

내부감쇠가 건성마찰력을 받는 공작기계의 안정성에 미치는 효과

고준빈*

(논문접수일 2003. 12. 12, 심사완료일 2004. 2. 3)

The Effect of an Internal Damping on the Stability of Machine Tool Engineers Subjected to Dry Friction Force

Jun-Bin Ko*

Abstract

This paper discussed on the effect of an internal damping on the stability of an elastic material subjected to dry friction force. Dry friction forces act tangentially at the contact surface between a moving belt and elastic material. The elastic material on a belt moving is modeled for simplicity into a cantilevered beam subjected to distributed follower force. In the analysis, the discretized equations derived according to finite element method are used. The impulse response of the beam are studied by the mode superposition method to observe the growth rate of the motion. It is found that the internal damping in cantilevered beam subjected to distributed follower force may act destabilizing.

Key Words : Internal Damping(내부감쇠), Dry Friction Force(건성마찰력), Distributed Follower Force(분포종동력), Impulse Response(임펄스응답)

1. 서론

마찰에 의한 진동현상의 대표적인 예로서는 공작기계의 chatter(채터), 자동차의 브레이크 소음(brake noise), 스틱 슬립(stick slip)등이 있다. 이들의 예는 모두 회전체와 탄성 재료사이의 건성 마찰력이 발생하고, 이 건성마찰력에 의

해서 탄성재료가 진동하게 된다. 이러한 진동현상은 소음 뿐만 아니라 시스템 자체의 안정성에도 중요한 영향을 미치게 되므로 지금까지 많은 연구자들에 의해 연구되어 오고 있다^(1,2). 회전체의 가진 하에 있는 재료의 진동을 지배하는 운동방정식은 기본적으로 분포 마찰력이 주어지는 보 모델과 같은 것으로 알려져 있다. Hulten⁽³⁾은 마찰력을

* 한밭대학교 기계설계공학과 (kjb1002@hanbat.ac.kr)
주소: 305-719 대전광역시 유성구 덕명동 산 16-1

받는 브레이크 패드의 해석에 있어 마찰력을 종동력으로 간주 하여 동적 불안정성에 대하여 연구하였다. Ouyang 등⁽⁴⁾은 회전의 가진 하에서 원형 판의 동적거동을 연구하였고, 그는 또 다른 연구⁽⁵⁾에서 자동차 브레이크의 동적거동을 해석하기 위한 일반적인 방법을 개발하였다. 그리고 Kang과 Tan⁽⁶⁾은 자동차와 항공기 브레이크 시스템으로부터 상정한 역학적 모델로써 주기적 가진 하에서의 분포 종동력을 받는 보의 동적 불안정성에 대하여 연구하였다. 그 외에도 많은 연구자들은 건성마찰력을 종동력으로 간주하여 해석하고 있다⁽⁷⁻⁹⁾. 그러나 이러한 연구들에서는 재료의 안정성에 중요한 영향을 미치는 것으로 알려져 있는 재료의 내부 감쇠(internal damping)의 효과를 고려하지 않았다. 따라서 본 연구는 회전체와 탄성재료로 구성되어 있는 시스템에 있어서, 탄성재료는 균일 단면의 보로서, 회전체와 탄성재료 사이의 건성 마찰력은 분포 종동력으로서 모델화하여 내부감쇠의 변화에 따른 탄성 재료의 안정성에 미치는 영향을 연구하였다. 유한요소법을 사용하여 운동방정식을 유도하였으며, 보의 자유단에 단위 임펄스를 입력하고 그 응답 파형을 관찰함으로써 분포 종동력 값에 따른 내부감쇠의 효과를 조사하였다.

2. 수치 해석

2.1 수학적 모델

Fig. 1의 회전체와 탄성재료로 구성되어 있는 시스템은 Fig. 2와 같이 간단히 모델화하였다. Fig. 2에 있어서 접선 분포 종동력 q 를 받는 균일 단면의 외팔보에 있어서, 전체 길이는 L , 굽힘강성은 EI , 내부 재질감쇠계수를 E^* , 단위 길이당 보의 질량 m 이다.

2.2 확장된 헤밀턴 원리에 의한 정식화

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W_c - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta W_{id} + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (1)$$

여기서, T 는 운동에너지, W_c 는 유체력의 보존 성분에 의한 일, U 는 탄성포텐셜 에너지, δW_{id} 는 보의 내부감쇠에 의한 가상일, δW_{nc} 는 외부 감쇠기에 의한 가상일, 그리고 δW_{nc} 는 비 보존성분에 의한 가상일을 나타낸다.

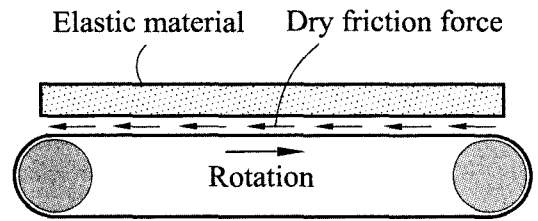


Fig. 1 Conceptual sketch of elastic material subjected to dry friction force

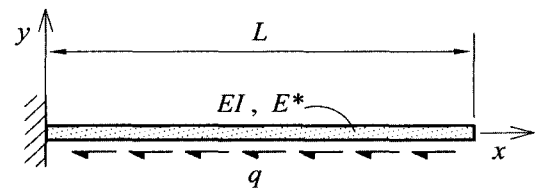


Fig. 2 Mathematical model of a beam subjected to distributed follower force

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$W_c = \frac{1}{2} \int_0^L q(L-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$\delta W_{id} = - \int_0^L E^* I \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) dx \quad (5)$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^L q \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y dx \quad (6)$$

식 (2)부터 식 (6)을 식 (1)에 대입하고 변분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx + \int_0^L \left\{ q(L-x) \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right\} dx \right. \\ & \left. - \int_0^L \left\{ EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \right\} dx \right] dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left\{ E^* I \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + q \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta y \right\} dx \right] dt = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

계산상의 편리를 위해 무차원 파라미터들을 도입한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ \gamma &= \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \rho = \frac{qL^3}{EI} \quad (8) \end{aligned}$$

식 (8)의 무차원 파라미터를 식 (7)에 대입하면

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right) d\xi + \int_0^1 \left\{ \rho(1-\xi) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \right\} d\xi - \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) \right\} dx \right] d\tau - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_0^1 \left\{ \gamma \left(-\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^2 \partial \tau} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right) + \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right) \delta \eta \right\} d\xi \right] d\tau = 0 \quad (9)$$

2.3 유한요소법의 적용

식 (9)의 무차원화된 지배방정식으로부터 수치 해를 얻기 위해 유한요소법을 이용하였으며, 외팔 송수관을 N 개의 균일한 요소로 분할한 그림은 Fig. 3과 같다.

Fig. 2의 국부좌표 ($\zeta = N\xi - i + 1$; $0 \leq \zeta \leq 1$)를 식 (9)에 대입하면 다음과 같은 이산화된 방정식을 얻게 된다.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^1 \eta_r \delta \eta_r + \rho(1-\zeta) N^2 \eta_\zeta \delta \eta_\zeta - N^4 \eta_{\zeta\zeta} \delta \eta_{\zeta\zeta} - \gamma N^4 \eta_{\zeta\zeta} \delta \eta_{\zeta\zeta} - \rho N \eta_\zeta \delta \eta \right\} d\zeta \right] d\tau = 0 \quad (10)$$

한편 변위함수 $\eta^{(i)}(\zeta, \tau) = \{e^{(\lambda)}(\zeta)\} \cdot \{v^{(i)}(\tau)\}$ 를 도입하고, 이를 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 특성 방정식을 얻는다.

$$[M]\{v_{\tau\tau}\} + [C]\{v_\tau\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (11)$$

2.4 고유치 문제

식 (11)에 있어서 변위벡터 $\{v(\tau)\}$ 를 다음과 같이

$$\{v(\tau)\} = \{X\} \exp(\lambda\tau) \quad (12)$$

가정하면 식 (12)는 식 (13)의 표준 고유치문제에 귀착된다.

$$\{Z\} = [A]\{Z\} \quad (13)$$

여기서,

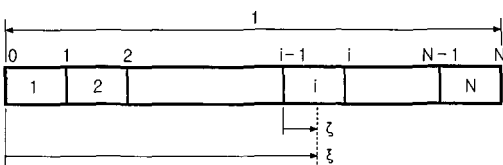


Fig. 3 Finite element model of the pipe

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\dot{v}\} \end{Bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \{0\} & \{I\} \\ \{-M^{-1}K\} & \{-M^{-1}C\} \end{bmatrix} \quad (14)$$

계의 안정성 판별은 특성근 ($\lambda = \sigma \pm i\omega$)의 실수부분인 σ 의 부호에 의해 판별된다. 즉, $\sigma > 0$ 일 때는 계가 불안정하게 되고, $\sigma < 0$ 일 때 계가 안정하게 된다. 따라서, $\sigma = 0$ 일 때 계의 안정과 불안정의 경계가 되는 임계조건으로 이 때의 분포 종동력이 임계 분포 종동력 (ρ_{cr})이 된다.

2.5 동적 응답

외부가진 $f(\tau)$ 를 받는 보의 동적 응답을 구하기 위하여, 식 (11)을 수정하면 다음과 같다.

$$[M]\{v_{\tau\tau}\} + [C]\{v_\tau\} + [K]\{v\} = f(\tau) \quad (15)$$

여기서 $f(\tau)$ 는 $N \times 1$ 행렬의 가진 벡터이다.

또, 식 (12)를 식 (15)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\{Z\} = [A]\{Z\} + [F] \quad (16)$$

여기서

$$[F] = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{-M^{-1}f\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

식 (16)의 일반적인 해^(10,11)는 다음과 같다.

$$\{Z(\tau)\} = \{U\} \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \times \left[\int \{diag e^{\lambda_i \tau}\} \{U^{-1}\} [F(\tau)] d\tau + \{II\} \right] \quad (18)$$

여기서 U 는 $2N \times 2N$ 행렬의 고유치 벡터이고, II 는 $2N \times 1$ 의 초기값에 의해 결정되는 행렬 벡터이다.

고유치 벡터 U 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[U] = \begin{bmatrix} \{U_{upper}\} \\ \{U_{lower}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{U_{upper}\} \\ \{U_{lower}\} \{diag \lambda_i\} \end{bmatrix} \\ \{U^{-1}\} = \begin{bmatrix} \{U_{left}^{-1}\} & \{U_{right}^{-1}\} \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서 $\{U_{upper}\}$, $\{U_{lower}\}$ 은 $\{U\}$ 벡터의 반을 경계로 하여 위쪽과 아래쪽 성분으로 각각 $N \times 2N$ 행렬의 벡터이다.

식 (19)를 식 (18)에 대입하면 $N \times 1$ 의 응답벡터는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\{v(\tau)\} = \{U_{upper}\} \{diage^{\lambda, \tau}\} \times \left[\int \{diage^{\lambda, \tau}\} \{U_{right}^{-1}\} \{M^{-1}\} [f(\tau)] dt + \{II\} \right] \quad (20)$$

보의 자유단에서 단위 임펄스일 경우는 가진벡터 $f(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\{f(\tau)\} = \delta(\tau) \{0, 0, \dots, \dots, 1\}^T \quad (21)$$

여기서 $\delta(\tau)$ 는 Dirac-델타 함수이다.

식 (21)을 식 (20)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\{v(\tau)\} = \{U_{upper}\} \{diage^{\lambda, \tau}\} \left\{ \begin{matrix} U^{-1} \\ M^{-1} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \{II\} \quad (22)$$

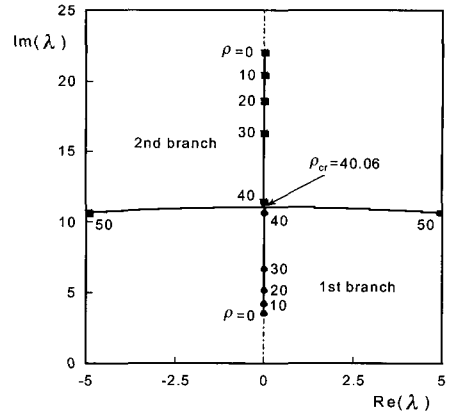
초기조건 $v(\tau)=0$ 이므로, 결국 식 (22)은 다음과 같이 임펄스 응답 벡터 $\{v(\tau)\}$ 을 얻을 수 있다.

$$\{v(\tau)\} = \{U_{upper}\} \{diage^{\lambda, \tau}\} \left\{ \begin{matrix} U_{right}^{-1} \\ M^{-1} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

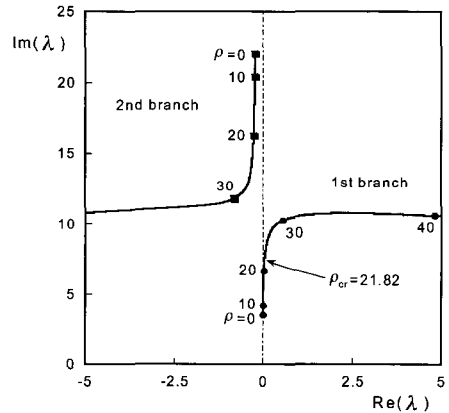
3. 해석결과 및 고찰

3.1 고유치 곡선

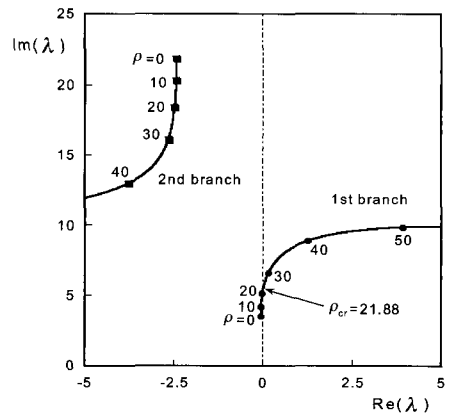
일반적으로 탄성재료에 분포한 내부감쇠는 0.001 ~ 0.01에서 존재하므로 본 연구에서는 내부감쇠가 0, 0.001, 0.01을 고려하는 것으로 한다. Fig. 4(a)-(c)는 $\gamma=0, 0.001, 0.01$ 일때, 1차와 2차 고유치 곡선을 나타내고 있다. Fig. 4 (a)는 내부감쇠를 무시한 경우의 1차와 2차 고유치 곡선이다. 이 그림에서는 1차와 2차 고유치 분기가 일치하여 플러터가 발생하고, 이때의 임계 분포 중동력 값 $\rho_{cr}=40.06$ 이다. Fig. 4(b)는 내부 감쇠($\gamma=0.001$)를 고려한 경우의 1차와 2차 고유치 곡선이다. 1차 고유치 분기에서 허수축을 가로질러 플러터가 발생하고, 이때의 임계 분포 중동력 값이 21.82이며 2차 고유치 분기는 안정한 상태인 것을 알 수 있다. 또한 이 그림에서 알 수 있는 것은 내부 감쇠를 무시한



(a) $\gamma=0.0$



(b) $\gamma=0.001$



(c) $\gamma=0.01$

Fig. 4 Argand diagrams of the two lowest eigen-branches of the beam when $\gamma=0, 0.001$ and 0.01

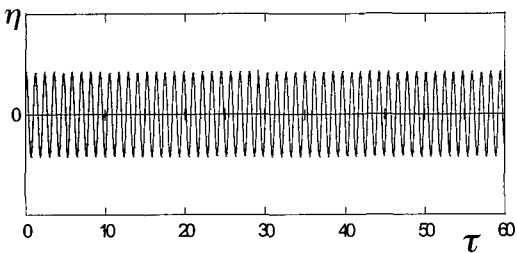
경우에 비해 임계 종동력 값이 급격히 감소한다는 것이다.

Fig. 4(c)는 내부 감쇠($\gamma=0.01$)를 고려한 경우의 1차와 2차 고유치 곡선이고, 1차 고유치 분기에서 플러터가 발생한다. 이때의 임계 분포 종동력 값은 21.88로 $\gamma=0.001$ 의 경우의 임계값 보다 증가하는 것을 알 수 있다. 2차 고유치 곡선은 내부 감쇠의 값이 클수록 좌측 평면으로 이동하지만 안정성에 영향을 미치지 않는다는 것을 알 수 있다.

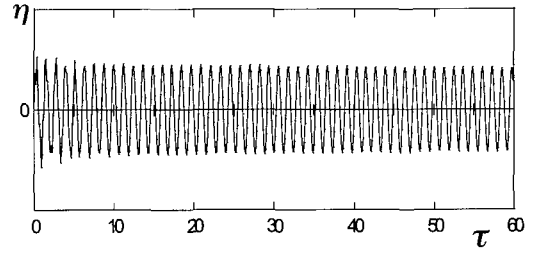
3.2 동적 응답

Figs. 5~7은 보의 자유단에서 단위 임펄스를 입력에 대한 응답의 결과를 보여 주고 있다. 안정성을 판별하는데 있어서 무차원 시간 파라미터 τ 에 따라 진폭이 증가하면 불

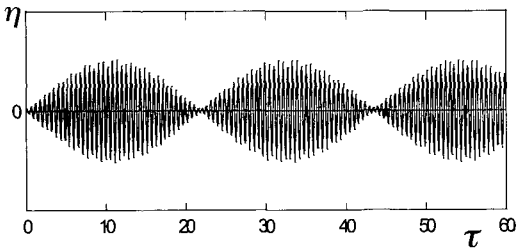
안정(unstable), 무차원 시간 파라미터 τ 에 따라 진폭이 감소하여 $\tau \rightarrow \infty$ 의 경우에 그 진폭이 0에 접근할 경우는 점근안정(asymptotic stable)하다는 점근안정성 개념이 도입되었다. 본 논문에서는 무차원 시간 파라미터 τ 를 60까지로 하여 진폭의 성장 경향을 파악하였다. Fig. 5(a)~(c)는 내부 감쇠를 무시한 경우 임계 분포 종동력값 근처에서의 임펄스 입력에 대한 응답을 보여 주고 있다. Fig. 5(a)는 분포 종동력이 $\rho=40$ 일 경우의 임펄스 입력에 대한 응답을 나타내고 있다. 이 그림에서는 정상상태(steady state) 진동이 보여 지므로 계가 안정하다는 것을 알 수 있다. Fig. 5(b)는 임계 분포 종동력인 $\rho=40.05$ 일 경우의 응답을 나타내고 있다. 이 그림에서는 맥동(beating)이 보여지고 있다. 또한



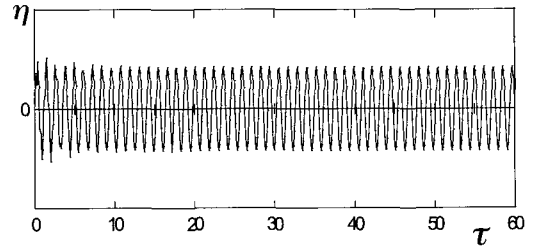
(a) $\rho=40$



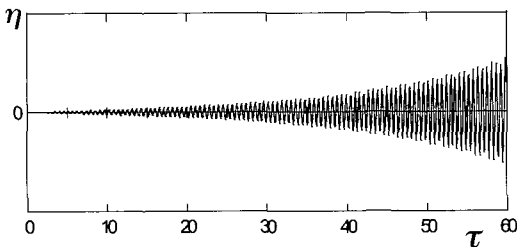
(a) $\rho=20$



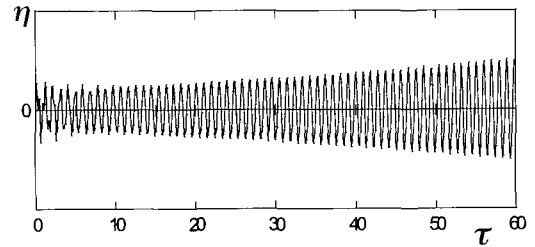
(b) $\rho=40.05$



(b) $\rho=21.82$



(c) $\rho=40.06$



(c) $\rho=30$

Fig. 5 Dynamic response of a beam when $\gamma=0$

Fig. 6 Dynamic response of a beam when $\gamma=0.001$

Fig. 5(c)에서는 임계 분포 종동력을 넘어선 $\rho=40.06$ 일 경우의 응답을 나타내며 발산하고 있으며 계가 불안정하다는 것을 알 수 있다. Fig. 6(a)~(c)는 내부 감쇠가 $\gamma=0.001$ 인 경우 임계 분포 종동력값 근처에서의 응답을 보여 주고 있다. Fig. 6(a)은 분포 종동력이 $\rho=20$ 일 경우의 응답을 나타내고 있다. 이 그림에서는 아주 미소하게 진폭이 감소해 가므로 계가 안정하다는 것을 알 수 있다. Fig. 6(b)는 임계 분포 종동력 값인 $\rho=21.82$ 일 경우의 응답을 나타내고 있다. 이 그림에서는 계속 일정한 진폭을 유지하므로 계가 안정하다고 할 수 있다. 또한 Fig. 6(c)에서는 임계 분포 종동력 값을 넘어선 $\rho=30$ 일 경우의 응답을 나타내며 발산하고

있으며 계는 불안정하다. Fig. 7(a)~(c)는 내부 감쇠가 $\gamma=0.01$ 인 경우 임계 분포 종동력 값 근처에서의 응답을 보여 주고 있다. Fig. 7(a)은 분포 종동력이 $\rho=20$ 일 경우의 응답을 나타내고 있으며 진폭이 감소해 가므로 계는 안정하다. Fig. 7(b)는 임계 분포 종동력 값인 $\rho=21.88$ 일 경우의 응답을 나타내며 계가 안정하다는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 7(c)에서는 임계 분포 종동력 값을 넘어선 $\rho=30$ 일 경우의 응답을 나타내며 발산하고 있으며 계는 불안정하다.

3.3 안정성 선도

Fig. 8은 재료의 내부 감쇠상수 γ 의 변화에 따른 임계 분

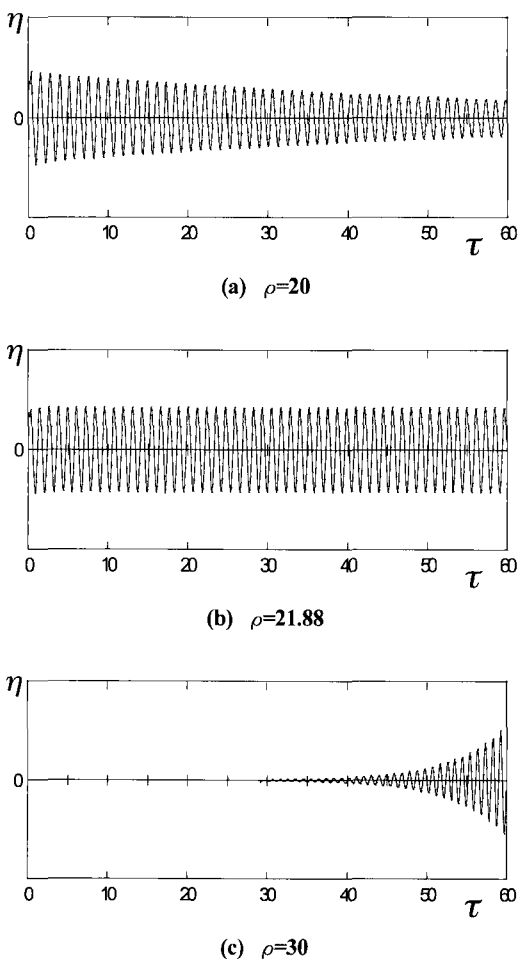


Fig. 7 Dynamic response of a beam when $\gamma=0.01$

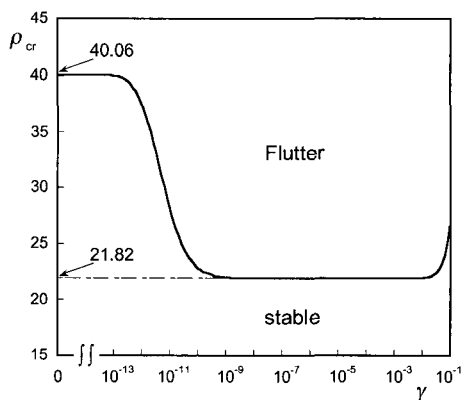


Fig. 8 Critical distributed follower force depending on the internal damping

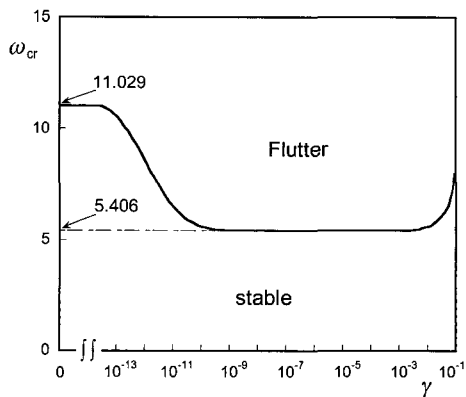


Fig. 9 Critical eigen frequency depending on the internal damping

포 종동력 값을 나타내고 있다. 내부 감쇠 상수를 무시한 경우 플러터가 발생하는 임계 분포 종동력 값 ρ_{cr} 은 40.06이다. 내부 감쇠가 $10^{-13} < \gamma < 10^{-9}$ 의 구간에서 임계값이 급격히 감소하고, $10^{-9} \leq \gamma < 10^{-2}$ 의 구간에서는 임계 플러터 값이 ρ_{cr} 은 21.82로 일정하다는 것을 알 수 있다. 실제로 대부분의 금속재료의 내부 감쇠는 이 구간에서 존재하는 것으로 알려져 있다. 또 $\gamma = 10^{-2}$ 보다 큰 값에서는 플러터가 발생하는 임계값이 증가하는 것을 알 수 있다.

이러한 미소 내부 감쇠($\gamma = 10^{-9} \sim 10^{-2}$)를 고려한 경우, 계에 불안정화 효과를 가져온다는 것은 Ziegler⁽¹²⁾에 의해 처음 연구되었다. 그는 집중 종동력을 받는 점탄성 2중진자 모델에 있어서 미소 내부 감쇠를 고려한 경우, 내부 감쇠를 무시한 경우에 발생하는 임계 플러터 값에 비하여 크게 감소한다는 것을 알았다. 그 후에도 이와 유사한 결과는 많은 연구자들에 의해 연구^(13,14)되어 오고 있다.

Fig. 9는 재료의 내부 감쇠상수 γ 의 변화에 따른 Fig. 8의 임계 분포 종동력 값에 상응하는 고유진동수 값을 나타내고 있다는 것이다. 이 그림에서 알 수 있는 것은 내부 감쇠의 변화에 따른 임계고유치와 그에 상응하는 고유진동수의 변화가 유사하다. 이러한 사실은 고유진동수가 안정성한계를 결정하는데 큰 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구는 건성 마찰력을 받는 탄성재료를 분포 종동력을 받는 탄성보로 모델화하여 내부 감쇠가 보의 안정성에 미치는 영향에 대하여 조사하였다. 얻어진 결과들은 다음과 같이 요약할 수 있다.

- (1) 탄성보의 내부 감쇠를 무시한 경우 ($\gamma = 0$)의 임계값은 40.06이고, 내부 감쇠($\gamma = 0.001$)를 고려한 경우 21.82로 급격히 감소하는 것을 알 수 있다. 또 내부 감쇠($\gamma = 0.01$)를 고려한 경우는 21.88로 내부 감쇠($\gamma = 0.001$)를 고려한 경우 21.82의 경우 보다 조금 증가하는 것을 알 수 있다.
- (2) 동적응답의 해석에 있어서 내부 감쇠를 무시한 경우 임계 분포 종동력 값을 조금 증가해도 크게 발산하는 불안정 상태가 되는 것을 알 수 있다. 또 내부 감쇠를 고려한 경우에 있어서 내부감쇠의 크기가 클수록 감쇠도와 발산도가 크다는 것을 알 수 있다.
- (3) 대부분의 탄성재료에 존재하는 내부감쇠($10^{-9} \leq \gamma$

$< 10^{-2}$)의 임계 분포 종동력값은 21.82로 내부감쇠를 무시한 경우의 임계 분포 종동력값은 40.06에 비하여 급격한 불안정화 효과를 가져온다는 결과를 얻어냈다.

따라서 탄성재료와 같은 공작기계의 동적거동의 해석에 있어서 계산의 편리상 무시되어 왔던 재료의 내부 감쇠가 공작기계의 안정성에 큰 영향을 미친다는 사실을 밝혀냈다.

참고 문헌

- (1) Lee, S. Y., Kim, J. W., Lee, J. M., and Kim, G. B., 2003, "Chatter Analysis of Parallel Mechanism-based Universal Machining Center", *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 5, pp. 691~697.
- (2) Bhushan, B., 1991, *Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Devices*, Springer-Verlag Inc, New York.
- (3) Hulten, J. O., 1997, "Friction Model Applied to Drum Brake Squeal", *American Society of Mechanical Engineers 16th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise*, DETC97/VIB-4161.
- (4) Ouyang, H., Mottershead, J. E., Cartmell, M. P., and Friswell, M. I., 1998, "Friction-Induced Parametric Resonances in Discs: Effect of a Negative Friction-Velocity Relationship", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 209, pp. 251~264.
- (5) Ouyang, H., Mottershead, J. E., Brookfield, D. J., James, S., and Cartmell, M. P., 2000, "A Methodology for the Determination of Dynamic Instabilities in a Car Disc Brake", *International Journal of Vehicle Design*, Vol. 23, pp. 241~262.
- (6) Kang, B., and Tan, C. A., 2000, "Parametric Instability of a Leipholz Column under Periodic Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 5, pp. 1097~1113.
- (7) Chan, S. N., Mottershead, J. E., and Cartmell, M. P., 1994, "Parametric Resonances at Subcritical Speeds in Discs with Rotating Frictional Loads", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C*, Vol. 208, pp. 417~425.
- (8) Tseng, J. G., and Wickert, J. A., 1998, "Nonconservative Stability of a Friction Loaded Disk", *Transactions*

- of the American Society of mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 120, pp. 922~929.
- (9) Tian, J., and Hutton, S. G., 1999, "Self-Excited Vibration in Friction in Flexible Rotating Discs Subjected to Various Transverse Interactive Forces a General Approach", *Transactions of the American Society of mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66, pp. 800~805.
- (10) Fawzy, I., and Bishop, R. E. D., 1976, "On the Dynamics of Linear Nonconservative Systems", *Proceedings of the Royal Society of London, Part A*, Vol. 352, pp. 25~40.
- (11) Newland, D. E., 1989, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Academic Press, New York, pp. 226~257.
- (12) Ziegler, H., 1952, "Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik", *Ingenieur Archiv*, Vol. 20, pp. 49~56.
- (13) Herrmann, G., and Jong, I. C., 1965, "On the Destabilizing Effect of Damping in Conservative Elastic Systems", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 592~597.
- (14) Bolotin, V. V., and Zhinzher, N. I., 1969, "Effect of Damping on Stability of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 5, pp. 965~989.