

V노치 또는 예리한 균열을 가지는 직사각형 평판의 굽힘 진동

Flexural Vibrations of Rectangular Plates Having V-notches or Sharp Cracks

김 주 우[†] · 정 희 영* · 정 의 영**

Joo-Woo Kim, Hie-young Jung and Eui-young Jung

(2004년 1월 16일 접수 ; 2004년 3월 24일 심사완료)

Key Words : Ritz Method(Ritz법), Free Vibration(자유진동), Moment Singularities(모멘트특이도), Corner Function(코너함수), Hybrid Function(혼성함수), Natural Frequency(고유진동수), Mode Shape(모드형상)

ABSTRACT

This paper reports the first known free vibration data for thin rectangular plates with V-notches. The classical Ritz method is employed with two sets of admissible functions assumed for the transverse vibratory displacements. These sets include: (1) mathematically complete algebraic-trigonometric polynomials which guarantee convergence to exact frequencies as sufficient terms are retained, and (2) corner functions which account for the bending moment singularities at the sharp reentrant corner of the V-notch. Extensive convergence studies summarized herein confirm that the corner functions substantially enhance the convergence and accuracy of nondimensional frequencies for rectangular plates having the V-notch. In this paper, accurate frequencies and normalized contours of vibratory transverse displacement are presented for various notched plates, so that the effect of corner stress singularities may be understood.

1. 서 론

지금까지 직사각형 평판의 진동해석에 관한 문헌들이 매우 광범위하게 축적되어 왔으나,^(1~4) 균열 또는 V노치와 같은 기하학적인 불연속성을 포함하는 직사각형 평판의 진동특성에 관련하여 발표된 문헌들을 발견하는 것은 쉽지 않다. 반복하중이 가해지는 건물 또는 교량의 바닥판과 항공기, 선박 및 자동차를 구성하는 여러 가지 평판 요소에서 발생할 수 있는 균

열이나 인위적인 V노치는 평판 자체의 기능을 저하시킬 뿐만 아니라, 고유진동수와 모드형상과 같은 구조물의 고유특성을 변화시킨다. 또한 이러한 균열이나 V노치 선단에 존재하는 특이응력은 균열진전의 원인이 되며, 평판의 정확한 진동특성을 구하는데 항상 방해요인이 되어왔다. 특히, 이러한 문제를 일반적인 유한요소법의 준균등(quasi-uniform) 유한요소망을 이용해서 해석할 경우, 정확한 결과를 얻지 못함을 지금까지의 연구를 통하여 알 수 있다.^(5, 6)

본 논문에서는 Fig. 1과 같이 V노치를 포함하며 완전자유 경계조건을 가지는 직사각형 평판의 진동특성을 알아보기 위해, 각기 다른 특성을 가지는 두 가지 허용함수(admissible function)로 가정한 횡진동변위함수를 Ritz법에 적용한다. 이러한 변위함수들은 (1) 수학적으로 완전한 대수 삼각 다항함수와 (2) V노치 선단의 특이거동을 고려하는 코너함수로 구성되

[†] 책임저자 : 정희원, 세명대학교 건축공학과

E-mail : jw_kim@semyung.ac.kr

Tel : (043) 649-1329

* 서울시립대학교 토목공학과

** 세명대학교 건축공학과

어 있다. 응력특이도를 포함하는 직사각형 평판의 진동해석에서 코너함수의 효과는 광범위한 수렴조사를 통하여 검증될 것이다. Fig. 1의 직사각형 평판은 다양한 노치 각($360^\circ - \alpha$)과 노치의 상대깊이($1 - c/a$)를 가지게 되며, 본 논문에서는 이들에 대한 정확한 고유진동수와 모드형상을 제시하고자 한다. V노치 각이 180° 보다 작은 경우에는 판이 진동하는 동안 V노치 선단에 굽힘모멘트와 응력특이도가 발생하게 된다.⁽⁷⁾ 여기서, 노치 각이 매우 작을 때(예를 들면, 5° 이하), 그 노치는 예리한 균열로 간주될 수 있다. 노치 각이 180° 보다 큰 경우에는 평판은 더 이상 V노치를 포함하지 않는 완전 자유의 다각형 형상이 되며 이것에 대한 진동특성은 본 논문에서 다루어지는 문제들 중에서 특별한 사례로 취급될 수 있을 것이다. 진동하는 평판에 존재하는 응력특이도의 본질을 더욱 명확히 이해하기 위해서, 다양한 노치 각과 깊이에 대한 횡변위의 정규화된 모드형상을 제시하였다.

2. 방법론

Fig. 1에서와 같이 완전자유인 직사각형 평판의 크기는 길이 $2a$ 와 폭 $2b$ 로 정의되며, 극 좌표계(r, θ)의 원점은 V노치 선단에서 취해진다. 이 때, 횡진동변위함수 w 는 다음과 같이 정의된다.

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta) \sin \Omega t \quad (1)$$

여기서 t 는 시간, Ω 는 각진동수이다. 진동 사이클 동안, 평판의 굽힘에 대한 최대변형에

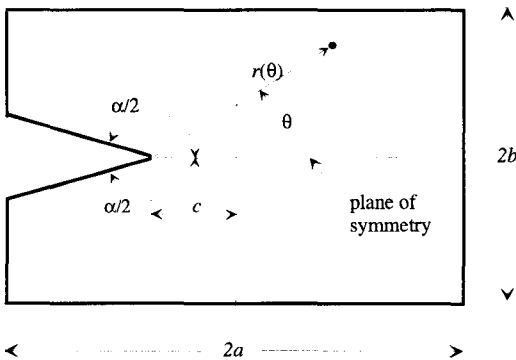


Fig. 1 A rectangular plate with a V-notch

너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{\max} = \frac{D}{2} \iint_A [(\chi_r + \chi_\theta) - 2(1-\nu)(\chi_r \chi_\theta - \chi_{r\theta}^2)] dA \quad (2)$$

여기서 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 는 굽힘강성, E 는 영의 계수, ν 는 푸아송비, h 는 판의 두께이며, $dA = r dr d\theta$ 이다. 그리고, $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ 는 최대 굽힘 및 비틀림 곡률로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \chi_r &= \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \\ \chi_{r\theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

또한, 최대 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_{\max} = \frac{\rho \Omega^2}{2} \iint_A W^2 dA \quad (4)$$

여기서 ρ 는 평판의 단위면적 당 질량이다. 식 (2)와 식 (4)에서 적용되는 직사각형 평판의 적분한계 r 은 θ 의 함수로서(Fig. 1 참조) 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} \quad (\theta_1 \leq \theta < \theta_2) \quad (5a)$$

$$r(\theta) = -\frac{a-c}{\cos \theta} \quad (\theta_2 \leq \theta < \theta_3) \quad (5b)$$

$$r(\theta) = -\frac{b}{\sin \theta} \quad (\theta_3 \leq \theta < \theta_4) \quad (5c)$$

$$r(\theta) = -\frac{a+c}{\cos \theta} \quad (\theta_4 \leq \theta < \theta_1) \quad (5d)$$

여기서,

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{b}{a+c}, \quad \theta_2 = -\tan^{-1} \frac{b}{a-c}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \frac{b}{a-c}, \quad \theta_4 = -\tan^{-1} \frac{b}{a+c}$$

이다.

응력특이도를 포함하는 평판의 굽힘진동 해석을 위하여, Ritz법을 적용하면 횡변위에 대한 허용 가장 함수들은 다음과 같은 혼성함수(hybrid function)로

가정된다.

$$W = W_p + W_c \quad (6)$$

여기서 W_p 는 수학적으로 완전한 대수 삼각다항식이고, W_c 는 V노치 선단에 발생하는 특이 굽힘응력의 거동을 명백히 나타내는 코너함수이다. 평판의 대칭 진동모드에 대해서 대수 삼각다항식은 다음과 같이 표현된다.

$$W_p = \sum_{m=0,2,4n=0,2,4}^{M_1} \sum_{m=0,2,4n=0,2,4}^m A_{mn} r^m \cos n\theta + \sum_{m=1,3,5n=1,3,5}^{M_2} \sum_{m=1,3,5n=1,3,5}^m A_{mn} \cos n\theta \quad (7)$$

다른 한편으로, 반대칭 진동모드에 대해서는 다음과 같이 나타낸다.

$$W_p = \sum_{m=2,4n=2,4}^{M_3} \sum_{m=2,4n=2,4}^m B_{mn} r^m \sin n\theta + \sum_{m=1,3,5n=1,3,5}^{M_4} \sum_{m=1,3,5n=1,3,5}^m B_{mn} \sin n\theta \quad (8)$$

식 (7) 과 식 (8)에서 A_{mn} 과 B_{mn} 은 미결정계수이고, m 과 n 값에서 $r=0$ 일 때 불필요한 특이거동을 피하도록 항들이 선택되었으며, 여전히 이 변위식들은 대수학적으로 완전성을 유지하고 있다. Ritz법에서는 이러한 다항식의 항의 수를 충분히 사용할 경우 완전해에 근접하는 진동해가 얻어질 수 있음을 이론적으로 보장될 수 있다.

응력특이도를 포함하는 직사각형 평판에 대해서도 식 (7)과 식 (8)의 대수 삼각 변위 다항식들은 앞에서 언급한바와 같이, 이론적으로는 완전해에 가까운 진동수 값들을 산출해 내야 하나, 요구되어지는 다항식의 항들의 수에 대해 컴퓨터 연산에서의 현실적인 한계성을 가지고 있다. 이러한 한계성 문제는 V노치 선단의 응력특이도를 적절히 고려하며, 경계조건을 만족하는 허용 코너함수를 대수 삼각 다항식과 함께 사용함으로써 제거될 수 있다.

코너함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W_c = \sum_{k=1}^K C_k W_{ck}^* \quad (9)$$

여기서 C_k 는 임의의 계수이며, W_{ck}^* 는 고전판의 정역학적 굽힘에 대해서 잘 알려진 4차 겹조화 평형 방정식의 해(8)로서 다음과 같이 표현된다.

$$W_{ck}^* = r^{\lambda_k+1} [a_k \sin(\lambda_k+1)\theta + b_k \cos(\lambda_k+1)\theta + c_k \sin(\lambda_k-1)\theta + d_k \cos(\lambda_k-1)\theta] \quad (10)$$

식 (10)에서의 λ_k 값은 V노치의 방사변(radial edge: 즉, Fig. 1에서 $\theta = \pm \alpha/2$)에서의 경계조건을 적용함으로써 구해지는 행렬식(특성방정식)의 근인 특성값이다. 현재 고려되는 자유단 방사변의 경계조건은 다음 식과 같이 정의된다.

$$V_\theta(r, \pm \alpha/2) = M_\theta(r, \pm \alpha/2) = 0 \quad (11)$$

식 (11)은 V노치의 방사변에는 원주방향의 전단력과 모멘트가 존재하지 않음을 나타낸다. 여기서, 식 (11)의 전단력과 모멘트는 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\chi_r + \chi_\theta) + (1-\nu) \frac{\partial \chi_{r\theta}}{\partial r} \quad (12)$$

$$M_\theta = -D(\chi_\theta + \nu \chi_r) \quad (13)$$

완전자유단을 가지는 직사각형 평판의 대칭 모드인 경우 식 (10)에서 $a_k = c_k = 0$ 이며, 식 (12)와 식 (13)을 이용하여 식 (11)의 경계조건을 적용하면 다음과 같은 특성방정식을 구할 수 있다.

$$\sin \lambda_k \alpha = \frac{1-\nu}{3+\nu} \lambda_k \sin \alpha \quad (14)$$

식 (14)로부터 특성값 λ_k 가 결정되며, 이에 대응하는 코너함수는 다음식과 같다.

$$W_{ck}^* = r^{\lambda_k+1} [\gamma_k \cos(\lambda_k+1)\theta + \cos(\lambda_k-1)\theta] \quad (15)$$

여기서

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k(1-\nu) + (3+\nu) \sin(\lambda_k-1)}{(\lambda_k+1)(\nu-1) \sin(\lambda_k+1)} \quad (16)$$

이다. 반대칭 모드에 대해, 식 (10)에서 $b_k = d_k$

$$\sin \lambda_k \alpha = -\frac{1-\nu}{3+\nu} \lambda_k \sin \alpha \quad (17)$$

특성방정식 (14)와 (17)로부터 계산되는 근 λ_k 는 복소수로 표현될 수 있으며, 이러한 경우 코너함수 또한 복소수로 취급되어 코너함수의 실수부와 허수부는 각각 독립적인 허용 변위함수로 Ritz법에 적용된다.

식 (7)~(10)을 식 (2)~(5)에 대입하고 Ritz 방법의 고유치 방정식을 이용하면 자유진동 문제는 해결될 수 있다. 예를 들면, 대칭 모드에 대해서 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (V_{\max} - T_{\max}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial C_k} (V_{\max} - T_{\max}) = 0 \quad (18)$$

방정식 (18)로부터 미결정된 계수 A_{mn} (또는 B_{mn})과 C_k 를 포함하고 있는 연립 선형 동차대수방정식을 얻게 되며, 이러한 대수방정식의 행렬식을 영으로 놓게 되면 고유치를 얻게 된다. 이러한 고유치는 직사각형 평판에 대해 무차원의 진동수 파라미터인 $\Omega^2 \sqrt{\rho/D}$ [여기서, $l = 2b$ (Fig. 1 참조)]로 나타내게 된다. A_{mn} (또는 B_{mn})과 C_k 를 포함하는 고유벡터는 고유치를 다시 동차 방정식에 대입하는 통상적인 방법을 이용하여 결정될 수 있다. 구해진 고유벡터를 식 (6)~(10)에 대입하게 되면, 노치를 가지는 직사각형 평판 영역 내의 $r-\theta$ 격자 위에 모드 형상과 관련된 정규변위등고선(normalized displacement contour)을 나타낼 수 있다.

3. 고유진동수의 수렴도 분석

이 절에서는 형상비 $a/b = 2$ 를 가지는 완전 자유의 직사각형 평판에 대해서 두 가지 다른 깊이의 V노치(즉, $c/a = 0.75$ 와 $c/a = 0$)에 대한 수렴도 분석을 수행하였다. 이러한 평판의 형상이 $c/a = 0.5$ 와 $c/a = -0.5$ 인 경우와 함께 Fig. 2에 나타나 있다. 본 논문에 제시된 모든 진동수를 계산할 때 사용된 푸아송비는 0.3이다.

Table 1은 $a/b = 2$, $c/a = 0$, 그리고 $\alpha = 355^\circ$

인 경우에 대해 무차원 진동수, $\Omega^2 \sqrt{\rho/D}$ 에 대한 수렴도를 보여주고 있다. 이 경우(노치 각 = 5°), V

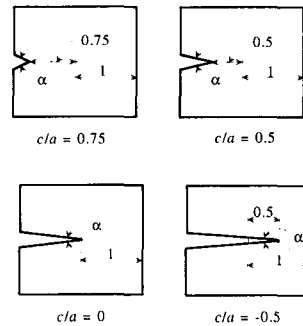


Fig. 2 V-notches with various depths

Table 1 Convergence of frequency parameters $\Omega^2 \sqrt{\rho/D}$ for completely free rectangular plate with a V-notch($a/b = 2$, $c/a = 0$, $\alpha = 355^\circ$)

Mode no. (symmetry class)	No. of corner function	Total no. of term in W_p			
		20	30	42	56
1 (A)	0	6.589	6.585	6.584	6.584
	1	2.919	2.914	2.911	2.909
	5	2.582	2.848	2.848	2.848
	10	2.848	2.848	2.848	2.848
	15	2.848	2.848	2.848	2.848
2 (S)	0	5.412	5.411	5.411	5.411
	1	5.409	5.408	5.408	5.408
	5	5.403	5.403	5.403	5.403
	10	5.403	5.402	5.402	5.402
	15	5.402	5.402	5.402	5.402
3 (A)	0	14.88	14.41	14.40	14.40
	1	10.02	9.968	9.966	9.966
	5	9.924	9.862	9.859	9.858
	10	9.877	9.857	9.856	9.856
	15	9.867	9.856	9.856	9.856
4 (S)	0	14.98	14.97	14.97	14.96
	1	10.84	10.82	10.82	10.81
	5	10.78	10.77	10.77	10.77
	10	10.77	10.77	10.77	10.77
	15	10.77	10.77	10.77	10.77
5 (S)	0	21.77	21.67	21.61	21.53
	1	14.98	14.97	14.97	14.97
	5	14.95	14.94	14.94	14.94
	10	14.95	14.93	14.93	14.93
	15	14.94	14.93	14.93	14.93
6 (A)	0	26.31	25.08	25.05	25.04
	1	19.24	18.72	18.71	18.71
	5	16.29	16.23	16.21	16.21
	10	16.24	16.20	16.19	16.19
	15	16.23	16.20	16.19	16.19

*(S) Symmetric mode : (A) Antisymmetric mode

노치는 예리한 균열로 간주할 수 있으며, 노치의 깊이는 Fig. 2의 세 번째(노치 선단이 판의 중심에 위치해 있는 경우)에 나타나 있다. 진동수의 수렴도를 분석하기 위해서 20, 30, 42 그리고 56항의 다항식 [식 (7) 또는 식 (8)]과 0, 1, 5, 10 그리고 15항의 코너함수[식 (15)]를 이용하였다. 완전 자유 지지조건을 가지는 평판의 2차원 진동해석 시, 처음 3차까지의 모드는 강체 모드(rigid body mode)임을 주의해야 한다. 이러한 강체 모드에 해당되는 진동수는 영이며, Table에는 나타나지 않았다.

Table 1에서 반대칭 모드인 1차 진동수 값의 수렴도를 검토하여 볼 때, 코너함수를 이용하지 않고 다항식의 항만을 증가시킬 경우 수렴속도는 상당히 느리며, 유효숫자 4자리에서 수렴값이 6.584인 것처럼 생각될 수 있다. 그러나 코너함수가 적용된 다음 4줄의 수렴도 경향을 검토하여 보면 정확한 수렴값은

2.848임을 알 수 있다. 또한, 코너함수 한 항만을 적용하였을 때 상당히 향상된 수렴 진동수 값이 얻어지게 된다는 것은 매우 흥미로운 결과로 인식될 수 있을 것이다. 나머지 고차 모드에 대한 진동수 값들도 유사한 속도로 수렴함을 Table 1로부터 볼 수 있다.

Table 2에서는 Table 1의 경우보다 훨씬 더 얇은 깊이의 V노치(즉, $c/a = 0.75$, Fig. 2 참조)를 가지는 직사각형 평판의 진동수의 수렴도를 나타내고 있다. 깊은 깊이의 노치를 가지는 Table 1의 수렴도와 비교해 볼 때, 노치 각 α 는 동일하지만 노치의 깊이가 얇은 경우에 수렴도에 미치는 코너함수의 영향이 비교적 작으며, 반올림 오차로 인한 수치적 불량조건(numerical ill-conditioning)이 발생된다는 것을 볼 수 있다. 그러나 이 경우에 있어서도 진동수 값에 대한 전체적인 수렴도와 그것의 정확성은 감소되지 않았음을 Table 2로부터 볼 수 있다.

Table 2 Convergence of frequency parameters $\Omega^2 \sqrt{\rho/D}$ for completely free rectangular plate with a V-notch($a/b = 2$, $c/a = 0.75$, $\alpha = 355^\circ$)

Mode no. (symmetry class*)	No. of corner functions	Total no. of terms in W_p			
		12	20	30	42
1 (S)	0	5.432	5.378	5.377	---
	1	5.426	5.375	5.373	---
	5	5.412	5.374	5.373	---
	10	5.390	---	---	---
2 (A)	0	6.731	6.646	6.643	6.643
	1	6.569	6.515	6.511	6.509
	5	6.560	6.501	6.499	6.499
	10	6.514	6.500	---	---
3 (A)	0	17.09	15.07	14.62	14.61
	1	16.15	14.09	13.85	13.84
	5	14.28	14.00	13.79	13.78
	10	14.01	13.87	---	---
4 (S)	0	15.42	14.94	14.93	---
	1	15.39	14.92	14.91	---
	5	15.34	14.92	14.91	---
	10	15.20	---	---	---
5 (S)	0	22.30	22.04	22.00	---
	1	20.83	20.61	20.58	---
	5	20.71	20.52	22.50	---
	10	20.67	---	---	---
6 (A)	0	34.08	26.60	25.39	25.35
	1	31.06	24.70	23.79	23.72
	5	24.83	24.53	23.65	23.62
	10	24.65	24.30	---	---

*(S) Symmetric mode; (A) Antisymmetric mode
 --- No results due to matrix ill-conditioning

4. 진동수 및 모드형상

건축이나 토목, 기계구조물을 구성하는 평판에 발생된 균열은 반복하중에 의해 진전을 하게 된다. 이러한 균열 진전은 균열선단에 발생하는 응력집중현상에 의한 것으로, 본 논문에서는 발생될 수 있는 균열 진전의 예로서, 노치 깊이($1-c/a$)가 0.25, 0.5, 1, 1.5 일 때(그림 2 참조) 진동수 값을 나타냈다. 또한, 다양한 노치 각 [$\alpha = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ, 355^\circ, 360^\circ$ (선균열)]을 갖는 직사각형($a/b = 2$) 및 정사각형($a/b = 1$) 평판의 정확한 진동수에 대한 데이터 베이스의 구축을 위해 광범위한 수렴연구가 수행되었다. 이러한 연구 결과가 Table 3과 Table 4에 각각 요약되어 있다.

Table 3과 Table 4에서 노치 각과 노치 깊이의 증가에 따른 직사각형 및 정사각형 평판의 진동수 값의 변화에서 흥미로운 경향을 알아낼 수 있다. 일반적으로, 모든 c/a 에 대해서, α 가 증가할 때 1차 모드의 진동수 값이 감소함을 볼 수 있으며, 이것은 노치 각이 증가할 때 평판의 강성이 감소된다는 것을 의미한다.

V노치를 포함하는 직사각형(Table 3)은 $\alpha \leq 270^\circ$ 인 경우 노치 깊이가 증가하면 모든 모드의 진동수 값 또한 증가한다는 것을 나타내고 있다. 반면에, $\alpha \geq 300^\circ$ 인 경우 노치 깊이의 증가에 따른 진동수

값은 모드에 따라 증가하거나 감소한다는 것을 볼 수 있다. 다른 한편으로, 정사각형(Table 4)인 경우, $\alpha \geq 270^\circ$ 에 대하여 노치 깊이의 증가에 따른 진동수 값의 변화는 다소 불규칙하다는 것을 알 수 있다.

직사각형 또는 정사각형 평판에 대하여, $\alpha = 90^\circ$ 와 $\alpha = 180^\circ$ 인 경우에는 V노치가 형성되지 않는다는 것을 알고 있으며, $\alpha = 180^\circ$ 인 경우에, 주어진 c/a 에 따라 다양한 형상비를 가지는 직사각형 평판으로 간주될 수 있다. 예를 들면, $\alpha = 180^\circ$ 에 대하여,

Table 3 Frequency parameters $\Omega^2 \sqrt{\rho/D}$ for completely free rectangular plates ($a/b = 2$) with V-notches

α	c/a	Mode					
		1	2	3	4	5	6
90°	0.75	8.604	9.800*	21.79	22.69*	23.29	33.68
	0.5	11.72	12.02	23.86	28.77*	28.90	51.78
	0.0	21.17	21.86	29.46	52.42*	57.40	68.85
	-0.5	38.13	58.25	90.80	98.95*	114.9	168.2
180°	0.75	7.005	7.623*	17.10	19.39	22.10	27.27
	0.5	8.930	9.516	20.60	22.18	25.65	29.78
		(8.946)	(9.602)	(20.74)	(22.35)	(25.87)	(29.97)
	0.0	13.42	19.60	24.27	34.80*	34.80	61.11
		(13.49)	(19.79)	(24.43)	(35.02)	(35.02)	(61.53)
	-0.5	21.46	26.58	58.49	59.61	88.02	101.5
270°	0.75	5.641	6.513	13.86*	15.54	21.34	24.03
	0.5	6.536	6.602	13.61	16.78	21.50	25.27
	0.0	8.382	12.11	19.48	19.84	29.19	32.98
	-0.5	11.63	19.27	26.48	35.66	47.75	51.30
300°	0.75	5.514	6.494	13.78*	15.26	21.09	23.80
	0.5	5.858	5.885	12.12	15.43	20.10	22.80
	0.0	5.484	8.049	13.98	17.59	21.79	26.33
	-0.5	6.682	14.21	18.68	21.57	36.46	36.61
330°	0.75	5.429	6.492	13.77*	15.06	20.79	23.67
	0.5	5.554	5.696	11.51	15.19	18.08	21.60
	0.0	3.393	5.743	10.98	14.18	16.33	19.68
	-0.5	2.462	5.887	9.257	14.02	15.33	19.19
350°	0.75	5.384	6.497	13.77*	14.94	20.56	23.63
	0.5	5.416	5.643	11.16	14.99	16.74	20.64
	0.0	2.938	5.456	10.12	11.48	15.03	16.90
	-0.5	1.752	5.417	8.462	8.932	12.02	14.96
355°	0.75	5.373	6.499	13.78*	14.91	20.50	23.62
	0.5	5.386	5.634	11.07	14.89	16.46	20.37
	0.0	2.848	5.402	9.856	10.77	14.93	16.19
	-0.5	1.633	5.383	7.957	8.361	10.82	14.91
360°	0.75	5.361	6.509	13.85*	14.87	20.43	23.72
	0.5	5.355	5.697	11.10	14.77	16.21	20.21
	0.0	2.824	5.350	9.653	10.13	14.86	17.40
	-0.5	1.562	5.351	7.167	9.863	11.81	14.90

* Indicates antisymmetric modes
Results in parenthesis cf. Leissa⁽⁹⁾

$c/a = 0.5$ 인 경우의 평판은 $a/b = 2/3$ $3/2$ 인 직사각형을 나타내며, $c/a = 0$ 인 경우의 평판은 정사각형을 나타낸다. Table 3에서 이러한 평판의 진동수 값을 Leissa(9)가 제시한 값들과 비교하여 놓았으며, 여기서 두 결과 값들이 상당히 근접한다는 것을 볼 수 있다. 또한, $\alpha = 90^\circ$ 인 경우 분절된 정사각형 평판(Fig. 3 참조)의 진동수 값을 나타내며, 이전에 발표된 적이 없는 매우 흥미로운 진동수 데이터로서 고려될 수 있다.

Table 4에서 $\alpha = 355^\circ$ 와 $c/a = 0.75$ 인 경우, 예리하고 얇은 깊이의 균열을 갖는 완전 자유단 정사각형 평판으로 간주될 수 있으며, 그것의 진동수 값

Table 4 Frequency parameters $\Omega^2 \sqrt{\rho/D}$ for completely free square plates ($a/b = 1$) with V-notches

α	c/a	Mode number					
		1	2	3	4	5	6
90°	0.75	23.92	25.76*	35.19	59.16	69.60	76.30
	0.5	25.95	32.39	44.74	64.85*	87.72	91.11
	0	38.14	58.25	90.80	98.95	144.9	168.2
	-0.5	152.6	233.0	363.6	395.8	591.3	672.6
180°	0.75	15.38	20.98	29.61	38.00	41.89	61.31
	0.5	17.91	21.33	39.62	42.40	51.78	62.29
	0.0	21.46	26.58	58.48	59.61	88.02	101.5
	-0.5	21.41	52.16	59.41	108.2	125.7	171.5
270°	0.75	13.15	19.89	23.85	33.71	34.90	60.29
	0.5	12.30	20.29	23.17	32.04	36.51	57.02
	0.0	11.63	19.27	26.48	35.66	47.75	51.30
	-0.5	14.42	18.70	42.11	49.21	57.55	74.47
300°	0.75	13.17	19.66	23.89	33.73	34.90	60.27
	0.5	12.21	19.65	23.07	31.26	34.98	54.73
	0.0	9.457	18.36	22.60	30.54	40.21	43.61
	-0.5	7.968	16.90	23.30	29.66	41.30	52.15
330°	0.75	13.20	19.48	23.89	33.80	34.28	60.32
	0.5	12.20	19.01	23.15	30.78	33.74	52.59
	0.0	8.726	16.76	22.01	26.99	34.99	38.95
	-0.5	6.079	14.04	21.61	27.13	28.42	37.53
350°	0.75	13.21	19.36	23.97	33.82	34.08	60.33
	0.5	12.22	18.58	23.20	30.50	33.00	51.26
	0.0	8.397	15.45	21.97	26.99	32.78	38.95
	-0.5	5.350	11.95	21.55	22.04	28.13	32.91
355°	0.75	13.20	19.34	23.96	33.80	34.00	60.30
	0.5	12.22	18.47	23.21	30.44	32.82	50.92
	0.0	8.322	15.11	21.97	23.73	32.32	37.24
	-0.5	5.185	11.46	21.05	21.54	28.09	32.08
Complete square plate		13.42	19.60	24.27	34.80	34.80	61.11

* Antisymmetric mode

이 완전한 정사각형 평판의 진동수 데이터와 비교하는 것은 매우 중요하다. 이 비교로부터, 균열의 발생

은 대칭 모드인 2차, 3차, 5차 모드에 대해 각각 1.33 %, 1.28 %, 2.30 %만큼 진동수 값이 감소하였고, 반면에 반대칭 모드인 1차, 4차, 6차 모드에 대해서는 각각 1.64 %, 2.87 %, 1.33 %의 감소가 나타났다.

Fig. 4와 Fig. 5에는 $\alpha = 355^\circ$ 일 때 노치 깊이가 $c/a = 0.75, 0, -0.5$ 로 증가하는 경우에 대해서 완전 자유단 직사각형 및 정사각형 평판의 정규화된 횡진동변위 등고선을 각각 나타내고 있다. 또한, 진동하는 동안의 각 모드형상은 횡 변위가 영(즉, $W/W_{max} = 0$)인 굵은 선으로 보여주고 있다. Fig. 4와 Fig. 5에

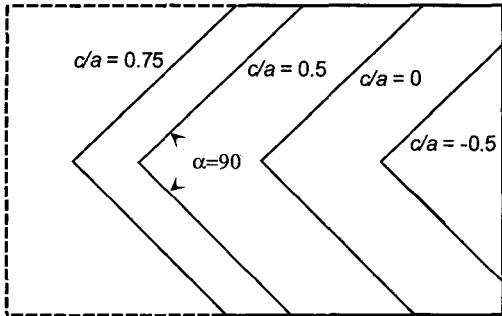


Fig. 3 Plates with $\alpha = 90^\circ$ and various c/a ratios

Mode No.	$a/b = 2$		
	$c/a = 0.75$	$c/a = 0$	$c/a = -0.5$
1			
	5.373	2.848	1.633
2			
	6.499	5.402	5.383
3			
	13.78	9.856	7.957
4			
	14.91	10.77	8.361
5			
	20.50	14.93	10.82
6			
	23.62	16.19	14.91

Fig. 4 Normalized transverse displacement contours (W/W_{max}) of rectangular plates with $\alpha = 355^\circ$

Mode No.	$a/b = 1$		
	$c/a=0.75$	$c/a=0$	$c/a=-0.5$
1			
	13.20	8.322	5.185
2			
	19.34	15.11	11.46
3			
	23.96	21.97	21.05
4			
	33.80	23.73	21.54
5			
	34.00	32.32	28.09
6			
	60.30	37.24	32.08

Fig. 5 Normalized transverse displacement contours (W/W_{max}) of square plates with $\alpha = 355^\circ$

서 노치 깊이가 증가함에 따라 모드형상이 상당한 변화가 발생된다는 것을 알 수 있으며, 이것은 평판이 진동하는 동안 균열 선단에 존재하는 상당히 큰 모멘트 응력이 평판의 진동특성에 커다란 영향을 미친다는 것을 의미한다. Fig. 4와 Fig. 5에서의 등고선은 최대 횡변위 값에 대해 정규화(즉, $-1 \leq W/W_{max} \leq 1$)되었으며, 각각의 모드형상에 일치하는 진동수 값 (Table 3과 4 참조)을 함께 나타내었다.

5. 결 론

Ritz 방법론과 고전판 이론을 함께 이용하여, V노치 또는 예리한 균열을 포함하는 완전 자유단 직사각형 및 직사각형 평판에 대하여 매우 정확한 진동수 값을 구하였다. 이러한 과정에서, Ritz 방법에 이용되는 변위함수는 수학적으로 완전한 대수 삼각 다항식과 V노치 선단에 존재하는 모멘트 특이도를 반영하는 코너함수로 되어있다. 그러한 코너함수의 유효성이 진동수의 수렴도 분석을 통해 검증되었다.

본 논문에서는 세 가지 기하학적 파라미터(즉, 형상비, 노치 각, 노치 깊이)에 대해 직사각형 평판의 무차원 진동수와 모드형상을 제시하였다. 본 논문에서 제공한 진동수 및 모드형상에 관한 데이터를 주의 깊게 검토함으로써, 노치 또는 균열을 포함하는 평판에 존재하는 상당히 큰 국부응력에 대한 기본적인 이해를 하는데 도움이 될 것이다. 특히, 현 결과는 실험이나 유한요소법과 같은 다른 해석적 기법을 이용해서 앞으로 얻어질 데이터와의 비교자료로서 이용될 수 있다.

참 고 문 헌

(1) Leissa, A. W., 1977, Recent Research in Plate Vibrations: 1973-1976, Complicating Effects,

Shock and Vibration Digest, Vol. 10, No. 12, pp. 21~35.

(2) Leissa, A. W., 1981, Plate Vibration Research: 1973-1976, Complicating Effects, Shock and Vibration Digest, Vol. 13, No. 10, pp. 19~36.

(3) Leissa, A. W., 1987, Recent Studies in Plate Vibrations: 1981-1985, Part II, Complicating Effects, Shock and Vibration Digest, Vol. 19, No. 3, pp. 10~24.

(4) 최명수, 2003, 유한요소-전달강성계수법을 이용한 평판 구조물의 강제진동해석, 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권, 제 2 호, pp. 99~107.

(5) Whiteman, J.R. and Akin, J.E., "Finite elements, singularities and fracture," in J.R. Whiteman (ed.), The Mathematics of 1979, Finite Elements and Applications III, MAFELAP 1978, Academic Press, London, pp. 35~54.

(6) Whiteman, J.R., 1982, "Finite elements for singularities in two- and three-dimensions," in J.R. Whiteman (ed.), The Mathematics of Finite Elements and Applications IV, MAFELAP 1981, Academic Press, London, pp. 37~55.

(7) Leissa, A.W. McGee, O.G. and Huang, C.S., 1993, Vibrations of Sectorial Plates Having Corner Stress Singularities, Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, pp. 134~139.

(8) Williams, M.L., 1951, Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Singular Corners of Plates Under Bending, Proceeding of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 325~329.

(9) Leissa, A.W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257~293.