

응력과 전파 수치모의를 위한 일차원 유한요소모형의 분산 특성 및 제어

Numerical Dispersion and Its Control for 1-D Finite Element Simulation of Stress Wave Propagation

윤성범† 이종세* 유한규**
Yoon, Sung-Bum Lee, Jong-Seh Yoo, Han-Kyu
(논문접수일 : 2003년 10월 27일 ; 심사종료일 : 2004년 3월 2일)

요 지

본 논문에서는 응력과 전파를 수치모의할 때 발생하는 수치적인 분산효과를 제거하기 위해 파동방정식에 기초한 일차원 유한요소모형을 이용하여 수치분산오차의 특성을 분석하고 분산오차를 제어할 수 있는 방법을 제안하였다. 질량행렬을 그대로 사용하는 경우와 집중질량행렬을 사용하는 경우에 대한 수치분산오차를 분석하였다. 개발된 분산제어기법은 공간미분항의 시간단계가중치 및 질량집중도를 조정하는 음해법과 인위적인 분산항을 추가하는 양해법의 두가지 방법이다. 제안된 분산보정기법을 이용하여 계산한 수치해와 파동방정식의 해석해를 비교한 결과 본 연구에서 제안한 분산보정기법의 타당성을 확인하였다.

핵심용어 : 파동방정식, 유한요소모형, 분산오차, 분산보정기법

Abstract

With an aim at eliminating the numerical dispersion error arising from the numerical simulation of stress wave propagation, numerical dispersion characteristics of the wave equation based one-dimensional finite element model are analyzed and some dispersion control scheme are proposed in this paper. The dispersion analyses are carried out for two types of mass matrix, namely the consistent and the lumped mass matrices. Based on the finding of the analyses, dispersion correction techniques are developed for both the implicit and explicit schemes. For the implicit scheme, either the weighting factor for the spatial derivatives of each time level or the lumping coefficient for mass matrix is adjusted to minimize the numerical dispersion. In the case of the explicit scheme an artificial dispersion term is introduced in the governing equation. The validity of the dispersion correction techniques proposed in this study is demonstrated by comparing the numerical solutions obtained using the present techniques with the analytical ones.

Keywords : wave equation, finite element model, dispersion error, dispersion correction techniques.

1. 서 론

자유표면을 포함하는 균질한 고체 중을 전파하는 응력파는 매질의 팽창수축을 통해 전달되는 P파, 매질의 전단저항을 통해 전달되는 S파, 자유표면을 따라 전달되는 Rayleigh파의 3가지 형태로 전달되며, 공기 중을 전파하는 음

파는 공기의 팽창과 수축으로 에너지가 전달되는 탄성파의 형태로 전파된다. 응력파의 거동을 나타내기 위한 지배방정식은 일반적으로 3차원이며 그 풀이과정이 매우 복잡하나 단순한 경우 3가지 파를 따로 분리하면 모두 파동방정식으로 표현할 수 있다.¹⁾ 파동방정식의 수치해석 기법은 유한차분법, 유한요소법 및 경계요소법 등이 있으나, 가장

† 책임저자, 정회원·한양대학교 공학대학 토목·환경공학과 교수
전화: 031-400-5144; Fax: 031-408-5140
E-mail: sbyoon@hanyang.ac.kr

* 정회원·한양대학교 공학대학 토목·환경공학과 교수

** 한양대학교 공학대학 토목·환경공학과 부교수

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 6월 30일까지 본 학회에 보내주
시면 2004년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

일반적으로 사용되는 기법은 유한요소법이다. 유한요소모형을 사용하여 파동방정식을 수치해석하는 경우 수치분산 오차가 필연적으로 발생하여 파 선단부의 진폭이 현저하게 감소하고, 또한 파 선단 또는 후미에 짧은 파들이 앞서거나 뒤따르게 되므로 실제와 매우 다른 형상으로 전달된다.^{2)~4)} 이 수치오차는 요소의 크기가 증가할수록 커지는 경향이 있으며, 이를 제거하기 위해서는 매우 작은 격자를 사용하여야 한다. 그러나 발파나 말뚝항타로 인한 지반진동 영향을 해석하는 경우와 같이 광범위한 영역에 대해 파의 전파를 해석하는 경우, 수치분산오차를 제거하기 위해 한 파장당 20개 이상의 매우 작은 유한요소로 분할하게 되면, 요소의 개수가 기하급수적으로 증가하여 고속의 대용량 컴퓨터의 사용이 필수적이므로 실용적이지 못하게 된다. 그러므로 비교적 큰 격자를 사용하면서도 수치분산오차를 줄일 수 있는 분산제어기법의 필요성이 절실했다.

한편 고체 매질에서의 응력과 전파의 직접적인 수치해석에 관한 국내 연구동향을 살펴보면 김경수 등⁵⁾은 bicharacteristic 방법을 이용하여 충격하중에 의한 응력과 전파를 수치계산하고, 이 결과로부터 구조부재의 균열선단에 발생하는 동적응력강도를 계산하였으며, 김희석, 이종세⁶⁾는 무한대 영역에서의 응력과 전파과정을 유한요소모형을 이용하여 효과적으로 수치해석하기 위해 흡수경계기법에 대한 연구를 수행한 바 있다. 그러나 응력과 전파 수치해석시 발생하는 수치적 오차에 대한 연구는 아직 미진한 실정이다.

본 연구에서는 분산제어기법의 개발을 위한 기초연구로 우선 일차원 파동방정식에 대해 유한요소모형에 내재된 수치분산오차의 특성을 분석하고 이를 제거하는 방법을 찾아보고자 하였다. 이를 위해 1차원 파동방정식으로부터 선형 보간함수를 이용한 1차원 유한요소식을 유도하였다. 유도된 유한요소식에 대해 Taylor 급수전개를 통해 변형방정식(modified equation)을 유도하고, 이 식에 대하여 수치기법에 따른 수치분산오차의 특성을 파악하였다. 마지막으로 이러한 수치분산오차를 제거하기 위한 방법들을 제안하고, 이를 실제 계산을 통해 그 타당성을 확인하였다.

2. 유한요소 정식화

본 연구에서는 다음과 같은 1차원 선형 파동방정식을 대상으로 하였다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 ζ 는 변위 (m), C_o 는 전파속도 (m/s)를 의미한다.

식(1)을 Galerkin 가중잔차법^{7),8)}을 이용하여 유한요소식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \phi^* dx - C_o^2 \int_a^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \phi^* dx = 0 \quad (2)$$

여기서 $\phi^* [(1-x/\Delta x)\zeta_a^* + (x/\Delta x)\zeta_b^*]$ 는 가중함수(weighting function)로 본 연구에서는 선형함수를 사용하며, 보간함수(interpolation function) $\phi_a(x)$ 는 가중함수와 같은 형태를 사용한다. 또한 하첨자 a, b 는 요소 내 양 끝점을 의미하며, 요소의 크기 $\Delta x = a - b$ 이다. 식(2)의 공간미분항을 부분적분의 원리를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\int_a^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \phi^* dx + C_o^2 \int_a^b \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} dx + C_o^2 \left(\phi_a^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_a - \phi_b^* \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_b \right) = 0 \quad (3)$$

변위 $\zeta(x, t)$ 를 보간함수 $\phi_a(x)$ 와 절점에서의 변위 값 $\zeta_a(t)$ 를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\zeta = \phi_a \zeta_a \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4)$$

여기서 첨자 α (또는 β)는 요소 내 절점번호를 표시하며, 첨자의 반복은 첨자가 반복된 항들의 총합을 의미한다. 이를 식(3)에 대입하여 적분을 수행하면 한 요소내에서 다음과 같은 식을 얻는다.

$$M_{\alpha\beta}^c \frac{\partial^2 \zeta_\beta}{\partial t^2} + C_o^2 K_{\alpha\beta} \zeta_\beta = 0 \quad (5)$$

여기서는 영역 내부에 위치하는 내부요소에 대한 식만을 다룰 예정이므로, 경계에서의 기울기 항은 무시되었다. 또한 $M_{\alpha\beta}^c$ 는 질량행렬, $C_o^2 K_{\alpha\beta}$ 는 강성행렬로 다음과 같다.

$$M_{\alpha\beta}^c = \frac{\Delta x}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이 질량행렬 $M_{\alpha\beta}^c$ 는 유한요소 정식화 절차를 거쳐 얻어진 원래의 질량행렬이므로 원질량행렬(consistent mass matrix)이라 한다. 한편 요소길이 전체에 걸쳐 분포되어

있는 질량을 요소의 양끝 절점(node)에 집중된 질량으로 나타내면, 질량행렬은 다음과 같은 주 대각 행렬로 나타나는데 이를 집중질량행렬(lumped mass matrix)이라고 하고 $M_{\alpha\beta}^l$ 로 표시한다.

$$M_{\alpha\beta}^l = \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

이 집중질량행렬을 이용한 유한요소식은 다음과 같다.

$$M_{\alpha\beta}^l \frac{\partial^2 \xi_\beta}{\partial t^2} + C_o^2 K_{\alpha\beta} \xi_\beta = 0 \quad (9)$$

식(5)를 조합하면 영역 내부의 임의 절점 i 에 대한 계산식을 얻을 수 있으며, 이 식의 시간미분항에 대해 중앙차분을 적용하고, 공간미분항의 시간단계를 3단계로 나누어 각 시간단계에 가중치(weighting factor)를 도입^{(9),(10)}하여 정리하면 식(10)과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{\xi_{i+1}^{n+1} - 2\xi_{i+1}^n + \xi_{i+1}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\xi_i^{n+1} - 2\xi_i^n + \xi_i^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{\xi_{i-1}^{n+1} - 2\xi_{i-1}^n + \xi_{i-1}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) - \frac{\alpha_1 C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^{n+1} - 2\xi_i^{n+1} \\ & + \xi_{i-1}^{n+1}) - \frac{\alpha_2 C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n) - \frac{\alpha_3 C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^{n-1} \\ & - 2\xi_i^{n-1} + \xi_{i-1}^{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 Δx 는 요소의 크기를 나타내며, 모든 요소의 크기가 동일하다고 가정하였다. 하첨자 i 는 절점번호, 상첨자 n 은 시간단계번호, Δt 는 계산시간간격, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 는 공간미분항의 각 시간단계별 가중치이다. 또한 집중질량행렬을 이용한 유한요소식 (9)를 조합하면 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_{i+1}^{n+1} - 2\xi_{i+1}^n + \xi_{i+1}^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\alpha_1 C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^{n+1} - 2\xi_i^{n+1} + \xi_{i-1}^{n+1}) \\ & - \frac{\alpha_2 C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n) - \frac{\alpha_3 C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^{n-1} - 2\xi_i^{n-1} \\ & + \xi_{i-1}^{n-1}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

식(10)과 식(11)을 비교해 보면 집중질량행렬을 이용한 식(11)의 경우가 유한차분기법과 일치하는 것을 볼 수 있다. 또한 식(11)에서 $\alpha_1 = \alpha_3 = 0, \alpha_2 = 1$ 이면 순수양해법이 되어 행렬을 풀 필요가 없으므로 계산시간이 크게 단축되어 매우 경제적이다. 반면 원질량행렬을 이용하면 식(10)에 보인 바와 같이 $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ 인 경우에도 매 시간

간격마다 행렬을 풀어야 하므로 음해법에 속한다.

3. 수치기법에 따른 분산특성

3.1 변형방정식

1차원 선형 파동방정식의 유한요소식인 식(10)과 식(11)은 수치오차로 인하여 지배방정식 (1)에 대한 정확해를 주지 못하고 변형방정식(modified equation)에 대한 정확해를 주게 된다. 그러므로 변형방정식을 구해보면 수치해가 가지는 오차의 특성을 쉽게 파악할 수 있다.⁽¹¹⁾

원질량행렬 $M_{\alpha\beta}^c$ 를 사용한 경우의 변형방정식은 식(10)을 i 번째 절점과 n 번째 시간단계의 변수와 미분치들을 이용하여 Taylor 전개한 다음 고차의 시간에 대한 미분오차항을 위치에 대한 미분항으로 대치하여 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - C_o^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - C_o^2 \Delta t (\alpha_1 - \alpha_3) \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} \\ & - \frac{C_o^2}{12} \Delta x^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) [-1 + 6Cr^2 (\alpha_1 + \alpha_3) \\ & - Cr^2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \\ & \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 $Cr (= C_o \Delta t / \Delta x)$ 은 Courant number이다. 3번째 항과 같이 시간 또는 장소에 대한 홀수 차수의 미분항은 수치적인 진폭오차(amplitude error)를 주며, 4번째 항과 같이 짝수 차수의 미분항은 수치적인 전파속도오차 즉 분산오차(dispersion error)를 준다. 지배방정식 (1)과 변형방정식 (12)의 비교를 통해 수치오차를 최소화하기 위한 시간단계에 대한 가중치를 정할 수 있다. 우선 식(12)의 2번째 항은 지배방정식의 공간미분항과 동일해야 하므로 다음과 같이 정한다.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \quad (13)$$

또한 식(12)의 3번째 항과 같은 수치적인 진폭오차는 지배방정식에 없는 항이며 안정성을 해치므로 다음과 같이 가중치를 정하여 이 항을 제거한다.

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_0, \quad \alpha_2 = 1 - 2\alpha_0 \quad (14)$$

이를 통해 수치진폭오차는 제거되나 수치적인 분산오차항은 그대로 남게 되어 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{C_o^2}{12} \Delta x^2 [-1 + Cr^2 (12\alpha_0 - 1)] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \quad (15)$$

집중질량행렬 $M_{\alpha\beta}^I$ 를 사용한 경우에 대해서도 원질량행렬을 사용한 경우와 동일한 과정을 통하여 식(16)과 같은 변형방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_o^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{C_o^2}{12} \Delta x^2 [1 + Cr^2 (12\alpha_0 - 1)] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \quad (16)$$

3.2 수치기법에 따른 분산특성

1차원 파동방정식의 수치기법에 따른 분산특성을 검토하기 위하여 미지수를 다음과 같은 시간과 공간에 대하여 주기성을 가지는 일방향 진행파로 표현한다.

$$\zeta(x, t) = A_o e^{i(kx - \omega t)} \quad (17)$$

여기서 A_o 는 진폭, k 는 파수(wave number), ω 는 각진동수(angular frequency)이다. 원질량행렬을 사용한 경우와 집중질량행렬을 사용한 경우에 따른 수치적인 분산특성을 검토하기 위하여 식(15)와 식(16)에 식(17)을 각각 대입하여 정리하면 다음과 같은 분산관계식을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{C_n^c}{C_o}\right)^2 = 1 - \frac{(k\Delta x)^2}{12} \{-1 + Cr^2 (12\alpha_0 - 1)\} + O((k\Delta x)^4) \quad (18)$$

$$\left(\frac{C_n^I}{C_o}\right)^2 = 1 - \frac{(k\Delta x)^2}{12} \{1 + Cr^2 (12\alpha_0 - 1)\} + O((k\Delta x)^4) \quad (19)$$

여기서 C_n^c 와 C_n^I 는 각각 원질량행렬과 집중질량행렬을 이용한 경우의 수치적인 전파속도를, C_o 는 물리적인 전파속도를 의미한다. 식(18)은 원질량행렬을 사용한 경우의 분산관계식으로 $k\Delta x$ 가 클수록(즉 파장이 짧을수록) $\{ \}$ 안의 값이 음(-)이 되어 식의 우변이 1보다 커지게 되므로 수치적인 전파속도 C_n^c 가 물리적인 전파속도 C_o 보다 커지는 역분산(negative dispersion)이 발생하게 되고, 집중질량행렬을 사용한 경우에는 식(19)에 제시한 바와 같이 $k\Delta x$ 가 클수록 $\{ \}$ 안의 값이 양(+)이 되어 우변이 1보다 작

아지게 되므로 수치적인 전파속도 C_n^I 이 물리적인 전파속도보다 작아지는 일반적인 분산(positive dispersion)이 발생한다. 또한 α_0 는 그 값이 증가함에 따라 단파(short waves)가 더욱 천천히 전파되는 일반적인 분산효과를 증진시켜준다.

이러한 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 확인하기 위하여 초기 변위가 Gauss 분포를 갖는 1방향 진행파를 대상으로 식(10)과 식(11)을 이용하여 두 가지 서로 다른 질량행렬 $M_{\alpha\beta}^c$ 와 $M_{\alpha\beta}^I$ 에 대한 수치해를 구하였다. 초기 수면변위로 주어진 Gauss 분포는 다음과 같다.

$$\zeta(x, 0) = 2\zeta_0 e^{-(x/a)^2} \quad (20)$$

여기서 Gauss 분포의 상대적인 폭을 나타내는 a 는 0.75 m 로 주었다. 계산에 사용된 전파속도 ($C_o = 9.9$ m/s)와 요소크기 ($\Delta x = 0.15$ m), 시간간격 ($\Delta t = 0.006$ s)은 고정하고, 서로 다른 α_0 값에 대해 초기로부터 5.4 s 후의 변위형을 구해 그림 1에 나타내었다. 여기서 정확한 해는 지배방정식이 분산을 포함하지 않는 파동방정식이므로 주어진 파가 양방향으로 2개의 파로 분리된 다음 각각 진행하여 초기조건이 높지만 1/2이 되고 전체적인 Gauss 형상은 그대로 유지된 채로 전파속도로 이동되어 다음과 같다.

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{-((x - C_o t)/a)^2} \quad (21)$$

여기서 ζ_0 는 초기파형 중심부 최대 변위의 1/2이다. 그림 1은 원질량행렬을 사용하고 공간미분항에 대한 가중치 α_0 를 0.0, 0.2, 0.4인 경우로 구분하여 수치모의를 수행한 결과이다. 이 경우 단파가 장파보다 빨리 전파하는 역분산(negative dispersion)이 발생하고 있다. 또한 α_0 가 증가함에 따라 분산오차가 감소하는 경향을 나타낸다. 그림 2는 집중질량행렬을 사용하면서, 공간미분항에 대하여 서로 다른 가중치 α_0 를 적용하여 수치모의한 결과를 제시한 것이다. 집중질량행렬을 사용한 경우에는 단파가 장파보다 천천히 진행하는 일반적인 분산오차의 특성을 나타낸다. 또한 가중치 α_0 가 증가함에 따라 분산효과가 증가하게 된다. 다시 말해 단파가 천천히 진행하게 되는 수치적인 분산오차가 더 크게 발생하게 된다. 그러므로 가중치 α_0 는 0보다 큰 경우 분산을 증가시키는 경향을 가지고 있으며, 반대로 0보다 작은 경우 수치분산오차는 음의 방향 즉 역분산이 발생한다. 이를 적절히 이용하면 수치적인 분산효과를 제거할 수 있을 것이다.

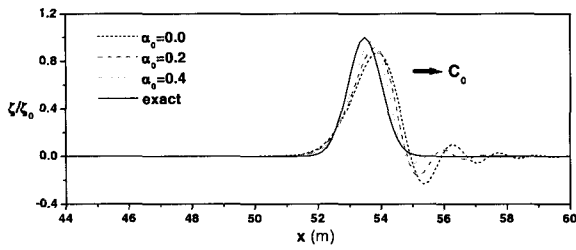


그림 1 원질량행렬 $M_{\alpha\beta}^c$ 를 사용한 경우 $t = 5.4s$ 의 α_0 값의 변화에 따른 변위형상

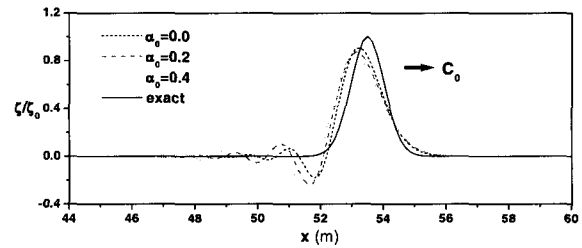


그림 2 집중질량행렬 $M_{\alpha\beta}^l$ 을 사용한 경우 $t = 5.4s$ 의 α_0 값의 변화에 따른 변위형상

4. 음해법(Implicit Scheme)에 의한 분산보정

4.1 분산보정을 위한 가중치 α_0 조정기법

과동방정식은 물리적인 분산항을 포함하고 있지 않으므로 수치적인 분산오차를 주는 식(15) 또는 식(16)의 3번째 항을 제거하여야 한다. 이를 위해 공간미분항의 시간단계에 대한 가중치 α_0 를 원질량행렬을 사용한 경우에는 식(22)와 같이, 집중질량행렬을 사용한 경우에는 식(23)과 같이 정하여 사용하면 수치분산오차를 크게 줄일 수 있다.

$$\alpha_0 = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{Cr^2} \right) \quad (22)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{Cr^2} \right) \quad (23)$$

식(22) 및 식(23)으로 주어지는 가중치 조정을 통한 수치분산 오차 제거 효과를 확인하기 위해 그림 1과 2에 보인 경우에 대해 검토하였다. 또한 수치계산에 이용된 각종 상수 및 변수값은 그림 1과 2의 경우와 같다.

주어진 전파속도, 요소크기 그리고 시간간격에 대해 식(22) 또는 식(23)으로부터 수치분산을 제거하기 위한 가중치 α_0 를 구한 결과, 원질량행렬 사용시 0.6143이었으며, 집중질량행렬 사용시 -0.4476이었다. 그림 1의 경우에는 원질량행렬을 사용하여 짧은 파가 빨리 진행되는 수

치적인 역분산이 발생하므로 분산효과를 증가시켜 주기 위해 가중치 α_0 가 양의 값을, 반대로 그림 2의 경우에는 짧은 파가 천천히 진행되는 양(+)의 분산이 발생하므로 가중치 α_0 가 음(-)의 값을 가진다. 이들 α_0 값들을 식(10)과 식(11)에 각각 대입하여 수치해를 구하고, 그 결과를 과동방정식의 해석해(21)과 비교하였다. 그 결과 그림 3과 4에 보인 바와 같이 두가지 방법 모두 수치해의 수치분산이 거의 제거되어 해석해와 잘 일치하고 있다. 이들 결과로부터 가중치 α_0 를 조정하여 수치적인 분산오차를 제거할 수 있음을 알 수 있다.

4.2 분산보정을 위한 질량집중도 조정방법

그림 1과 2를 살펴보면 질량행렬의 질량집중도에 의해 수치적인 분산 효과가 음의 분산에서 양의 분산으로 변하므로 질량집중 정도 즉 질량집중도 δ 를 조정하면 음의 분산과 양의 분산이 상쇄되어 수치적인 분산오차를 제거할 수 있을 것으로 예상된다. 본 연구에서는 계산량을 최소화하기 위해 가중치 α_0 를 0으로 한 경우에 대해 살펴 본다. 질량집중도를 δ 라 할 때 유한요소식은 다음과 같다.

$$[(1 - \delta) M_{\alpha\beta}^c + \delta M_{\alpha\beta}^l] \frac{\partial^2 \zeta_\beta}{\partial t^2} + C_o^2 K_{\alpha\beta} \zeta_\beta = 0 \quad (24)$$

여기서 δ 는 0과 1사이의 값을 가진다. δ 가 0일 때는

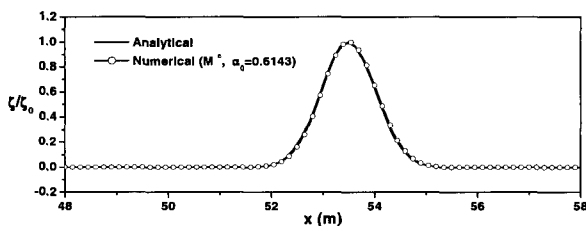


그림 3 원질량행렬 $M_{\alpha\beta}^c$ 와 $\Delta x = 0.15 m$ 에 대한 α_0 값을 사용한 경우 $t = 5.4s$ 의 해석해와 수치해의 비교

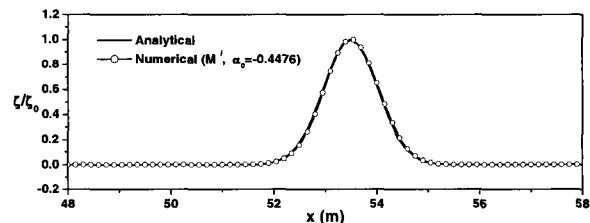


그림 4 집중질량행렬 $M_{\alpha\beta}^l$ 과 $\Delta x = 0.15 m$ 에 대한 α_0 값을 사용한 경우 $t = 5.4s$ 의 해석해와 수치해의 비교

원질량행렬을 사용하는 식(5)가, 1일 때는 집중질량행렬을 사용하는 식(9)가 얻어진다. 식(24)를 전체 요소에 대해 조합하면 다음과 같은 절점에 대한 계산식을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \frac{1-\delta}{6} \left(\frac{\xi_{i+1}^{n+1} - 2\xi_{i+1}^n + \xi_{i+1}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \frac{2+\delta}{3} \\ & \left(\frac{\xi_i^{n+1} - 2\xi_i^n + \xi_i^{n-1}}{\Delta t^2} \right) + \frac{1-\delta}{6} \left(\frac{\xi_{i-1}^{n+1} - 2\xi_{i-1}^n + \xi_{i-1}^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \\ & - \frac{C_o^2}{\Delta x^2} (\xi_{i+1}^n - 2\xi_i^n + \xi_{i-1}^n) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

식(25)의 분산오차 특성을 파악하기 위해 변형방정식을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - C_o^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{C_o^2}{12} \Delta x^2 [1 + Cr^2 - 2\delta] \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} \\ & = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \end{aligned} \quad (26)$$

식(26)의 3번째 항은 수치적인 분산오차를 주므로 이를 제거하기 위한 질량집중도 δ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\delta = \frac{1 + Cr^2}{2} \quad (27)$$

질량집중도 δ 의 조정을 통한 수치분산 제거효과를 확인하기 위해 그림 1과 2에 보인 경우에 대해 검토하였다. 또한 수치계산에 이용된 각종 상수 및 변수값은 그림 1과 2의 경우와 같다. 주어진 전파속도, 요소크기 그리고 시간간격에 대해 식(27)로부터 수치분산을 제거하기 위한 질량집중도 δ 를 구한 결과 0.5785이다. 이 δ 값을 식(25)에 대입하여 수치해를 구하고, 그 결과를 파동방정식의 해석해와 비교하였다. 그 결과 그림 5에 보인 바와 같이 수치해의 수치분산이 거의 제거되어 해석해와 잘 일치하고 있다. 이들 결과로부터 δ 를 조정하여 수치적인 분산오차를 제거할 수 있음을 알 수 있다.

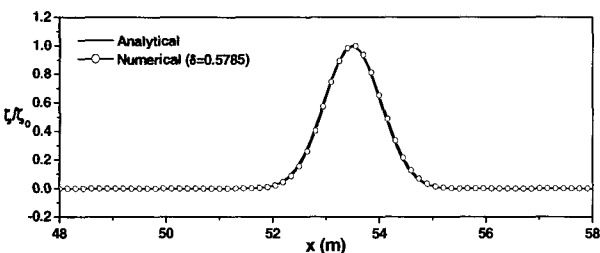


그림 5 조합된 질량행렬과 $\Delta x = 0.15 \text{ m}$ 에 대한 질량집중도 δ 값을 사용한 경우 $t = 5.4 \text{ s}$ 의 해석해와 수치해의 비교

5. 양해법(Explicit Scheme)에 의한 분산보정

앞에서 보인 수치분산오차 제거법은 해를 구하기 위해 행렬을 풀어야 하므로 음해법에 속한다. 이 음해법은 해석 영역이 넓어지면 계산시간이 기하급수적으로 증가하므로 실제적인 문제를 다루기 위해서는 집중질량행렬을 사용하는 순수양해법을 선호하게 된다. 순수양해법은 행렬을 풀 필요가 없어 기억용량과 계산시간을 대폭 줄일 수 있을뿐만 아니라 병렬처리가 쉬운 장점도 있다. 순수양해법에 의한 수치분산 제거는 지배방정식에 인위적인 분산항을 추가하고 분산항의 계수를 조정하여 달성할 수 있다. 이를 위해 Krenk²⁾는 다음과 같이 파동방정식에 인위적인 분산보정항을 추가하였다.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - C_o^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \gamma \Delta x^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (28)$$

여기서 γ 는 수치분산을 제어하기 위한 분산보정계수이다. 식(28)은 4차 미분항을 포함하므로 선형보간함수를 사용할 수 없는 단점이 있다. 그러므로 선형보간함수를 사용하기 위해 식(28)을 다음과 같이 2단계로 나누어 해석한다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C_o^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v - \gamma \Delta x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (30)$$

여기서 v 는 임시변수이다. 식(30)을 시간에 대해 1차 미분하고, 미분된 식에 식(29)를 대입하여 정리하면 식(28)을 얻을 수 있으므로 식(29)와 (30)의 해는 식(28)의 해와 같아지며, 식(28)과는 달리 공간 미분항이 2차이므로 선형보간함수를 사용할 수 있는 장점이 있다. 식(29)에 선형보간함수를 사용하고 Galerkin 가중잔차법을 이용하여 유한요소식을 유도한 다음, 원질량행렬 대신 집중질량행렬을 사용하면 유한요소식은 다음과 같다.

$$M_{\alpha\beta}^I \frac{\partial v_\beta}{\partial t} + C_o^2 K_{\alpha\beta} \xi_\beta = 0 \quad (31)$$

$$M_{\alpha\beta}^I \frac{\partial \xi_\beta}{\partial t} - M_{\alpha\beta}^I v_\alpha - \gamma \Delta x^2 K_{\alpha\beta} v_\beta = 0 \quad (32)$$

하나의 유한요소에 대한 식(31)과 식(32)를 전체 요소

에 대해 조합하면 다음과 같은 절점에 대한 계산식을 얻는다.

$$\frac{v_i^{n+1/2} - v_i^{n-1/2}}{\Delta t} - \frac{C_0^2}{\Delta x^2} (\zeta_{i+1}^n - 2\zeta_i^n + \zeta_{i-1}^n) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{\Delta t} - v_i^{n+1/2} + \gamma(v_{i+1}^{n+1/2} - 2v_i^{n+1/2} + v_{i-1}^{n+1/2}) = 0 \quad (34)$$

여기서 ζ 와 v 는 시간단계가 엇갈려 배치된다. 이 계산식에 포함된 분산효과를 파악하기 위해 식(33)과 식(34)의 합성된 변형방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - C_0^2 \Delta x^2 \left[\frac{1 - Cr^2}{12} - \gamma \right] \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} = O(\Delta x^3, \Delta t \Delta x^2, \Delta t^2 \Delta x, \Delta x^3) \quad (35)$$

식(35)의 3번째 항은 수치분산오차이므로 이를 제거하기 위해서는 γ 를 다음과 같이 정한다.

$$\gamma = \frac{1}{12} (1 - Cr^2) \quad (36)$$

Krenk²⁾는 변형방정식을 유도하지 않고 대략적인 분석을 통하여 다음과 같이 제안하였다.

$$\gamma = \frac{1}{12} \quad (37)$$

그러나 이는 명백한 실수이며 식(36)이 옳다. 식(37)은 Cr 이 매우 작은 경우에만 수치분산이 제거되며, Cr 이 증

가하여 1에 가까워지면 오히려 수치적인 역분산이 발생하여 짧은 파가 더 빨리 전파된다.

분산보정항 추가를 통한 수치분산 제거효과를 확인하기 위해 그림 1과 2에 보인 경우에 대해 검토하였다. 또한 수치계산에 이용된 각종 상수 및 변수값은 그림 1과 2의 경우와 같다. 주어진 전파속도, 요소크기 그리고 시간간격에 대해 식(36)으로부터 수치분산을 제거하기 위한 분산보정계수 γ 를 구한 결과 0.07025이다. 이 γ 값을 식(33)과 (34)에 대입하여 수치해를 구하고, 그 결과를 파동방정식의 해석해와 비교하였다. 그 결과 그림 6에 보인 바와 같이 수치해의 수치분산이 거의 제거되어 해석해와 잘 일치하고 있다. 이들 결과로부터 분산보정계수 γ 를 조정하여 수치적인 분산오차를 효과적으로 제거할 수 있음을 알 수 있다.

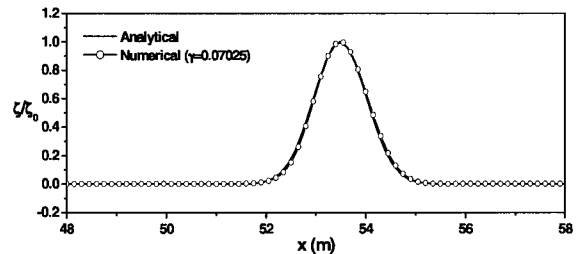


그림 6. 분산보정항과 $\Delta x = 0.15 \text{ m}$ 에 대한 분산보정계수 γ 값을 사용한 경우 $t = 5.4 \text{ s}$ 의 해석해와 수치해의 비교

6. 각 방법의 분산보정 효과 비교

앞에서 언급한 각 수치기법에 대한 분산보정 효과를 정량적으로 검토해 보기 위해 분산보정 수행 유무에 따른 선단파의 최대변위 및 전파거리에 대한 상대오차를 계산하여 표 1에 제시하였다. 여기서 분산보정을 수행하지 않은 경우의 선단파 최대변위에 대한 상대오차는 약 10%이고 선단파 파봉의 전파거리에 대한 상대오차는 약 1%인데 반해,

표 1 분산보정 수행 유무에 따른 선단파 최대변위 및 전파거리 상대오차

구분	분산보정방법	사용질량행렬	사용계수	선단파 최대변위 상대오차(%)	선단파 전파거리 상대오차(%)
분산보정 미수행	없음	M^c	$\alpha_0 = 0.0$	-12.4	0.8
		M^l	$\alpha_0 = 0.0$	-9.0	-0.6
분산보정 수행	공간미분 가중치 α_0 조정법	M^c	$\alpha_0 = 0.6143$	-0.2	-0.1 이하
		M^l	$\alpha_0 = -0.4476$	-0.2	-0.1 이하
	질량집중도 δ 조정법 ($\alpha_0 = 0.0$)	$(1 - \delta)M^c + \delta M^l$	$\delta = 0.5785$	-0.3	-0.1 이하
	분산보정계수 γ 조정법	M^l	$\gamma = 0.07025$	-0.4	-0.1 이하

분산보정을 수행한 경우의 선단파 최대변위에 대한 상대오차는 0.4%이하이며, 전파거리에 대한 상대오차는 0.1%이하로 매우 적게 나타남을 알 수 있다. 이것은 본 연구에서 제안한 분산보정 방법을 수치모의에 적용한 경우 수치오차가 효과적으로 제거되어 정도 높은 수치모의가 이루어짐을 의미한다.

7. 결 론

응력파를 수치모의하기 위해 개발되는 유한요소모형의 수치기법에 따른 분산오차의 특성을 고찰해 보았다. 또한 수치적인 분산오차를 제거하기 위해 음해법에 대해서는 원질량행렬을 사용하는 경우와 집중질량행렬을 사용하는 경우에 대해 각각 가중치 α_0 값을 조절하는 기법을 제안하였으며, 원질량행렬과 집중질량행렬을 조합하여 사용하는 경우에 대해서는 질량집중도 값을 제시하였다. 그러나 가중치 α_0 를 이용하거나 조합된 질량행렬을 사용하여 분산오차의 정도를 조절하는 방법은 집중질량행렬을 사용하는 경우라도 음해법을 피할 수 없게 되어 많은 계산시간을 요구하는 단점이 있다. 그러므로 컴퓨터 기억용량과 계산시간을 대폭 줄이고 병렬처리가 쉬운 순수양해법을 개발하기 위해 분산보정항을 추가하는 방법을 제안하였다. 제안된 방법들은 수치적인 분산오차가 효과적으로 제거되어 해석해와 거의 일치하는 좋은 결과를 보였다. 이 연구에서는 향후 실제적인 응력파 전파모형을 개발하기 위한 기초적인 개념이 정립되었다.

감사의 글

본 연구는 (주)삼보기술단의 지원에 의해 수행되었으며 이에 사의를 표합니다.

참 고 문 헌

1. Kolsky, H., *Stress waves in solids*, Dover Publications, New York, 1963
2. Krenk, S., "Dispersion-corrected explicit integration of the wave equation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 2001, pp.975~987
3. Imamura, F., Shuto, N. and Goto, C., Numerical simulation of the transoceanic propagation of tsunamics, *Proc. of 6th Congress Asian and Pacific Regional Division*, IAHR, Japan, 1988, pp. 265~271
4. Yoon, S.B., "Propagation of distant tsunamis over slowly varying topography", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 107, No. C10, 3140, 2002, pp.4/1~11
5. 김경수, 박준범, 정재훈, "응력파에 의한 구조부재의 동적파괴 해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제10권 제4호, 1997, pp.195~203
6. 김희석, 이종세, 유한요소법에서의 파진행 문제를 위한 흡수경계 성능에 관한 연구, 한국전산구조공학회 학술발표회논문집, 제16권 제2호, 2003, pp.413~420
7. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The finite element method. Vol. 2. Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, McGraw-Hill, UK, 1991, p.807
8. Hughes, T.J.R., *The finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987
9. Kinnmark, I.P.E., *The shallow water wave equations: formulation, analysis and application*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1986, p.187
10. Luettich, R.A., Westerink, J.J. and Scheffner, N.W., "ADCIRC: An advanced three-dimensional circulation model for shelves, coasts, and estuaries, Report 1: theory and methodology of ADCIRC-2DDI and ADCIRC-3DL", Dredging Research Program Technical Report DRP-92-6, U.S. Army Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS, 1992, p.137
11. Tannehill, J. C., Anderson, D. A. and Pletcher, R. H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd ed., Taylor & Francis, Washington, DC, 1998, p.792