

## 고차 형상함수를 이용한 고속 가스-부상 FE 윤활해석

이안성<sup>†</sup> · 김준호<sup>\*</sup>

한국기계연구원 회전체그룹, \*한국셀마스타(주) 기술연구소

### FE Lubrication Analyses of High-Speed Gas-Levitation Applications using High-Order Shape Function

An Sung Lee<sup>†</sup> and Jun Ho Kim<sup>\*</sup>

Rotordynamics Group, Korea Institute of Machinery and Materials  
\*R&D Center, Korea Seal Master Co.

**Abstracts** – In high-speed gas-levitation applications a high compressibility number may bring a numerical difficulty in predicting generated pressure profiles accurately as it causes erroneous sudden pressure overshoot and oscillation in the trailing-edge. To treat the problem, in this study an exact exponential high-order shape function is introduced in the FE lubrication analyses. It is shown by various example applications that the high-order shape function scheme can successfully subdue undesired pressure overshoot and oscillation.

**Key words** – FE lubrication analysis, gas-levitation, high-speed, high-order shape function, high compressibility number.

#### 1. 서 론

1970년대 이래 윤활 문제의 해석도구로 유한요소법이 보편적으로 사용되고 있다. 유한요소법은 복잡한 형상의 구현이 쉬울 뿐 아니라 다양한 경계조건의 체계적인 취급이 가능하고, 특히 시일 면에 음각된 그루브와 같은 기하 형상의 불연속 문제에도 용이하게 적용될 수 있는 장점이 있다. Booker와 Huebner[1]는 윤활 문제에 대한 유한요소법의 적용 가능성과 유효성을 보였으며, Rhode와 Oh[2]는 다른 수치해석 기법에 대비한 유한요소법의 우수성을 제시하였다. Reddi와 Chu[3]는 처음으로 압축성 윤활 문제에 유한요소법을 적용하였으며, 저속(압축성 계수  $\Lambda = 10$ ) 회전하는 가스 베어링의 윤활 해석을 수행하였다. 압축성 계수  $\Lambda$ 는 직교 좌표계에 대해  $\Lambda = 6\mu UL/(p_{ref} \cdot h_{min}^2)$ , 그리고 원통 좌표계에 대해  $\Lambda = 6\mu\omega r_o^2/(p_{ref} \cdot h_{min}^2)$ 이다.

그러나, 고속에서는 압축성 Reynolds 방정식에 포함된 Couette 대류 유동항(또는 동압항)의 지배적인 영향

으로 압력 해의 진동현상이 발생하게 되어, 일반적으로 고속 적용의 가스 시일 또는 베어링에서 안정적 설계 해석결과를 얻는 데는 어려움이 따르게 된다. 이러한 문제를 해결하고자 지금까지 여러 가지 방법들이 제시되었다. 통상적인 h-FEM[4]은 사용된 요소의 수를 늘려 해의 수치적 안정을 가져오며, 보다 발전된 p-FEM[5]은 요소의 두 절점 사이에 고차 미분항을 포함시켜 얻어진 고차 형상함수를 사용하여 적은 요소 수로도 안정된 해를 가져온다. Heinrich와 Zienkiewicz[6]는 대류전달 유동문제에서 상류도식법(upwind scheme)을 사용하여 안정적인 수치 해를 얻었으며, Garcia-Suarez 등[7]은 자기 기록장치에 사용되는 가스 슬라이더 베어링의 윤활 해석에 상류도식법을 적용하였다. Bonneau 등[8]은 가스 스파이럴 그루브 스톱스트 베어링과 페이스 시일의 윤활 해석에 상류도식법을 적용하였으며, 특히 중·저속( $\Lambda = 100$  이하)으로 운전되는 시일에 대해서 안정적 수치 해를 얻었다. 그러나, 상류도식법은 정식화 과정이 까다롭고 Couette 대류항에 인위적으로 첨가되는 수치적 확산항(numerical diffusion term)에 대한 조절을 필요로 하기 때문에 적용이 쉽

<sup>†</sup>주저자 · 책임저자 : aslee@kimm.re.kr

않다. 한편, 최근에 새로운 지수형태의 고차 형상함수 (exponential high-order shape function)를 적용한 고속 압축성 유체의 유한요소 유효 해석기법이 제안되었다[9-11]. 여기서, 고차 형상함수는 개개 단위 요소 내의 평균 압력과 필름두께를 적용하여 선형화된 정상상태 편미분 레이놀즈 방정식으로부터 유도되며, 상류도 식법과 달리 인위적인 항이 포함되지 않고 기존의 유한요소 정식화에 쉽게 적용될 수 있다.

한편, 가스를 유효 매체로 하는 비접촉 기계적 페이스 시일들은 흔히 드라이 가스 시일(또는 간단히 가스 시일)로 불린다. 드라이 가스 시일은 60년대 후반 가스 베어링 개념으로부터 발전되어, 70년대 항공용 가스 터빈에서 압축기로부터 블리드(bleed)된 압축 공기의 베어링 내 유입 최소화를 통한 전체 유효 시스템의 경량화를 목적으로 개발 적용된 이래, 현재는 극한 또는 오염환경에서 운전되는 터보·유체기계를 위한 정밀 누설제어 부품으로 크게 주목받고 있으며, 그 적용 분야가 폭 넓게 확대되어 가고 있다[12-14]. Shapiro 등 [15]은 스파이럴 그루브 드라이 가스 시일이 액체 산화제(liquid oxygen, LOX) 터보펌프에 대한 가장 중요한 적용 후보임을 보고하였다. 현재, 드라이 가스 시일은, 특히, 압력과 속도가 매우 높아 보통의 기계적 페이스 시일들이 심각하게 과열(overheating)되는 분야에서 가장 큰 적용 가능성을 보여준다[16].

본 연구에서는, 향후 고속 비행체용 터보기계의 가스-부상 트라이보-요소(tribo-element)의 유효설계에 활용을 목표로, 고속 즉 높은 압축성 계수(high compressibility number)의 운전조건에서도 Reynolds 방정식으로부터 안정된 압력 수치 해의 획득이 가능한 지수형 고차 형상함수를 적용한 FE 가스-부상 유효해석 기법을 개발하고, 이를 다양한 고속 가스부상 용처에 적용해 보고자한다.

## 2. 지수형 고차 형상함수

2-D 직교좌표 정상상태 압축성 Reynolds 방정식에 Fig. 1(a)의 사변형 요소로 분할된 각 요소 내의 평균 압력과 필름두께를 적용하면, 식 (1)의 선형화된 요소별 Reynolds 방정식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 p_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_c}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial p_c}{\partial x} \quad (1)$$

여기서,  $\nu = \frac{6\mu U}{\rho_c h_c^2}$  이고,  $p_c$ 와  $h_c$ 는 요소 내의 평균

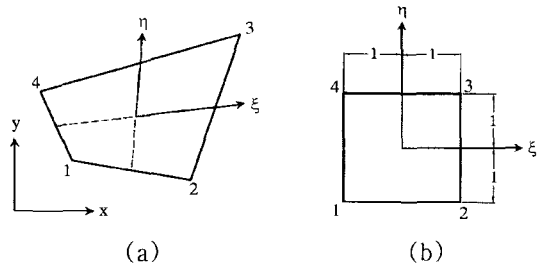


Fig. 1. (a) Four node quadrilateral element in coordinates (b) Plane isoparametric element in  $\xi\eta$  coordinates.

압력과 필름두께이다. 선형 편미분 방정식 식 (1)의 해는 변수분리법을 적용하여,

$$p_c(x,y) = (Ae^{\nu x} + B)(Cy + D) \quad (2)$$

여기서,  $A, B, C, D$ 는 압력의 엄밀 해석 해의 상수로써 Fig. 1(b)를 참고하여 식 (3)의 노드 경계조건을 적용하여 구해지며,

$$\begin{aligned} p_c(-1,-1) &= 1; \text{ otherwise } p_c = 0 \\ p_c(1,-1) &= 1; \text{ otherwise } p_c = 0 \\ p_c(1,1) &= 1; \text{ otherwise } p_c = 0 \\ p_c(-1,1) &= 1; \text{ otherwise } p_c = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

최종적으로,  $\xi\eta$  자연 좌표계 상의 4절점 엄밀 고차 형상함수가 얻어진다.

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(1-\eta) \left( \frac{e^{\lambda_c} - e^{\lambda_c \xi}}{e^{\lambda_c} - e^{-\lambda_c}} \right) \quad (4.a)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(1-\eta) \left( \frac{e^{\lambda_c \xi} - e^{-\lambda_c}}{e^{\lambda_c} - e^{-\lambda_c}} \right) \quad (4.b)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2}(1+\eta) \left( \frac{e^{\lambda_c \xi} - e^{-\lambda_c}}{e^{\lambda_c} - e^{-\lambda_c}} \right) \quad (4.c)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2}(1+\eta) \left( \frac{e^{\lambda_c} - e^{\lambda_c \xi}}{e^{\lambda_c} - e^{-\lambda_c}} \right) \quad (4.d)$$

여기서,  $\lambda_c = \frac{6\mu UL_c}{\rho_c h_c^2}$  는 local speed 또는 Peclet number라 하며,  $L_c$ 는 요소의 속도( $U$ ) 방향 평균길이이다. 유도된 고차 형상함수의 특징은  $\lambda_c \rightarrow 0$ 일 수록 통상의 bilinear isoparametric 형상함수의 성질에 근접해지고,  $\lambda_c \rightarrow \infty$ 일 수록 full upwind scheme의 사용과 일치하는 경향을 보인다. 그리고, 1-D 유한요소 유효해석을 위한 엄밀 고차 형상함수는 식 (4)로부터,

$$\psi_{1-D} = \frac{e^{\lambda_c} - e^{\lambda_c \xi}}{e^{\lambda_c} - e^{-\lambda_c}} \quad (5.a)$$

$$\psi_2)_{1-D} = \frac{e^{\lambda_2 \xi} - e^{-\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{-\lambda_2}} \quad (5.b)$$

한편, Reynolds 방정식의 유한요소 정식화에는 Galerkin 기법이, 그리고 수치 해의 수렴에 Newton-Raphson 기법이 사용되었다. 식 (4.a-d)와 식 (5.a-b)의 고차 형상함수는 유한요소 정식화에서 압력의 보간 (interpolation)과 가중치 함수에 적용되며, 그 밖의 좌표 값 및 필름두께의 보간에는 통상의 bilinear isoparametric 형상함수가 사용된다.

### 3. 적용 해석결과

임밀 지수형 고차 형상함수를 적용한 가스-부상 FE 윤회해석 기술의 효용성 및 code 검증에 위해 다양한 예제 문제를 대상으로 해석을 수행하였다. 통상 형상함수 적용시에는 선형 부분연속 형상함수(linear piece-

wise shape function)가 사용되었다. 저속과 고속 해석에서 고려된 압축성 계수는 각각  $\Lambda = 10$ 과  $\Lambda = 1000$ 이며,  $h1/h2$ 는 베어링의 최대·최소 필름두께의 비 또는 가스 시일의 그루브와 리지(ridge) 부의 필름두께 비이다. 그리고 모든 결과 압력은 대기압으로 무차원화 되었다. 한편, 가스-부상 Galerkin FE-윤회 정식화의 전과정은 이안성 등[17]에 상세히 수록되어 있다.

Fig. 2-6의 1-D 가스 베어링의 압력분포 해석에는  $h1/h2=3$ 에서 100개의 노드가 사용되었다. Fig. 2는 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 10$ 에서 슬라이더 베어링의 압력분포로 최대압력이  $P_{max} = 1.40298$ 으로 예측되어 Reddi와 Chu[3]의 해석(analytical) 해와 잘 일치한다. Fig. 3은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 슬라이더 베어링의 압력분포로 trailing edge에서 수치적 불안정에 기인한 압력의 급격한 상승 진동이 관찰된다. Fig. 4는 고차 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 슬라이

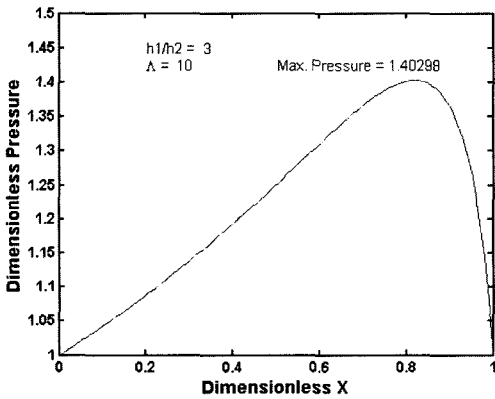


Fig. 2. 1-D slider bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 10$ .

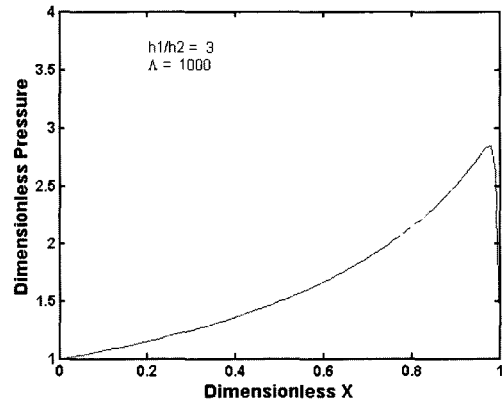


Fig. 4. 1-D slider bearing analysis result by high-order shape function at  $\Lambda = 1000$ .

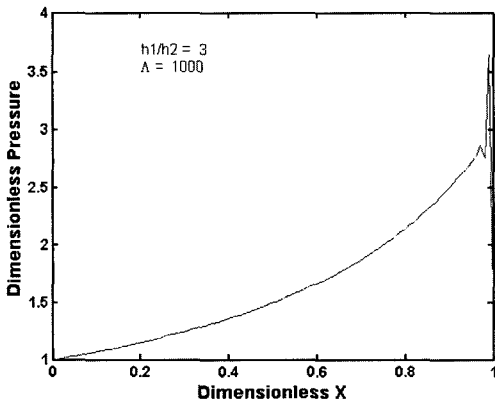


Fig. 3. 1-D slider bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 1000$ .

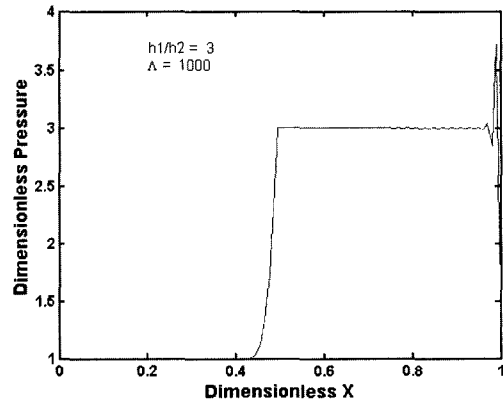


Fig. 5. 1-D step bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 1000$ .

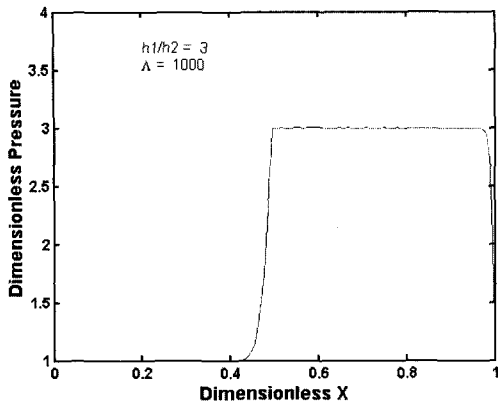


Fig. 6. 1-D step bearing analysis result by high-order shape function at  $\Lambda = 1000$ .

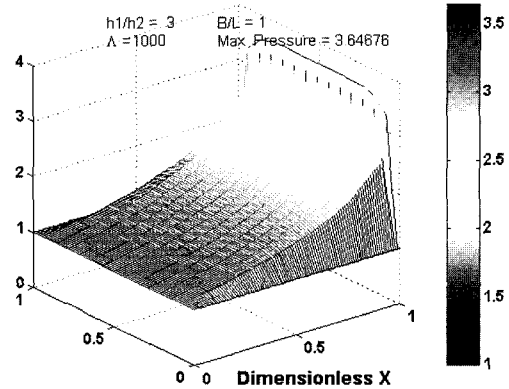


Fig. 8. 2-D slider bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 1000$ .

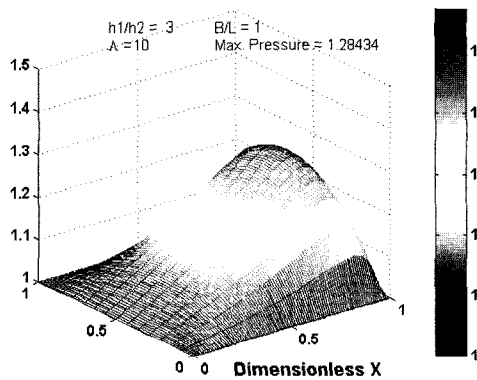


Fig. 7. 2-D slider bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 10$ .

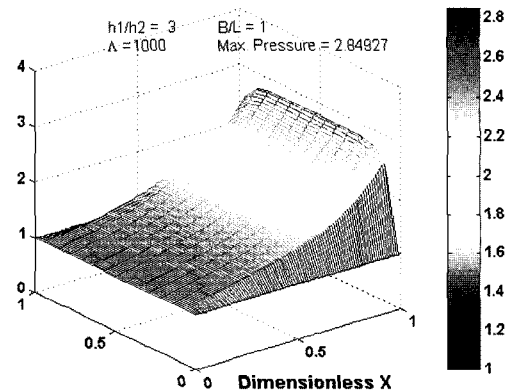


Fig. 9. 2-D slider bearing analysis result by high-order shape function at  $\Lambda = 1000$ .

이더 베어링의 압력분포로 trailing edge에서 압력의 급격한 상승 진동이 효과적으로 제어된 것이 관찰된다. 한편, Fig. 5는 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스텝 베어링의 압력분포로 Fig. 3과 마찬가지로 trailing edge에서 압력의 급격한 상승 진동이 관찰된다. Fig. 6은 고차 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스텝 베어링의 압력분포로 trailing edge에서 압력의 급격한 상승 진동이 효과적으로 제어되어 있다.

Fig. 7-12의 2-D 가스 베어링의 압력분포 해석에는  $h1/h2 = 3$ 에서  $100 \times 15$ 개의 노드가 사용되었다. Fig. 7은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 10$ 에서 슬라이더 베어링의 압력분포를 나타낸다. Fig. 8은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 슬라이더 베어링의 압력분포로 trailing edge에서 수치적 불안정에 기인한 압력의 급격한 상승이 관찰된다. Fig. 9는 고차 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 슬라이더 베어링의 압력분포로 trailing

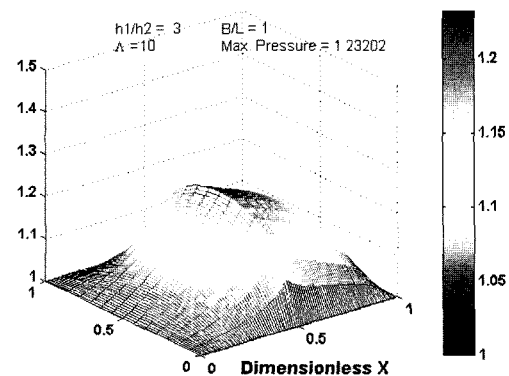


Fig. 10. 2-D step bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 10$ .

edge에서 압력의 급격한 상승이 효과적으로 제어된 것이 관찰된다. 한편, Fig. 10은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 10$ 에서 스텝 베어링의 압력분포를 나타낸다. Fig.

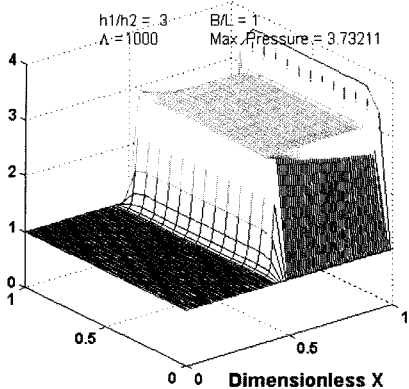


Fig. 11. 2-D step bearing analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 1000$ .

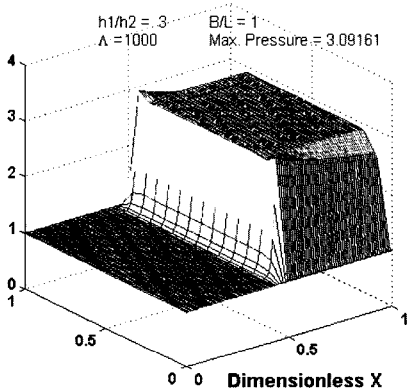


Fig. 12. 2-D step bearing analysis result by high-order shape function at  $\Lambda = 1000$ .

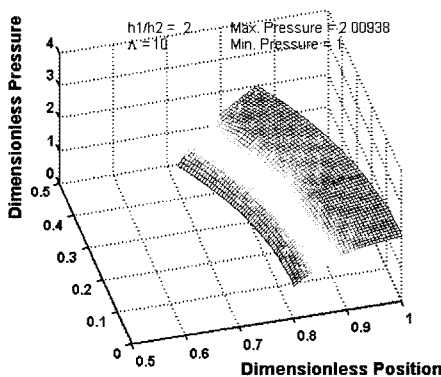


Fig. 13. 2-D step groove seal analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 10$ .

11은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스텝 베어링의 압력분포로 trailing edge에서 압력의 급격한 상승이 관찰된다. Fig. 12는 고차 형상함수를 적용한

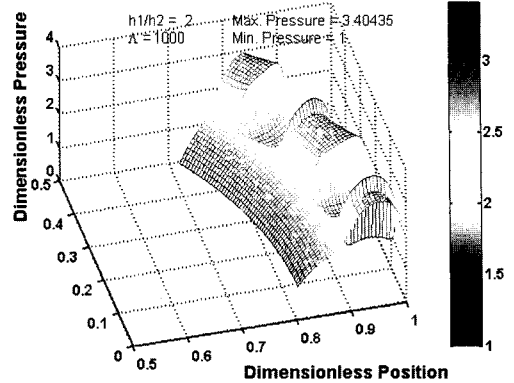


Fig. 14. 2-D step groove seal analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 1000$ .

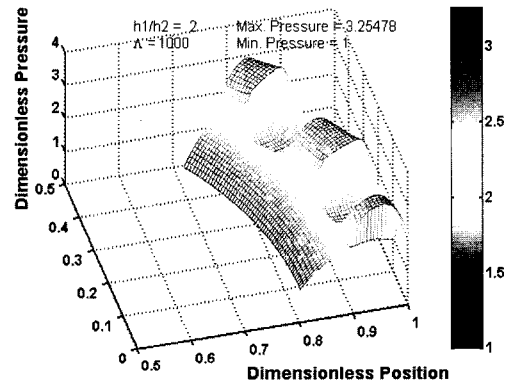


Fig. 15. 2-D step groove seal analysis result by high-order shape function at  $\Lambda = 1000$ .

$\Lambda = 1000$ 에서 슬라이더 베어링의 압력분포로 trailing edge에서 압력의 급격한 상승이 효과적으로 제어된 것이 관찰된다.

Fig. 13-15의 2-D 스텝 그루브 가스 시일의 2-section (시일의  $60^\circ$  원호 내에 2개의 스텝이 존재하는 형상을 택하였음)에 대한 압력분포 해석에는  $h1/h2 = 2$ , 외경 압력 2, 내경 압력 1에서  $61 \times 31$ 개의 노드가 사용되었다. Fig. 13은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 10$ 에서 스텝 그루브 시일의 압력분포로 리지 leading edge에서 경미한 압력 상승이 관찰된다. Fig. 14는 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스텝 그루브 시일의 압력분포로 리지의 trailing edge에서 수치적 불안정에 기인한 압력의 급격한 상승이 관찰된다. Fig. 15는 고차 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스텝 그루브 시일의 압력분포로 리지의 trailing edge에서 압력의 급격한 상승이 효과적으로 제어된 것이 관찰된다.

Fig. 16은 해석에 사용된 스파이럴 그루브 가스 시

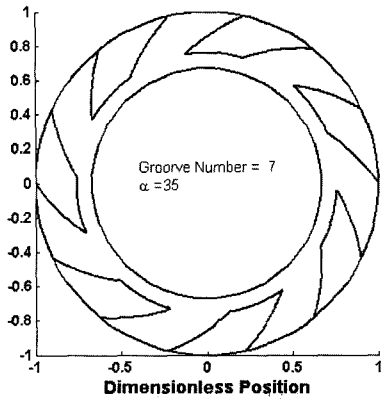


Fig. 16. A spiral groove seal geometry with 7 spirals and a spiral angle of 35°.

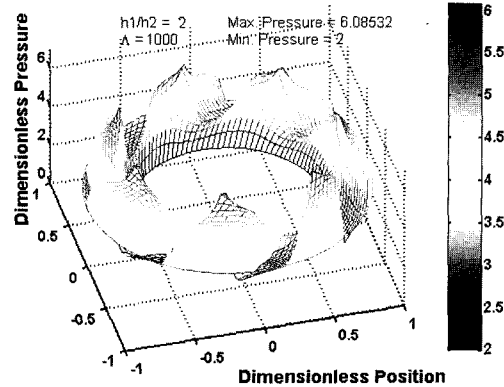


Fig. 19. 2-D spiral groove seal analysis result by high-order shape function at  $\Lambda = 1000$ .

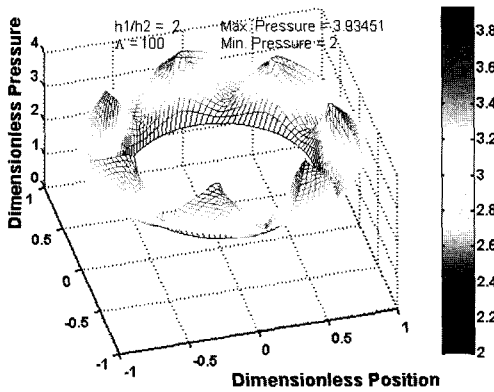


Fig. 17. 2-D spiral groove seal analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 100$ .

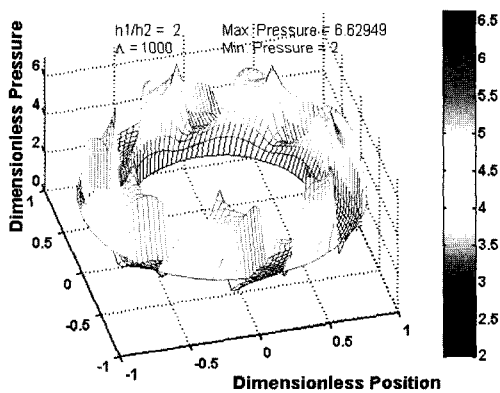


Fig. 18. 2-D spiral groove seal analysis result by conventional shape function at  $\Lambda = 1000$ .

일의 기하형상을 보여주며, 그루브 개수: 7과 스파이럴 각도: 35°를 갖는다. Fig. 17-19의 2-D 스파이럴 그루브 가스 시일의 압력분포 해석에는  $h1/h2 = 2$ , 외경 압

력 3, 내경 압력 2, 그리고 1/7 section(그루브 + 리지) 당  $17 \times 18$ 개의 노드가 사용되었다. Fig. 17은 통상 형상함수를 적용한 비교적 높은  $\Lambda = 100$ 에서의 스파이럴 그루브 시일의 압력분포로 리지의 leading edge에서 압력 상승이 잘 나타나며, trailing edge에서의 압력 계산 오류는 관찰되지 않는다. Fig. 18은 통상 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스파이럴 그루브 시일의 압력분포로 리지의 trailing edge에서 수치적 불안정에 기인한 압력의 급격한 상승이 관찰된다. Fig. 19는 고차 형상함수를 적용한  $\Lambda = 1000$ 에서 스파이럴 그루브 시일의 압력분포로 리지의 trailing edge에서 압력의 급격한 상승이 효과적으로 제어된 것이 관찰된다.

이상에서, 고속 가스-부상 요한요소 유회해석시 고차 형상함수를 이용하여 안정된 압력 해를 얻을 수 있음이 확인된다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는, 향후 고속 비행체용 터보기계의 가스-부상 트라이보-요소(tribo-element)의 유회설계에 활용을 목표로, 고속 즉 높은 압축성 계수(high compressibility number)의 운전조건에서도 Reynolds 방정식으로부터 안정된 압력 수치 해의 획득이 가능한 엄밀 지수형 고차 형상함수를 적용한 FE 가스-부상 유회해석 기법을 개발하였다. 1-D 및 2-D 슬라이더와 스텝 가스 베어링, 그리고 2-D 스텝과 스파이럴 그루브 가스 시일의 고속 유회해석에의 적용을 통해, 본 기법이 압력 수치 해의 급상승과 진동을 성공적으로 억제할 수 있음이 확인되었다.

## 후 기

본 연구는 과학기술부 민군겸용기술사업 “과제번호: M1-0209-00-0004”의 지원으로 수행되었습니다. 연구를 지원해주신 관계자 여러분께 감사사를 드립니다.

## 참고 문헌

- Booker, J. F. and Huebner, K. H., “Application of Finite Element Methods to Lubrication: An Engineering Approach,” *ASME Journal of Lubrication Technology*, pp. 313-323, 1972.
- Rohde, S. M. and Oh, K. P., “Higher Order Finite Element Methods for the Solution of Compressible Porous Bearing Problem,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 903-911, 1974.
- Reddi, M. M. and Chu, T. Y., “Finite Element Solution of the Steady State Compressible Lubrication Problem,” *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 92, pp. 495-503, 1970.
- Zirkelback, N. L. and San Andres, L., “Effect of Frequency Excitation on the Force Coefficients of Spiral Groove Gas Seals,” *ASME Trans. Journal of Tribology*, Vol. 121, pp. 853-863, 1999.
- Nguyen, S. H., “p-Version Finite Element Analysis of Gas Bearings of Finite Width,” *ASME Trans. Journal of Lubrication Technology*, Vol. 113, pp. 417-420, 1991.
- Heinrich, J. C. and Zienkiewicz, O. C., “Quadratic Finite Element Schemes for Two-Dimensional Convective Transport Problems,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 1831-1844, 1977.
- Garcia-Suarez, C., Bogy, D. B. and Talke, F. E., “Use of an Upwind Finite Element Scheme for Air Bearing Calculations,” *ASLE Special Publication SP-16: Tribology and Mechanics of Magnetic Storage Systems*, B. Bhushan, D. Bogy, N. S. Eiss, and F. E. Talke, eds., pp. 90-96, 1984.
- Bonneau, D., Huitric, J. and Tournerie, B., “Finite Element Analysis of Grooved Gas Thrust Bearings and Grooved Gas Face Seals,” *ASME Trans. Journal of Tribology*, Vol. 115, pp. 348-354, 1993.
- Faria, M. T. C., Finite Element Analysis of High-Speed Grooved Gas Bearings, Ph.D. dissertation, Texas A&M University; College Station, TX, 1999.
- Faria, M. T. C. and San Andres, L., “On the Numerical Modeling of High-Speed Hydrodynamic Gas Bearings,” *ASME Trans. Journal of Tribology*, Vol. 122, pp. 124-130, 2000.
- Faria, M. T. C., “An Efficient Finite Element Procedure for Analysis of High-Speed Spiral Groove Gas Face Seals,” *ASME Trans. Journal of Tribology*, Vol. 123, pp. 205-210, 2001.
- Gabriel, R. P., “Fundamentals of Spiral Groove Non-contacting Face Seals,” *ASLE Lubrication Engineering*, Vol. 35, No. 7, pp. 367-375, 1979.
- Sedy, J., “Improved Performance of Film-Riding Gas Seals Through Enhancement of Hydrodynamic Effects,” *ASLE Trans.*, Vol. 23, No. 1, pp. 35-44, 1980.
- Morrissey, C. P., “A New Shaft Sealing Solution for Small Cryogenic Pumps,” *STLE Tribology Trans.*, Vol. 39, No. 4, pp. 964-968, 1996.
- Shapiro, W., Walowit, J. and Jones, H. F., “Analysis of Spiral-groove Face Seals for Liquid Oxygen,” *ASLE Trans.*, Vol. 27, No. 3, pp. 177-188, 1984.
- Cai, W. X. and Shiomi, N., “Research on Performances of Spiral-Groove Gas Seal,” *The 9th of International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, Honolulu, Hawaii, Feb. 10-14, 2002.
- 이안성, 박무룡, 김영철, “저속 믹서용 드라이 가스 시일의 FE 유효해석,” *한국윤활학회 춘계 학술대회 논문집*, pp. 194-200, 2003.