

# 박벽 곡선보 구조의 최근 연구현황 및 이론

Recent Research State and Theory of Thin-walled Curved Structures



김 문 영\*



김 남 일\*\*

\*성균관대학교 건축·조경 및 토목공학부 교수

\*\*성균관대학교 건축·조경 토목공학연구소, 박사후 연구원

도시 교통의 혼잡을 개선하기 위하여 대도시에서는 고가도로의 건설이 필수적이며, 고가도로 노선 내에서는 교통흐름의 원활화를 위하여 교량 자체의 평면 형상을 도로 선형과 일치시켜야 하므로 특히 곡선교의 건설은 필수적이다. 아치교(arch bridge)나 곡선교(horizontally curved bridge)는 교량건설에 있어서 널리 적용되는 구조이며 적절히 설계가 이루어진다면 미관이 뛰어나고 매우 경제적인 교량구조가 될 수 있다. 또한 건설 지점의 입지조건 등에 의해 곡선교의 건설이 불가피한 경우가 많기 때문에 이에 대한 정확한 해석은 매우 중요하다.

그러나 임의 형상, 하중조건과 지지조건 등을 고려한 실제 구조물의 해석은 복잡하고 까다롭기 때문에 일반적으로 엄밀한 곡선교 해석에 의해 설계되지 않고 짧은 지간의 직선교 해석을 통해 외형상 곡선 형태를 갖는 교량을 설계함으로써 지상도로의 교통흐름을 방해할 뿐만 아니라 비경제적이며 불합리한 곡선교의 건설이 이루어지고 있다. 일반적으로 강 곡선교는 휨모멘트 외에 곡률의 영향으로 비틀림모멘트를 항상 받기 때문에 이를 안전하게 받아주기 위하여 주로 박스형 거더를 이용하게 되는데 박벽보의 거동을 정확히 파악할 수만 있다면 설계와 시공이 간편한 주형을 이용하여 곡선교를 설계하는 것이 보다 경제적이다.

또한 곡선교에서 주형을 이용하여 설계한다면 대부분의 단면 형태는 판형(plate girder)의 박벽구조(thin-walled structure)가 된다. 박벽보는 주어지는 외력에 대하여 최

소한의 자중을 갖는 단면 형태지만 휨과 비틀의 연계효과로 인하여 구조적인 거동특성이 매우 복잡한 양상을 보인다. 따라서 박벽보를 이용하여 구조물을 설계하기 위해서는 박벽보의 좌굴거동과 동적특성을 정확히 파악할 수 있어야 한다. 현재까지 이에 대한 많은 연구가 이루어져 왔으며, 본 고에서는 국내외적으로 이 분야에 어떠한 연구가 진행되어 왔는지 간략히 언급하고자 한다.

## 1. 박벽 곡선보구조의 좌굴이론

박벽보의 좌굴거동에 관한 연구로서 2축대칭 단면을 갖고 하중 및 지지조건이 단순한 부재의 좌굴하중 문제는 Timoshenko<sup>1)</sup> 와 Bleich<sup>2)</sup> 등에 의해 처음 이론이 정립되다가 그 후 Vlasov<sup>3)</sup>와 Chen<sup>4)</sup> 등이 좀 더 일반적인 박벽 단면의 공간보 이론을 전개하였다. Goodier<sup>5)</sup>는 순수휨을 받는 1축 대칭단면을 갖는 단순보의 좌굴하중을 유도하였고 1972년 Anderson과 Trahair<sup>6)</sup>가 1축 대칭단면을 갖는 단순보 및 외팔보의 횡좌굴에 관한 연구를 발표한 이래 많은 논문들 (Robert and Burt<sup>7)</sup>, Wang and Kitipornchai<sup>8)</sup>, Barsoum and Gallagher<sup>9)</sup>, Attard<sup>10)</sup>)이 출간되었다. 또한 Dabrowski<sup>11)</sup>, Heins<sup>12)</sup>는 박벽 곡선보의 이론 및 응용에 대한 연구성과를 발표하였다.

한편 3차원 뼈대구조의 횡좌굴해석 및 기하학적 비선형 해석에 있어서 회전각의 올바른 정의는 매우 중요한 문제

였다. Argyris<sup>13,14)</sup>는 유한요소법을 이용한 좌굴 및 기하학적 비선형해석에 대한 이제까지의 연구들이 범하고 있는 근본적인 오류를 지적하였다. 이는 유한한 회전각을 취급하거나, 기하학적인 매트릭스를 유도할 때 방향이 다른 고정된 축들에 대한 회전각들이 Non-commutativity의 성질을 나타내기 때문이다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Argyris는 처음으로 semitangential rotation을 도입하여 공간뼈대 구조의 기하학적인 비선형해석을 수행하였다. 고정된 축들에 대한 회전각과는 대조적으로 semitangential rotation은 다른 방향의 축들에 대하여 매우 중요한 성질을 가질 뿐만 아니라 semitangential moment와 역학적인 대칭성을 갖는다. 또한 Yang과 McGuire<sup>15)</sup>는 semitangential 모멘트를 도입하여 대칭단면을 갖는 직선보의 비선형 유한요소 정식화를 소개하였다. 또한 Chen과 Blandford<sup>16)</sup>는 회전변위벡터를 수정하고 기하학적 비선형에 대한 2차 항을 고려하여 직선보 요소를 개선시켰으며, Saleeb<sup>17)</sup>는 유한한 회전각의 2차항을 고려하여 직선보의 3차원 좌굴해석을 수행하였다. 더 나아가 Chang 등<sup>18)</sup>과 Kim 등<sup>19)</sup>은 단면회전각의 2차항을 일관성 있게 고려하여 비대칭 단면을 갖는 직선 박벽보의 안정성해석을 수행하였으며, Kim 등<sup>20)</sup>은 유한한 회전각의 2차항을 고려하여 비대칭 단면을 갖는 박벽 뼈대구조의 후좌굴 해석을 위한 updated Lagrangian 정식화를 제시하였다.

마찬가지로, quasitangential 모멘트 정의에 의한 회전각의 문제점은 곡선보에서도 나타나게 되어, 많은 연구자들 (Papangelis와 Trahair<sup>21,22)</sup>, Yang과 Kuo<sup>23,24)</sup>, Yang 등<sup>25)</sup>, Kuo and Yang<sup>26)</sup>, Kang과 Yoo<sup>27,28)</sup>)은 자신들의 곡선보 해석이론을 재검토하려는 노력이 시도되었으며 그 결과, 곡선보의 3차원 좌굴은 유한한 회전각의 2차항을 포함함으로써 해석적 모순이 해결될 수 있는 것으로 인식되었다. 구체적으로 Papangelis와 Trahair는 아치의 횡좌굴 하중에 대한 이론식을 제시하고 실험을 통한 검증을 하였으며, 특히 Yang과 Kuo<sup>23)</sup>는 이축대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 안정성 해석을 수행하기 위하여 다음과 같은 포텐셜 에너지식을 제시하였다.

$$\begin{aligned} \Pi_G^{Yang} = & \frac{1}{2} \int_0^L {}^oF_1 \left\{ U_y'^2 + \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} + {}^oM_p \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 \\ & + {}^oM_2 \left\{ -2U_y'\theta' - \frac{1}{R}U_y'^2 + \frac{1}{R}\left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} \\ & - 2{}^oM_3 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) + 2{}^oF_2\theta \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) - 2{}^oF_3 U_y'\theta \\ & - 2(1-\alpha){}^oM_1 \left\{ U_y' \left( U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) + \frac{\theta}{R} \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right\} \\ & + 2\alpha{}^oM_1 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \\ & + 2\alpha{}^oM_1 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ \frac{2}{R}{}^oM_\phi \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) dx_1$$

여기서  $\alpha$ 는 전단응력  $\tau_{12}$ 에 의한 비뚫비이며,  ${}^oF_1$ ,  ${}^oF_2$ ,  ${}^oF_3$ 는 초기 축력 및  $x_2$ ,  $x_3$ 축 방향의 전단력이고  ${}^oM_1$ ,  ${}^oM_2$ ,  ${}^oM_3$ 는 비뚫모멘트 및  $x_2$ ,  $x_3$ 축에 대한 휨모멘트이다. 그리고  ${}^oM_\phi$ 는 구속된 둘(warping)에 의한 바이모멘트이며,  $R$ 은 곡률반경으로 정의된다. 또한  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$ 은 각각  $x_1$ 축 및  $x_2$ ,  $x_3$ 축 방향의 변위이며,  $\theta$ 는 비뚫변위이다. 이후 이들은 곡률효과를 고려한 2개의 항을 추가한 개선된 에너지식을 제시하였다.<sup>24)</sup>

$$\overline{\Pi_G^{Yang}} = \Pi_G^{Yang} - \frac{1}{2R} \int_0^L {}^oM_2 \left\{ \theta^2 + \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} dx_1 \quad (2)$$

여기서 세 번째 및 네 번째 항은 곡선부재의 면외 및 면내좌굴거동에 중요한 역할을 하게 된다. 또한 Kang과 Yoo는 Yang과 다른 유도과정을 통하여 박벽 곡선보의 3차원 좌굴거동에 대한 이론해와 수치해를 조사 비교하였고, 이후 Saleeb와 Gendy<sup>29)</sup>, Hu 등<sup>30)</sup> 그리고 Kim 등<sup>31,32)</sup>은 곡선보에 대해 유한한 회전각의 2차항을 추가한 변위장을 서로 다른 방법을 통해 제시하고 좌굴이론을 발표하였으며, Kim 등<sup>31)</sup>은 다음과 같은 에너지식을 사용하여 비대칭 단면을 갖는 곡선보 구조의 안정성해석을 수행하였다.

$$\begin{aligned} \Pi_G^{Kim} = & \frac{1}{2} \int_0^L {}^oF_1 \left\{ U_y'^2 + \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} + {}^oM_p \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 - {}^oF_3 (U_y'\theta) \\ & + {}^oM_2 \left\{ \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right)\theta - U_y' \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \right\} + 2\frac{{}^oM_\phi}{R} \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \\ & + {}^oM_3 \left\{ \left( U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right)\theta - \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \right\} + {}^oF_2\theta \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \\ & + {}^oM_1 \left\{ \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( U_y'' - \frac{\theta}{R} \right) - U_y' \left( U_z'' - \frac{U_x'}{R} \right) \right\} dx_1 \end{aligned} \quad (3)$$

최근 Kim 등<sup>32)</sup>은 기존의 직선보 이론을 확장하여 전단변형을 고려한 곡선보의 유한한 회전각의 2차항을 고려한 변위장을 도입하여 비대칭 단면을 갖는 곡선보 구조의 안정성 해석을 수행하였으며 사용된 포텐셜에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \frac{1}{2} \int_0^L {}^oF_1 \left\{ U_y'^2 + \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 \right\} + {}^oF_2 w_1 \left( 2U_z' - \frac{2U_x}{R} + w_2 \right) \\ & + {}^oF_3 w_1 (w_3 - 2U_y') + {}^oM_1 \left( w_1' w_3 - w_2 w_3' + \frac{1}{R} w_1 w_2 \right) \\ & - 2{}^oM_\phi \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \frac{f}{R} + {}^oM_p \left( w_1' + \frac{w_3}{R} \right)^2 \\ & + {}^oM_2 \left\{ w_1' w_3 + w_1 w_3' - \frac{1}{R} (U_y'^2 + w_1^2) - 2U_y' w_1' \right. \\ & \left. - \frac{1}{R} (w_2 + U_z' - \frac{U_x}{R})^2 \right\} - {}^oM_3 \{ w_1' w_2 + w_1 w_2' \} \\ & + \frac{1}{R} w_2 w_3 + 2 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \left( w_1' + \frac{w_3}{R} \right) \} dx_1 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $w_1$  및  $w_2, w_3$ 은 각각 비틀변위 및  $x_2, x_3$ 축 방향에 대한 회전변위이고,  $f$ 는 텁을 나타내는 파라미터이다.

## 2. 박벽 곡선보구조의 진동이론

박벽 곡선보의 진동거동과 관련하여 초기에 Timoshenko<sup>1)</sup>와 Vlasov<sup>3)</sup> 등에 의하여 2축대칭 단면을 갖는 단순한 지지조건을 갖는 곡선부재에 대하여 자유진동해석을 수행한 이후 상당수의 연구자들에 의하여 곡선보 구조의 면내 및 면외 진동 그리고 3차원 연계된 진동해석이 수행되었다.

먼저 다양한 경계조건 및 전단변형, 회전관성, 변곡률 그리고 변단면을 갖는 곡선보 구조의 면내 자유진동해석이 많은 연구자들(Veletsos 등<sup>33)</sup>, Wang<sup>34)</sup>, Wang과 Gilbert<sup>35)</sup>, Issa 등<sup>36)</sup>, Lee와 Wilson<sup>37)</sup>, Gupta와 Howson<sup>38)</sup>, Oh 등<sup>39)</sup>, Raveendranath 등<sup>40)</sup>, Irie 등<sup>41)</sup>, Suzuki와 Takahashi<sup>42)</sup>, Tseng 등<sup>43)</sup>, Huang 등<sup>44)</sup>, Krishnan과 Suresh<sup>45)</sup>)에 의하여 진행되어 왔으며, 특히 Chidamparam과 Leissa<sup>46)</sup>는 외력을 받는 곡선부재의 면내자유진동거동에 대하여 식(5)와 같은 에너지식을 사용하여 축방향 신장의 영향을 분석하였다.

$$\Pi_{in}^{Chidamparam} = \frac{1}{2} \int_o^L EA \left( U_x' + \frac{U_z}{R} \right)^2 + EI_2 \left( U_z'' - \frac{U_x'}{R^2} \right)^2 - \rho w^2 A (U_x^2 + U_z^2) dx_1 \quad (5)$$

여기서  $E, A$ 는 탄성계수 및 부재의 단면적을 나타내며,  $I_2, \rho, w$ 는 각각 단면 2차모멘트, 밀도 및 부재의 고유진동수를 의미한다.

이후 Kim 등<sup>47)</sup>은 곡선보 부재의 두께-곡률효과 및 회전관성을 고려한 식(6)과 같은 에너지식을 사용하여 곡선부재의 면내자유진동해석을 위한 염밀해를 유도하였다.

$$\Pi_{in}^{Kim} = \frac{1}{2} \int_o^L EA \left( U_x' + \frac{U_z}{R} \right)^2 + E \left( I_2 - \frac{I_{222}}{R} \right) \left( U_z'' + \frac{U_z}{R^2} \right)^2 - \rho w^2 \left\{ A (U_x^2 + U_z^2) + \left( I_2 + \frac{I_{222}}{R} \right) \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right)^2 - 2 \frac{I_2}{R} U_x \left( U_z' - \frac{U_x}{R} \right) \right\} dx_1 \quad (6)$$

여기서  $I_{222}$ 는 곡선보의 두께-곡률효과를 고려하기 위한 단면상수이다.

곡선보의 경우 면내진동과 관련하여 부재질이와 곡률의 조합으로 인하여 특정모드의 고유진동수가 급격히 증가하게 되는 모드천이(mode transition)현상이 발생하게 되는데 여러 연구자들(Tarnopolskaya 등<sup>48,49)</sup>, Charpie와 Burroughs<sup>50)</sup>,

Scott와 Woodhouse<sup>51)</sup>, Krishnan과 Suresh<sup>52)</sup>, Huang 등<sup>53)</sup>, Tseng 등<sup>54)</sup>, Suzuki와 Takahashi<sup>55)</sup>, Irie 등<sup>56)</sup>)에 의하여 이러한 현상에 대하여 연구되어졌으며, 특히 Tarnopolskaya 등<sup>48,49)</sup>은 곡선보의 곡률증가에 따라 흡모드와 membrane 모드의 조합으로 인하여 축방향 신장에서 비신장으로 전이해가는 모드천이현상에 대하여 조사하였다.

한편으로 곡선보의 면외 자유진동에 관한 상당수의 연구결과들(Takahashi와 Suzuki<sup>57)</sup>, Suzuki 등<sup>58)</sup>, Wang 등<sup>59)</sup>, Snyder와 Wilson<sup>60)</sup>, Howson 등<sup>61)</sup>, Howson과 Jemah<sup>62)</sup>, Piovan 등<sup>63)</sup>, Cortinez 등<sup>64)</sup>)이 보고되고 있으며, Piovan 등<sup>63)</sup>과 Cortinez 등<sup>64)</sup>은 곡선보의 전단변형과 회전관성효과를 고려한 면외 자유진동해석에 대하여 식(7)과 같은 운동방정식을 사용했다.

$$- GA_2 (U_y'' - w_3') - \rho w^2 A U_y = 0 \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{EI_3}{R} \left( w_3' - \frac{w_1}{R} \right) - GJ \left( w_1'' + \frac{w_3'}{R} \right) \\ & - GA_r \left( w_1'' + \frac{w_3'}{R} + f' \right) - \rho w^2 I_o w_1 = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} & - EI_3 \left( w_3'' - \frac{w_1'}{R} \right) + EI_{o3} f'' + \frac{GJ}{R} \left( w_1' + \frac{w_3}{R} \right) \\ & - GA_2 (U_y' - w_3) - GA_2 (U_y'' - w_3) - \rho w^2 (I_o w_3 - I_{o3} f) = 0 \end{aligned} \quad (7c)$$

$$- EI_o f'' + GA_r \left( w_1' + \frac{w_3}{R} + f \right) - \rho w^2 I_o f = 0 \quad (7d)$$

여기서  $G$ 는 전단탄성계수,  $A_2, A_r$ 는 각각  $x_2$ 축 및 비틀에 대한 전단면적을, 그리고  $I_3$ 는  $x_3$ 축 방향의 단면 2차모멘트,  $I_o$ 는 도심에서 정의된 텁상수를 나타내며,  $I_{o3} (-I_3 e_3)$ 는  $I_3$ 와 편심거리  $e_3$ 의 곱으로 표시된다.

이후 Kim 등<sup>55)</sup>은 일축대칭단면을 갖는 양단이 단순지지된 곡선보 부재의 면외 고유진동수를 구하기 위하여 전단변형과 회전관성 그리고 곡선보 부재의 두께-곡률효과를 고려한 식(8)과 같은 운동방정식을 사용하여 염밀해를 제시하였다.

$$\begin{aligned} & - GA_2 (U_y'' - w_3) - GA_{2r} \left( w_1'' + \frac{w_3'}{R} + f' \right) \\ & - \rho w^2 \left( A U_y - \frac{I_2}{R} w_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{EI_3}{R} \left( w_3' - \frac{w_1}{R} \right) + EI_{o3} \frac{f}{R} - GJ \left( w_1'' + \frac{w_3}{R} \right) \\ & - GA_r \left( w_1'' + \frac{w_3}{R} + f' \right) \\ & - GA_{2r} (U_y'' - w_3) - \rho w^2 \left( I_o w_1 - \frac{I_2}{R} U_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} & - GA_2 (U_y' - w_3) + \frac{GA_r}{R} \left( w_1' + \frac{w_3}{R} + f \right) \\ & - EI_3 \left( w_3'' - \frac{w_1'}{R} \right) + EI_{o3} f'' + \frac{GJ}{R} \left( w_1' + \frac{w_3}{R} \right) \end{aligned}$$

$$-\rho w^2 (\tilde{I}_3 w_3 - \tilde{I}_{\phi 3} f) = 0 \\ + GA_{2r} \left\{ \frac{U_y' - w_3}{R} - \left( w_1' + \frac{w_3}{R} + f \right) \right\} \quad (8c)$$

$$+ GA_{2r} (U_y' - w_3) - \rho w^2 (\tilde{I}_o f - \tilde{I}_{\phi 3} w_3) = 0 \\ - E\tilde{I}_o f'' + E\tilde{I}_{\phi 3} \left( w_3'' - \frac{w_1'}{R} \right) + GA_r \left( w_1' + \frac{w_3}{R} + f \right) \quad (8d)$$

여기서,

$$\tilde{I}_3 = I_3 + \frac{I_{233}}{R}, \quad \tilde{I}_o = I_o + \frac{I_{\phi 22}}{R}, \quad \tilde{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} + \frac{I_{\phi 23}}{R} \\ \tilde{I}_3 = I_3 - \frac{I_{233}}{R}, \quad \tilde{I}_o = I_o - \frac{I_{\phi 22}}{R}, \quad \tilde{I}_{\phi 3} = I_{\phi 3} - \frac{I_{\phi 23}}{R} \quad (9)$$

비대칭 단면을 갖는 3차원 연계된 곡선보의 자유진동해석에 대해서는 Gendy와 Saleeb<sup>(66)</sup>는 전단변형 및 회전관성효과를 고려하여 비대칭 단면을 갖는 곡선보의 3차원 자유진동해석을 위한 유한요소모델을 개발하였으며, Kim 등<sup>(65)</sup>은 Gendy와 Saleeb의 이론에서 곡선보의 두께-곡률효과를 고려한 개선된 에너지식을 제시하였다.

### 3. 박벽 곡선보구조의 탄성이론

현재까지 곡선보구조의 탄성해석을 위하여 여러 가지 해석방법이 사용되어져 왔으며 초기의 연구에서는 Rayleigh-Ritz방법을 적용하여 곡선보구조의 처짐 및 응력을 계산하였다. 그러나 이러한 방법에서는 정확한 변위함수를 가정하는 것이 매우 중요하며, 곡선보의 복잡한 거동에 대한 엄밀한 해를 얻기 위해서는 많은 항으로 이루어진 복잡한 변위함수를 필요로 하고, 결국 특별한 경계조건에 따라 제한적으로 가정한 변위함수로부터 정식화를 수행할 수밖에 없었다. 이러한 이유로 곡선보의 탄성해석 분야에서는 적용성의 제한을 받지 않는 유한요소법이 널리 사용되어지고 있는 실정이다. 그러나 곡선부재의 두께가 얇은 경우 저차의 isoparametric 보요소의 사용은 구조의 강성이 과대평가되는 shear locking 및 membrane locking 현상으로 인하여 정확한 해를 얻을 수 없었다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 감차적분법(Prathap<sup>(67)</sup>, Stolarski와 Belytschko<sup>(68,69)</sup>, Prathap와 Bhashyam<sup>(70)</sup>)이 사용되었는데, 이 또한 zero energy mode가 발생하여 정확한 해를 구하는데 어려움을 겪어왔으며, Babu와 Prathap<sup>(71,72)</sup>은 field-consistency approach를 사용하여 감차적분법의 문제점을 극복하였지만 수렴속도의 감소라는 문제를 야기하였다. 또한 가정변형률장(Lee와 Sin<sup>(73)</sup>, Choi와 Lim<sup>(74,75)</sup>)을 적용한 곡선보요소를 사용하여 locking 현상을 제거하는 연구가 여러 연구자에 의하여 수행되었다.

최근에는 최소한의 요소를 사용하여 정확한 결과값을 얻기 위하여 곡선보의 제자 연립미분방정식을 만족하는 엄밀한 변위장을 사용하여 곡선보 요소를 개발하려는 노력이 시도되었다. 대표적인 예로써 Litewka와 Rakowski<sup>(76)</sup>는 일정한 곡률을 가지는 곡선보 요소에 대하여 휨, 전단과 축방향 변형을 고려하여 평면 2절점 6자유도를 가지는 엄밀한 탄성강성행렬을 산정하였으며, Friedman과 Kosmatka<sup>(77)</sup>는 요소의 평형방정식을 만족하는 엄밀한 형상함수를 사용하여 2절점(각 절점당 3자유도) 곡선보 요소를 개발하였다. 또한 Zhang과 Di<sup>(78)</sup>는 포텐셜에너지와 Hellinger-Reissner 원리로부터 유도된 locking 현상을 제거한 2절점 곡선보요소를 개발하였다. 이후 Kim 등<sup>(79)</sup>은 곡률효과와 둘변형을 고려한 비대칭 박벽 곡선보 요소의 탄성변형에너지로부터 엄밀한 정적 요소강성행렬을 산정하는 효과적인 방법을 제안하였다.

### 참 고 문 헌

- Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. Theory of elastic stability. 2nd Ed. McGraw-Hill, New York, 1961.
- Bleich, F. The buckling strength of metal structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- Vlasov, V. Z. Thin-walled elastic beams. 2nd Ed. Jerusalem: Isael Program for Scientific Transactions, 1961.
- Chen, W. F. and Atsuta, T. Theory of beam-columns, Volume 2. Space behavior and design, McGraw-Hill, New York, 1977.
- Goodier, J. N. The buckling of compressive bars by torsion and flexure, Bulletin 27, Cornell University Engineering Experimental Station, Dec., 1941.
- Anderson, J. M. and Trahair, N. S. "Stability of monosymmetric beams and cantilevers", *Journal of Structural Division ASCE*, Vol. 98, 1972, pp. 269~286
- Robert, T. M. Burt, C. A. "Instability of monosymmetric I-beam and cantilevers", *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 27, No. 5, 1985, pp. 313~324
- Wang, C. M. and Kitipornchai, S. "New set of buckling parameters for monosymmetric beam-

- columns/tie-beams”, *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 115, 1989, pp.1497~1513
9. Barsoum, R. S. and Gallagher, R. H. “Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems”, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 2, 1970, pp.335~352
  10. Attard, M. M. “Lateral buckling analysis of beam by the FEM”, *Computers and Structures*, Vol. 15, 1985, pp.217~231
  11. Dabrowski, R. Curved thin-walled girders. Translated from the German by Amerongen: Cement and concrete association, 1968.
  12. Heins, C. P. Bending and torsional design in structural members. D.C. Health and Company, 1975.
  13. Argyris, J. H., Dunne, P. C. and Scharpf, D. W. “On large displacement-small strain analysis of structures of rotational degrees of freedom”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 14, 1978, pp.401~451
  14. Argyris, J. H., Hilpert, O., Malejannakis, G. A. and Scharpf, D. W. “On the geometrical stiffness of a beam in space—a consistent V.W. approach”, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 20, 1979, pp.105~131
  15. Yang, Y. B. and McGuire, W. “Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis” *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 122, 1986, pp.853~877
  16. Chen, H. and Blandford, G. E. “Thin-walled space frames. I: large deformation analysis theory”, *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 117, 1991, pp.2499~2520
  17. Saleeb, A. F., Chang, T. Y. P. and Gendy, A. S. “Effective modelling of spatial buckling of beam assemblages accounting for warping constants and rotation-dependency of moments”, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 33, 1992, pp.469~502
  18. Chang, S. P. and Kim, M. Y. and Kim, S. B. “Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 122, 1996, pp.844~854
  19. Kim, M. Y., Chang, S. P. and Kim, S. B. “Spatial stability analysis of thin-walled space frames”, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 39, 1996, pp.499~525
  20. Kim, M. Y., Chang, S. P. and Park, H. G. “Spatial post-buckling analysis of nonsymmetric thin-walled frames I: theoretical considerations based on semitangential property”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 127, 2001, pp.769~778
  21. Papangelis, T. P. and Trahair, N. S. “Flexural-torsional buckling of arches”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 113, 1987, pp.889~906
  22. Papangelis, T. P. and Trahair, N. S. “Flexural-torsional buckling test on arches”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 113, 1987, pp. 1433~1443
  23. Yang, Y. B. and Kuo, S. R. “Static stability of curved thin-walled beams”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 112, 1986, pp.821~841
  24. Yang, Y. B. and Kuo, S. R. “Effect of curvature on stability of curved beams”, *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 113, 1987, pp.1185~1202
  25. Yang, Y. B., Kuo, S. R. and Cherng, Y. D. “Curved beam element for nonlinear analysis”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 115, 1989, pp. 840~855
  26. Kuo, S. R. and Yang, Y. B. “New theory on buckling of curved beams”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 117, 1991, pp.1698~1717
  27. Kang, Y. J. and Yoo, C. H. “Thin-walled curved beams. II: Formulation of nonlinear equations”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 120, 1994, pp.2072~2101
  28. Kang, Y. J. and Yoo, C. H. “Thin-walled curved beams. II: Analytical solution for buckling of arches”, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 120, 1994, pp.2102~2125
  29. Saleeb, A. F. and Gendy, A. S. “Shear-flexible models for spatial buckling of thin-walled curved beams”, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 31, 1991, pp.729~757
  30. Hu, N., Hu, B., Fukunaga, H. and Sekine, H. “Two kinds of C°-type elements for buckling analysis of thin-walled curved beams”, *Computer methods in*

- applied mechanics and engineering*, Vol. 171, 1999, pp.87~108
31. Kim, M. Y., Min, B. C. and Suh, M. W. "Spatial stability of non-symmetric thin-walled curved beams I : analytical approach", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 126, 2000, pp.497~505
32. Kim, M. Y., Kim, N. I. and Min, B. C. "An analytical formulation for stability analysis of non-symmetric shear-deformable curved beams", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 7, 2003, pp.437~448
33. Veletsos, A. S., Austin, W. J., Lopes, C. A. and Wung, Shyr-jen "Free in-plane vibration of circular arches", *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 98, 1972, pp.311~329
34. Wang, T. M. "Lowest natural frequency of clamped parabolic arcs", *Journal of Structural Division*, Vol. 98, 1972, pp.407~411
35. Wang, T. M. and Guilbert, M. P. "Effects of rotary inertia and shear on natural frequencies of continuous circular curved beams", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, 1981, pp.281~289
36. Issa, M. S., Wang, T. M. and Hsiao, B. T. "Extensional vibrations of continuous circular curved beams with rotary inertia and shear deformation, I: free vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 114, 1987, pp.297~308.
37. Lee, B. K. and Wilson, J. F. "Free vibrations of arches with variable curvature", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, 1989, pp.75~89
38. Gupta, A. K. and Howson, W. P. "Exact natural frequencies of plane structures composed of slender elastic curved members", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, 1994, pp.145~157
39. Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W. "Natural frequencies of non-circular arches with rotatory inertia and shear deformation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, 1999, pp.23~33
40. Raveendranath, P., Singh, G. and Pradhan, B. "Free vibration of arches using a curved beam element based on a coupled polynomial displacement field", *Computers and Structures*, Vol. 78, 2000, pp.583~590
41. Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I. "In-plane vibration of a free-clamped slender arc of varying cross-section", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 23, 1980, pp.567~573
42. Suzuki, K. and Takahashi, S. "In-plane vibration of curved bars with varying cross-section", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, 1982, pp.1100~1107
43. Tseng, Y. P., Huang, C. S. and Lin, C. J. "Dynamic stiffness analysis for in-plane vibrations of arches with variable curvature", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207, 1997, pp.15~31
44. Huang, C. S., Tseng, Y. P., Leissa, A. W. and Nieh, K. Y. "An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross section", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, 1998, pp.1159~1173
45. Krishnan, A. and Suresh, Y. J. "A simple cubic linear element for static and free vibration analysis of curved beams", *Computers and Structures*, Vol. 68, 1998, pp.473~489
46. Chidamparam, P. and Leissa, A. W. "Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 183, 1995, pp.779~795
47. Kim, M. Y., Kim, N. I. and Min, B. C. "Analytical and numerical study on spatial free vibration of nonsymmetric thin-walled curved beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, 2002, pp.595~618
48. Tarnopolskaya, T., De Hoog, F. R. and Fletcher, N. H. "Low-frequency mode transition in the free in-plane vibration of curved beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, 1999, pp.69~90
49. Tarnopolskaya, T., De Hoog, F. R., Fletcher, N. H. and Thwaites, S. "Asymptotic analysis of the free in-plane vibrations of beam with arbitrarily varying curvature and cross-section", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 196, 1996, pp.659~680
50. Charpie, J. P. and Burroughs, C. B. "An analytic model for the free in-plane vibration of beams of variable curvature and depth", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 94, 1993, pp.866~879

51. Scott, J. F. M. and Woodhouse, J. "Vibration of an elastic strip with varying curvature", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Physical Sciences and Engineering*, Vol. 339, 1992, pp.587~625
52. Krishnan, A. and Suresh, Y. J. "A simple cubic linear element for static and free vibration analysis of curved beams", *Computers and Structures*, Vol. 68, 1998, pp.473~489
53. Huang, C. S., Tseng, Y. P., Leissa, A. W. and Nieh, K. Y. "An exact solution for in-plane vibrations of an arch having variable curvature and cross section", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 40, 1998, pp.1159~1173
54. Tseng, Y. P., Huang, C. S. and Lin, C. J. "Dynamic stiffness analysis for in-plane vibrations of arches with variable curvature", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 207, 1997, pp.15~31
55. Suzuki, K. and Takahashi, S. "In-plane vibration of curved bars with varying cross-section", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 25, 1982, pp.1100~1107
56. Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I. "In-plane vibration of a free-clamped slender arc of varying cross-section", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 23, 1980, pp.567~573
57. Takahashi, S. and Suzuki, K. "Vibrations of elliptic arc bar perpendicular to its plane", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 20, 1977, pp.1409~1416.
58. Suzuki, K., Aida, H. and Takahashi, S. "Vibrations of curved bars perpendicular to their planes", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol. 21, 1978, pp.162~173
59. Wang, T. M., Nettleton, R. H. and Keita, B. "Natural frequencies for out-of-plane vibrations of continuous curved beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 68, 1980, pp.427~436
60. Snyder, J. M. and Wilson, J. F. "Free vibrations of continuous horizontally curved beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 157, 1992, pp.345~355
61. Howson, W. P., Jemah, A. K. and Zhou, J. Q. "Exact natural frequencies for out-of-plane motion of plane structures composed of curved beam members", *Computers and Structures*, Vol. 55, 1995, pp.989~995
62. Howson, W. P. and Jemah, A. K. "Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, 1999, pp.19~25
63. Piovan, M. T., Cortinez, V. H. and Rossi, R. E. "Out-of-plane vibrations of shear deformable continuous horizontally curved thin-walled beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, 2000, pp.101~118
64. Cortinez, V. H., Piovan, M. T. and Rossi, R. E. "Out of plane vibrations of thin walled curved beams considering shear flexibility", *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 8, 1999, pp.257~272
65. Kim, N. I. and Kim, M. Y. "Spatial free vibration of shear deformable circular curved beams with non-symmetric thin-walled sections", *Journal of Sound and Vibration*, 2004, (in print).
66. Gendy, A. S. and Saleeb, A. F. "Vibration analysis of coupled extensional/flexural /torsional modes of curved beams with arbitrary thin-walled sections", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 174, 1994, pp.261~274
67. Prathap, G. "The curved beam/deep arch/finite ring element revisited", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 1985, pp.389~407
68. Stolarski, H. and Belytschko, T. "Shear and membrane locking in curved 'C elements", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 41, 1983, pp.279~296
69. Stolarski, H. and Belytschko, T. "Membrane locking and reduced integration for curved beam", *Journal of applied mechanics*, Vol. 49, 1982, pp.172~178
70. Prathap, G. and Bhashyam, G. "Reduced integration and the shear-flexible beam element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1982, pp.195~210
71. Ramesh Babu, C. and Prathap, G. "A linear thick curved beam element", *International Journal for*

- Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp.1313~1328
72. Prathap, G. and Ramesh Babu, C. "An isoparametric quadratic thick curved beam element", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, 1986, pp.1583~1600
73. Lee, P. G. and Sin, H. C. "Locking-free curved beam element based on curvature", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, 1994, pp.989~1007
74. Choi, J. K. and Lim, J. K. "General curved beam elements based on the assumed strain fields", *Computers and Structures*, Vol. 55, 1995, pp.379~386
75. Choi, J. K. and Lim, J. K. "Simple curved shear beam elements", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, 1993, pp.659~669
76. Litewka, P. and Rakowski, J. "The exact thick arch finite element", *Computers and Structures*, Vol. 68, 1998, pp.369~379
77. Friedman, Z. and Kosmatka, J. B. "An accurate two-node finite element for shear deformable curved beams", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 41, 1998, pp.473~498
78. Zhang, C. and Di, S. "New accurate two-noded shear-flexible curved beam elements", *Computational Mechanics*, Vol. 30, 2003, pp.81~87
79. Kim, N. I., Yun, H. T. and Kim, M. Y. "Exact static element stiffness matrices of non-symmetric thin-walled curved beams", *International Journal for Numerical Method in EngineeringZ*, 2004 (in print). 