 인텐시티의 랜덤오차가 더 크기를 쉽게 관찰할 수 있었다.

랜덤 오차에서 가장 큰 영향을 미치는 것이 샘플링 개수이며, 이산영역에서 샘플링 개수가 증가함에 따라 압력의 랜덤 오차는 일정하지만, 속도와 인텐시티의 랜덤 오차는 커짐을 알 수 있었다.

4. 결론

본 논문에서는 각종 오차 및 노이즈가 신호에 포함되어 있는 경우, 음압, 속도, 인텐시티의 추정 오차를 해석하였다. 이를 위해 확률의 관점에서 바이어스 오차와 랜덤 오차를 정량적으로 구하였다.

공간 샘플링 간격은 바이어스 오차에는 영향을 미치지 않으나, 랜덤 오차에는 중요한 영향을 미칠 수 있었다. 샘플링 간격이 줄어들어 따라 음압의

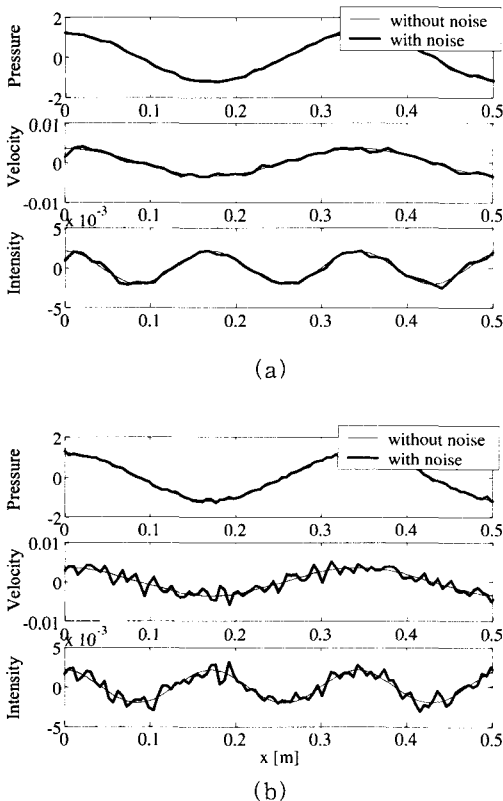


Fig. 3 Numerical simulation for observing the effect of sampling. ($f = 1$ kHz, $\rho_0 = 1.24$ kg/m³, $c = 343$ m/s, $L = 0.5$ m) The number of the measurement points is (a) 50, (b) 100. Figures show that errors are amplified when the measurement points are doubled

랜덤오차는 일정하지만, 속도와 인텐시티의 랜덤오차는 공간 샘플링 간격의 제곱에 비례하여 커짐을 이론 및 컴퓨터 모의실험을 통해 알 수 있었다. 따라서 이산 영역에서 음압 신호로부터 속도 및 인텐시티를 예측할 때는 무조건 샘플링 간격을 작게 하는 것 보다는 이러한 관계를 고려하여 공간 샘플링을 결정해야 할 것이다.

후 기

본 논문은 과학기술부의 국가지정연구실사업(NRL)과 교육인적자원부의 BK21 사업에 의한 연구 지원으로 수행되었습니다

참 고 문 헌

- (1) Maynard, J. D., Williams, E. G. and Lee, Y., 1985, "Nearfield acoustic holography: I. Theory of Generalized Holography and Development of NAH," J. Acoust. Soc. Am. 78, 1395~1413.
- (2) Nam, K.-U. and Kim, Y.-H., 1999, "Errors Due to Sensor and Position Mismatch in Planar Acoustic Holography," J. Acoust. Soc. Am. 106 (4), 1655~1665.
- (3) Fahy, F. J., Sound Intensity, 1989, (Elsevier Applied Science), Chap. 4 and 5, pp. 46~109.
- (4) Pavic, G., 1977, "Measurement of sound intensity," Journal of Sound and Vibration, Vol. 51, No. 4, pp. 533~545
- (5) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1986, Random Data: Analysis and Measurement Procedure, 2nd ed. (Wiley, New York), Chap. 8, pp. 252~290.
- (6) Jay L. Devore, 1991, Probability and Statistics for Engineering and the Science, 3rded. (Brooks/Cole Publishing Company), Chap. 8 and 9, pp. 283~370.
- (7) Morse and Ingard, 1986, Theoretical Acoustics, (McGraw-Hill, Inc.), Chap. 6, pp. 227~240.
- (8) Choi, Y.-C. and Kim, Y.-H. 2003, "Quantification of Particle Velocity and Intensity Estimation Error in a Discrete Domain," Proceedings of the

KSNVE Annual Spring Conference, pp. 403~407.

부록 A. 바이어스 오차 유도

임의의 점 m 에서 오차가 포함된 신호는 (4)식에 의해

$$\hat{P}(m) = P(m) + n(m) \quad (A-1)$$

와 같이 표현된다. 여기서 위첨자 $\hat{}$ 은 측정 값을 의미한다. 음압에 대한 바이어스 오차는 다음과 같이

$$B[P(m)] = E[\hat{P}(m)] - P(m) \quad (A-2)$$

표현할 수 있으므로 (A-1)식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} E[\hat{P}(m)] &= E[P(m) + n(m)] \\ &= E[P(m)] + E[n(m)] \end{aligned} \quad (A-3)$$

와 같이 된다. (5)식에 의해 $n(m)$ 의 앙상블평균은 0이기 때문에 아래 식과 같이 음압의 바이어스 오차는 존재하지 않는다.

$$B[P(m)] = 0 \quad (A-4)$$

속도 바이어스 오차는 아래 식과 같이

$$B[V(m)] = E[\hat{V}(m)] - V(m) \quad (A-5)$$

정의 된다. 오일러식을 이용하여 두 지점 사이의 속도에 대한 앙상블 평균은

$$\begin{aligned} E[\hat{V}(m)] &= E\left[\frac{1}{j2\pi f\Delta} \frac{\hat{P}(m+1) - \hat{P}(m)}{\Delta}\right] \\ &= E\left[\frac{1}{j2\pi f\Delta} \frac{\{P(m+1) + n(m+1)\} - \{P(m) + n(m)\}}{\Delta}\right] \\ &= \frac{1}{j2\pi f\Delta} \frac{P(m+1) - P(m)}{\Delta} \\ &= V(m) \end{aligned} \quad (A-6)$$

와 같이 되므로 (A-5)식에 대입하면 속도에 대한 바이어스 오차를 얻을 수 있다.

$$B[V(m)] = 0 \quad (A-7)$$

인텐시티 바이어스 오차는

$$B[I(m)] = E[\hat{I}(m)] - I(m) \quad (A-8)$$

와 같이 정의된다.

측정된 인텐시티의 앙상블 평균은

$$\begin{aligned} E[\hat{I}(m)] &= E\left[\frac{1}{2}\hat{P}\hat{V}^*\right] \\ &= E\left[\frac{1}{2}\frac{\hat{P}(m+1)+\hat{P}(m)}{2}\frac{1}{j2\pi f\rho}\frac{\tilde{P}(m+1)-\tilde{P}(m)}{\Delta}\right] \\ &= I(m) \end{aligned} \quad (A-9)$$

와 같이 되므로 (A-8)식에 대입하면

$$B[I(m)] = 0 \quad (A-10)$$

와 같이 된다.

부록 B. 랜덤 오차 유도

잡음이 포함되어 측정된 음압신호의 랜덤오차는

$$\sigma^2[\hat{P}(m)] = E[\hat{P}^2(m)] - |E[\hat{P}(m)]|^2 \quad (B-1)$$

와 같이 정의 된다. $\hat{P}^2(m)$ 의 앙상블 평균은

$$\begin{aligned} E[\hat{P}^2(m)] &= E[\hat{P}(m)\hat{P}^*(m)] \\ &= E\{[P(m)+n(m)][P^*(m)+n^*(m)]\} \\ &= |P(m)|^2 + \sigma^2 \end{aligned} \quad (B-2)$$

와 같이 유도 되기 때문에 (A-3)식과 (B-2)식을 (B-1)식에 대입하면

$$\sigma^2[\hat{P}(m)] = \sigma^2 \quad (B-3)$$

와 같이 랜덤 오차를 유도할 수 있다.

속도에 대한 랜덤 오차는 다음 식과 같이 정의 된다.

$$\sigma^2[\hat{V}(m)] = E[\hat{V}^2(m)] - |E[\hat{V}(m)]|^2 \quad (B-4)$$

여기서 $\hat{V}^2(m)$ 에 대한 앙상블 평균은

$$\begin{aligned} E[\hat{V}^2(m)] &= E[\hat{V}(m)\hat{V}^*(m)] \\ &= E\left[\frac{1}{j2\pi f\rho}\frac{\hat{P}(m+1)-\hat{P}(m)}{\Delta}\right. \\ &\quad \left.-\frac{1}{-j2\pi f\rho}\frac{\hat{P}^*(m+1)-\hat{P}^*(m)}{\Delta}\right] \\ &= |V(m)|^2 + \frac{\sigma^2}{2\pi^2 f^2 \rho^2 c^2 \Delta^2} \\ &= |V(m)|^2 + \sigma^2 \frac{2}{\rho^2 c^2 k^2 \Delta^2} \end{aligned} \quad (B-5)$$

와 같이 유도 되기 때문에 (A-6)식과 함께 (B-4)식에 대입하여 정리하면

$$\sigma^2[\hat{V}(m)] = \sigma^2 \frac{2}{\rho^2 c^2 k^2 \Delta^2} \quad (B-6)$$

와 같이 속도에 대한 랜덤 오차를 유도할 수 있다.

인텐시티에 대한 랜덤 오차는 다음 식과 같이 정의 된다.

$$\sigma^2[\hat{I}(m)] = E[\hat{I}^2(m)] - |E[\hat{I}(m)]|^2 \quad (B-7)$$

여기서 $\hat{I}^2(m)$ 에 대한 앙상블 평균은

$$\begin{aligned} E[\hat{I}^2(m)] &= E\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{\hat{P}(m+1)+\hat{P}(m)}{2}\frac{\hat{P}(m+1)-\hat{P}(m)}{j2\pi f\rho\Delta}\right]\right. \\ &\quad \left.\left[\frac{1}{2}\frac{\hat{P}^*(m+1)+\hat{P}^*(m)}{2}\frac{\hat{P}^*(m+1)-\hat{P}^*(m)}{-j2\pi f\rho\Delta}\right]\right\} \\ &= I^2(m) + \frac{\sigma^2}{16\pi^2 f^2 \rho^2 \Delta^2} \{p^2(m+1) + p^2(m)\} \\ &= I^2(m) + \frac{\sigma^2}{4\rho^2 c^2 k^2 \Delta^2} \{p^2(m+1) + p^2(m)\} \end{aligned} \quad (B-8)$$

와 같이 유도 되기 때문에 (A-9)식과 함께 (B-7)식에 대입하여 정리하면

$$\sigma^2[I(m)] = \frac{\sigma^2}{4\rho^2 c^2 k^2 \Delta^2} \{p^2(m+1) + p^2(m)\} \quad (B-9)$$

와 같이 인텐시티에 대한 랜덤 오차를 유도할 수 있다.