

단면변형의 효과를 포함한 강상자형 거더의 엄밀한 해석

An Exact Analysis of Steel Box Girders with the Effects of Distortional Deformation of Sections

진 만 식* 이 병 주** 김 문 영†
Jin, Man-Sik Lee, Byong-Joo Kim, Moon-Young
(논문접수일 : 2004년 4월 19일 ; 심사종료일 : 2004년 2월 9일)

요 지

본 연구에서는 직선 강상자형 거더의 단면변형에 의한 변형 및 응력계산을 위한 Matlab 해석프로그램을 개발하고자 한다. 이를 위하여 단면변형이론을 요약하고 빔유사이론을 제시한다. 이후 탄성지반위의 보-기둥부재의 지배방정식을 제시하고, 일반화된 고유치해석을 통하여 집중 및 분포하중을 받는 보요소의 엄밀한 강성행렬을 계산한다. 본 연구의 효율성과 정확성을 입증하기 위하여 격벽을 갖는 상자형 거더의 뒤틀림응력을 계산하고 유한요소해와 비교한다.

핵심용어 : 단면변형응력, 탄성지반 위의 보이론

Abstract

The main goal of this study is to develop MATLAB programming for an analysis of distortional deformations and stresses of the straight box girder. For this purpose, a distortional deformation theory is firstly summarized and then a BEF (Beam on Elastic Foundation) theory is presented using analogy of the corresponding variables. Finally, with governing equations of the beam-column element on elastic foundation, an exact element stiffness matrix of the beam element and nodal forces equivalent to concentrated and distributed loads are evaluated via a generalized linear eigenvalue problem. In order to verify the efficiency and accuracy of this method, distortional stresses of box girders with multiple diaphragms are presented and compared with results by FEA.

keywords : *distortional stresses, BEF(Beam on Elastic Foundation)theory*

1. 서 론

얇은 판으로 구성된 폐단면의 상자형 교량은 개단면 보에 비해 비틀림 강성이 월등히 크다는 장점을 가지고 있다. 이로 인해 편심하중을 받는 장지간의 보나 곡선 구조물에 많이 사용되고 있다. 최근의 교량건설에 있어서 도심과 도심 외각지역 교량의 90% 이상이 강상자형 교량으로 건설되고 있는 실정이며, 설계추세도 기존의 강축에 대한 휨설계에서 종방향 비틀림 해석까지 수행되는 좀 더 정밀

한 해석이 요구되고 있다. 그러나 현재 실무에서는 단면변형의 거동특성에 대한 면밀한 분석없이 단면변형응력을 감소시키기 위해 습관적으로 내부 격벽의 간격을 6m 이내로 설계하고 있으며, 이것이 비합리적 설계라는 인식은 많이 대두되었으나 해석상의 어려움으로 이를 해결하지 못하고 있다.

단면변형의 문제를 해결하기 위하여 Wright *et al.*¹⁾은 중간격벽의 간격결정이 용이한 해석이론과 BEF법을 제시하였다. Dabrowski²⁾는 일축 대칭 단면을 가지는 박스거

† 책임저자, 정회원 · 성균관대학교 토목환경공학과 교수
전화: 031-290-7544; Fax: 031-290-7548
E-mail: kmye@skku.ac.kr

* 성균관대학교 토목환경공학과 석사과정

** 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

· 이 논문에 대한 토론을 2004년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2004년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

더모델의 distortion현상을 해석했다. 이 후로 Bazant *et al.*³⁾, Zhang *et al.*⁴⁾ 등 몇몇 연구자들에 의해 등매개(isoparametric) 정식화에 기초하여 torsional warping과 distortional warping 자유도를 가지는 박스 빔 요소를 개발하였다. 또한 Maisel⁵⁾은 torsion과 distortion에 대한 박스 거더 시스템의 유한 요소 방법론을 제공하였다. 그리고 Razaqpur *et al.*^{6)~8)}은 일반화시킨 단면변형 모드를 적용하여 콘크리트 박스 거더교를 해석하기 위한 등매개 정식화에 기초한 박스 빔 요소를 개발하였다. 최근에는 Kang *et al.*⁹⁾은 직선 상자형 거더의 운동방정식을 이용하여 편심하중을 받는 상자형 거더에 발생하는 단면응력을 휨응력, 뒹응력과 단면변형휨응력으로 각각 분해하여 해석을 수행하였고 parametric study를 통한 적절한 격벽 간격을 제시하였다.

본 연구는 단면변형의 영향을 고려한 상자형 교량의 기존의 해석방법인 BEF법¹⁾과 강교설계기초¹⁰⁾에서 제시된 단면변형의 이론에 대해 고찰하고, 이를 바탕으로 BEF이론에서 제시된 지배방정식으로부터 고유치해석을 수행하여 엄밀하게 단면변형에 대한 변위와 응력을 산정한다. 또, 격벽에 대한 이론적인 해석¹¹⁾과 응용프로그램을 사용한 연구를 통하여 격벽에 대하여 보다 엄밀한 강성산정을 도모하여 일반적인 상자형 단면에 단면변형의 영향에 대해 보다 엄밀한 해석을 수행하고자 한다. 그리고 위 결과를 상용프로그램인 SAP2000의 3차원 셀 요소에 의한 해석결과를 비교, 분석하여 타당성을 검증한다.

2. 개선된 BEF의 엄밀해석법

상자형에 작용하는 편심하중은 그림 1과 같이 휨 하중과 비틀림 하중으로 구분하고, 비틀림 하중은 순수 비틀림 하중과 단면변형 하중(distortional load)으로 구분할 수 있다. 그리고 편심하중에 의한 변형은 그림 2와 같이 휨 변형과 비틀림 하중에 의한 순 비틀림 변형, 단면변형으로 구분할 수 있다. 본 연구의 수치예제에서는 그림 1(a)와 같이 편심하중을 재하하지 않고 그림 1(b)와 같이 비틀림 하중을 재하하여 휨 하중에 의한 처짐을 제외한 순 비틀림 하중과 단면변형에 의한 처짐의 합으로서 비틀림 하중에 의한 처짐을 계산하였다. 응력비교에서도 휨 응력을 제외한 비틀림 하중에 의한 단면변형 뒹응력(distortional warping normal stress)과 횡방향 휨응력(transverse bending normal stress)에 대해서만 고려한다.

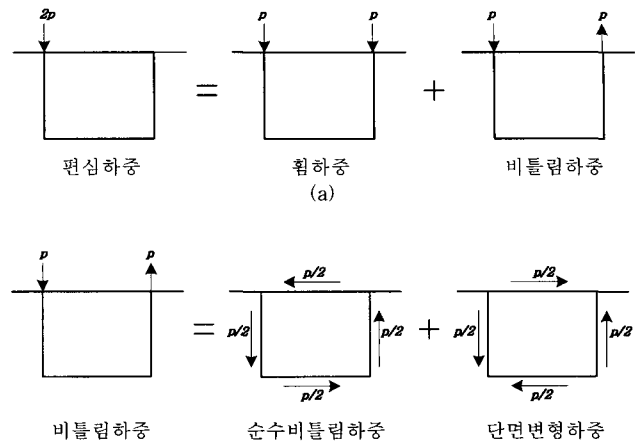


그림 1 편심하중의 해석

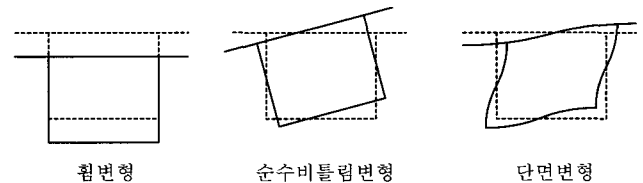


그림 2 편심하중에 의한 변형

2.1 Beam on Elastic Foundation 이론

본 절에서는 문헌 11의 내용을 참조하여 BEF이론을 간략히 요약, 제시한다. 문헌 11에 의하면 단면에 작용하는 비틀림 하중 p 는 식 (1)과 같이 단면변형 휨 하중 p_d 와 뒹 하중 p_w 의 합으로 나타낼 수 있다.

$$p = p_d + p_w = \frac{v}{\delta_1} + EI_b v'''' \quad (1)$$

여기서 $1/\delta_1$ 과 EI_b 는 단면변형과 관련된 단면상수에 해당하며 자세한 계산식은 문헌¹¹⁾을 참조할 수 있다. 이제 식 (1)을 분포하중 p 에 대한 탄성지반상보와 유사성을 이용하여 처짐 미분방정식으로 표시하면 다음과 같다(그림 3 참조).

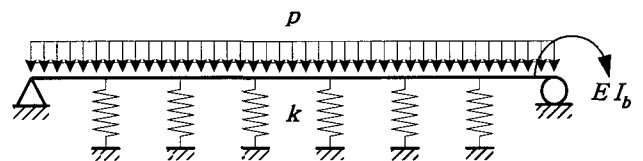


그림 3 등분포하중을 받는 탄성지반 위의 보

$$v'''' + 4\beta^4 v = \frac{p}{EI_b} \quad \text{여기서, } \beta = \sqrt[4]{\frac{1}{4EI_b \delta_1}} \quad (2)$$

식 (2)의 $1/\delta_1$ 이 탄성지반상보의 지반탄성계수 k 와 EI_b 가 탄성지반 보의 빔 강성에 대응되면 식 (2)는 탄성 지반상보에 하중 p 가 작용할 때의 미분방정식과 일치한다. 따라서 탄성 지반위의 지배방정식의 해를 구함으로써, 단면변형의 변위는 물론 아래와 같은 단면 응력을 구할 수 있다.¹¹⁾

단위 비틀림 하중에 의한 각 평판의 횡 굽힘 응력³⁾ f_d 는 다음 식을 사용하여 산정할 수 있다.

$$f_d = \frac{M_d}{Z} \tag{3}$$

여기서, M_d 는 횡 방향 단면의 단면변형 모멘트(그림 4(c))이고 $Z (= Et^3/12(1-\mu^2))$ 는 평판의 단면계수이다. 그림 4에서와 같이 횡 방향 단면의 단면변형 모멘트는 단위 비틀림 하중에 대한 불평형 절점력(v)와 단위 비틀림 하중에 의한 판 요소의 전단에 의한 변형 비(q_{sa}, q_{sb}, q_{sc})로서 구할 수 있다.

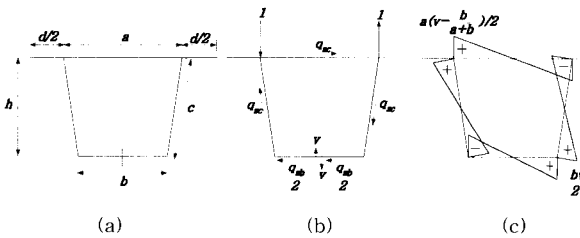


그림 4 단위 비틀림 하중을 받는 단면해석

여기서, $q_{sa} = (\frac{a}{a+b}) \frac{a}{h}$, $q_{sb} = (\frac{a}{a+b}) \frac{b}{h}$, $q_{sc} = (\frac{a}{a+b}) \frac{c}{h}$ 이다.

따라서 임의의 비틀림 하중 $p_d (= v/\delta_1)$ 에 의한 각 평판의 횡 굽힘 응력¹¹⁾은 다음과 같다.

$$F_d = f_d \frac{v}{\delta_1} \tag{4}$$

한편, 하부 플랜지와 복부플랜지가 만나는 모서리 지점에 작용하는 단면변형 휨 응력¹¹⁾은 다음과 같다.

$$F_w = \frac{b}{2} \cdot \frac{M}{I_b} = \frac{b}{2} E \Delta_b v'' \tag{5}$$

여기서, M 은 warping 모멘트로서 BEF의 휨모멘트에 해당된다. 단위 변형량(δ_1)이 발생할 때 생기는 하부플랜

지의 변위가 Δ_b 이고 비틀림 하중에 의해 발생하는 임의의 처짐(v)에 의한 하부플랜지의 변위는 $\Delta_b \cdot v$ 가 된다. 따라서 이 변위를 일으키는 휨 모멘트는 탄성곡선방정식에 따라 $M = EI_b \Delta_b v''$ 이다.

이로써 비틀림 하중을 받는 상자형은 BEF로 유사됨을 알 수 있다. 그림 5는 비틀림 하중을 받는 상자형과 횡 하중을 받는 탄성지반상보의 유사관계¹²⁾를 정리한 것이다.



그림 5 상자형 거더와 탄성지반상 보의 유사 과정

2.2 탄성지반위의 보-기둥 총포텐셜에너지와 지배방정식

그림 6은 축방향력 P , 집중하중 F 그리고 분포하중 q 를 받는, 탄성지반위에 놓인 보요소를 나타낸다. 이와 같은 탄성지반위의 보-기둥요소들의 지배방정식 (9), 경계조건식 (10), 그리고 힘변위 관계식 (11)은 총포텐셜 에너지식 (6)에 변분의 원리를 도입함으로써 구할 수 있다.

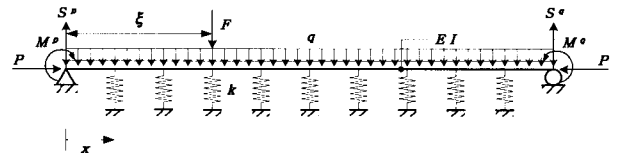


그림 6 분포하중과 집중하중을 받는 탄성지반위의 보 시스템

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \{ EI v''^2 - P v'^2 + k v^2 + 2[Fv\delta(x-\xi) + qv] \} dx - \{U\}^T \{F\} \tag{6}$$

$$\int_0^L \{ [EI v'''' + P v'' + k v - F\delta(x-\xi) - q] \delta v \} dx = 0 \tag{7}$$

그리고,

$$[EI v''(L) - M^q] \delta \omega^q - [EI v''(0) - M^p] \delta \omega^p = 0 \tag{8a}$$

$$[EI v'''(L) - P v'(L) - S^q] \delta v^q - [EI v'''(0) - P v'(0) + S^p] \delta v^p = 0 \tag{8b}$$

$$EI v'''' + P v'' + k v - F\delta(x-\xi) - q = 0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \delta v^p &= 0 \text{ 또는 } S^p = -S(0) = EIV'''(0) + Pv'(0) \\ \delta \omega^p &= 0 \text{ 또는 } M^p = -M(0) = -EIV''(0) \\ \delta v^q &= 0 \text{ 또는 } S^q = S(L) = -EIV'''(L) - Pv'(L) \\ \delta \omega^q &= 0 \text{ 또는 } M^q = M(L) = EIV''(L) \end{aligned} \quad (10)$$

$$S = -EIV''' - Pv', \quad M = EIV''(L) \quad (11)$$

여기서, $v^p, \omega^p, v^q, \omega^q$ 는 절점변위, S^p, M^p, S^q, M^q 는 절점력벡터, 그리고 S, M 은 각각 전단력과 모멘트를 나타낸다.

이제 연립미분방정식 형태의 고유치 문제로 전환하기 위하여 변위 파라메타 $d_i (i=1\sim 4)$ 를 식 (12)와 같이 정의한다.

$$d(x) = \langle d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \rangle^T = \langle v \ v' \ v'' \ v' \rangle^T \quad (12)$$

이 식을 이용하여 4계 미분방정식을 1계 연립미분방정식으로 변환시킬 수 있으며, 이를 행렬의 형태로 표현하면 식 (13)을 얻는다.

$$A d' = B d + e \quad (13)$$

여기서,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{EI} & 0 & -\frac{P}{EI} & 0 \end{bmatrix}$$

$$e = \left\{ 0, 0, 0, \frac{F}{EI} \delta(x-\xi) + \frac{q}{EI} \right\}^T$$

2.2 제차해 산정

식 (13)에서 제차해(homogeneous solution)를 얻기 위하여 비제차항을 없애면 식 (14)과 같이 쓸 수 있다.

$$A d' = B d \quad (14)$$

일반적으로 식 (14)의 일반해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$d_h(x) = \sum_{i=1}^4 a_i Z_i e^{\lambda_i x} \quad (15)$$

이때 식 (15)를 식 (14)에 대입하면 식 (16)과 같이 고유치문제를 얻는다.

$$(A\lambda - B) Z = 0 \quad (16)$$

위의 식으로부터 복소수 형태로 4개의 고유치 및 고유벡터를 구할 수 있다. 이를 이용하여 식 (13)의 제차해를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$d_h = X(x) a \quad (17)$$

$$\text{여기서, } X(x) = [Z_1 e^{\lambda_1 x}; Z_2 e^{\lambda_2 x}; Z_3 e^{\lambda_3 x}; Z_4 e^{\lambda_4 x}],$$

$$a = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}^T$$

2.3 비제차해 산정

한편 식 (13)의 특수해(particular solution)를 구하기 위하여 등분포 하중의 경우와 집중하중이 재하 될 경우를 구분하여 해를 구한다. 등분포하중의 경우는 식 (18)와 같이 등가 절점하중으로 치환하여 일반해 (d_{p1})를 구할 수 있다. 이는 d_{p1} 을 미정계수로 구성된 상수벡터로 가정하면 식 (13)은 다음과 같이 된다.

$$B d_{p1} + e = 0 \quad (18)$$

$$d_{p1} = -B^{-1} e_q = \left\{ -\frac{q}{k} \ 0 \ 0 \ 0 \right\}^T \quad (19)$$

또한, 집중하중의 경우는 등가절점하중으로 치환하는 방법으로써 구간함수를 이용한다. 구하려는 위치의 요소의 위치(x)와 요소내의 집중하중 위치(ξ)의 관계에 따라 식 (27)와 같이 집중하중에 대한 특수해 (d_{p2})를 구할 수 있다.

먼저, x 가 집중하중이 재하되는 지점보다 작은 위치에 있을 때, 즉, $0 < x < \xi_-$ 일때 변위파라미터에 아무런 영향을 주지 않기 때문에 식 (20)과 같이 표현할 수 있다.

$$d(0) \equiv 0, \quad d(x) \equiv 0 \quad (20)$$

다음은 x 가 집중하중의 미소 접지길이의 시작점과 끝점 사이에 있을 때, 즉, $\xi_- < x < \xi_+$ 일때, 식 (21)에서 보듯이 식 (13)의 양변을 적분한다.

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} \mathbf{A} \mathbf{d}' dx = \int_{\xi_-}^{\xi_+} \{ \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{e}_F \} dx \quad (21)$$

여기서, 좌변항은 \mathbf{d}' 이 불연속 함수이다. 또한 식 (22)와 같이 $\mathbf{d}(\xi_-)$ 가 $\mathbf{0}$ 이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} \mathbf{A} \mathbf{d}' dx = \mathbf{d}(\xi_+) - \mathbf{d}(\xi_-) = \mathbf{d}(\xi_+) \quad (22)$$

다음은 우변 첫번째항의 \mathbf{d} 함수는 연속이다. 따라서 미소 접지길이 사이에서의 적분은 다음과 같다.

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} \mathbf{d} dx = \begin{Bmatrix} \Delta d \\ \Delta d' \\ \Delta d'' \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (23)$$

마지막으로 우변 둘째항은 상수의 적분으로서 미소 접지길이 사이의 넓이는 1이므로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_{\xi_-}^{\xi_+} \mathbf{e}_F u(x-\xi) dx = \mathbf{e}_F u(x-\xi) = u(x-\xi) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F}{EI} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

따라서, 위의 식 (12), (23), (24)로부터 다음 식을 얻는다.

$$\mathbf{d}(\xi_+) = u(x-\xi) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_F \quad (25)$$

마지막으로 x 가 집중하중이 재하되는 미소 접지길이의 끝점보다 클 때, 즉, $x > \xi_+$ 일때, 식 (26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{d}(\xi_+) = \mathbf{X}(\xi_+) \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{X}(\xi_+)^{-1} \mathbf{d}(\xi_+) \quad (26)$$

식 (20), (25) 그리고 식 (26)을 구간함수로써 표현하고 식 (17)에 대입하면 식 (27)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{d}_{p2} = \mathbf{X}(x) \mathbf{X}(\xi)^{-1} \mathbf{d}(\xi) \quad (27)$$

여기서, $\begin{cases} x < \xi & \text{이면 } u(x-\xi) = 0 \\ x \geq \xi & \text{ 이면 } u(x-\xi) = 1 \end{cases}$,

$$\mathbf{d}(\xi) = u(x-\xi) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{e}_F = u(x-\xi) \mathbf{e}_F$$

식 (19)의 등분포하중에 대한 등가절점하중과 식 (27)의 집중하중에 대한 등가절점하중을 선형적으로 합하면 요소내부에 작용하는 하중에 대한 비제차해는 식 (28)가 된다.

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{d}_{p1} + \mathbf{d}_{p2} \quad (28)$$

결국, 식 (13)의 일반해(general solution)를 식 (17)의 제차해와 식 (28)의 비제차해의 합으로써 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(x) &= \mathbf{d}_h + \mathbf{d}_p \\ &= \mathbf{X}(x) \mathbf{a} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}_q + u(x-\xi) \mathbf{X}(x) \mathbf{X}(\xi)^{-1} \mathbf{e}_F \end{aligned} \quad (29)$$

2.4 절점변위 산정

일반해식 (29)에 경계조건을 대입하면 적분상수 벡터 \mathbf{a} 를 결정할 수 있다. 먼저 다음과 같이 절점변위를 정의한다.

$$\mathbf{U}_e = \langle \mathbf{U}^p, \mathbf{U}^q \rangle^T \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^p &= \langle v(0), v'(0) \rangle^T = \langle d_1(0), d_2(0) \rangle^T \\ \mathbf{U}^q &= \langle v(L), v'(L) \rangle^T = \langle d_1(L), d_2(L) \rangle^T \end{aligned}$$

한편, 보의 양단의 절점 자유도(degree of freedom)에 따른 변위 파라메타를 행렬식으로 나타내면 식 (31)과 같이 절점변위 벡터 \mathbf{U}_e 와 적분상수벡터 \mathbf{a} 등을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{U}_e = \mathbf{E} \mathbf{a} + \widehat{\mathbf{d}}_p \quad (31)$$

여기서,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 e^{\lambda_1 0}; & \mathbf{Z}_2 e^{\lambda_2 0}; & \mathbf{Z}_3 e^{\lambda_3 0}; & \mathbf{Z}_4 e^{\lambda_4 0} \\ \mathbf{Z}_1 e^{\lambda_1 L}; & \mathbf{Z}_2 e^{\lambda_2 L}; & \mathbf{Z}_3 e^{\lambda_3 L}; & \mathbf{Z}_4 e^{\lambda_4 L} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{d}}_p = \widehat{\mathbf{d}}_{p1} + \widehat{\mathbf{d}}_{p2}$$

$$\hat{d}_{p1} = \left\{ -\frac{a}{k} \quad 0 \quad -\frac{a}{k} \quad 0 \right\}^T,$$

$$\hat{d}_{p2} = \{0, 0, X(L)X(\xi)^{-1}d(\xi), X(L)X(\xi)^{-1}d(\xi)\}^T$$

여기서 E^{-1} 를 구하여, a 에 대하여 다시 전개하면 다음과 같다.

$$a = E^{-1}U_e - E^{-1}\hat{d}_p \quad (32)$$

식 (32)를 식 (29)에 대입하여 복소수계수 a 를 소거하면, 다음과 같은 변위벡터를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d(x) &= X(x)[E^{-1}U_e - E^{-1}\hat{d}_p] + d_p(x) \\ &= X(x)E^{-1}U_e - X(x)E^{-1}\hat{d}_p + d_p(x) \end{aligned} \quad (33)$$

2.5 강도행렬 산정

한편 보-기둥 요소의 강도행렬을 구하기 위하여 다음과 같은 힘-변위 관계식을 도입해야 한다.

$$f(x) = R d(x) \quad (34)$$

$$\text{여기서, } f = \langle S, M \rangle^T, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -P & 0 & -EI \\ 0 & 0 & EI & 0 \end{bmatrix}$$

식 (33)을 식 (34)에 대입하면 다음 식 (36)와 같이 나타낼 수 있다.

$$f(x) = RX(x)E^{-1}U_e - RX(x)E^{-1}R\hat{d}_p + Rd_p(x) \quad (35)$$

한편, 부재양단의 절점력 벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$F_e = \{ F^p, F^q \}^T = \{ -S(0) \quad -M(0) \quad S(L) \quad M(L) \}^T \quad (36)$$

여기서,

$$\begin{aligned} F^p &= -f(0) = -RX(0)E^{-1}U_e \\ F^q &= f(L) = RX(L)E^{-1}U_e \end{aligned}$$

최종적으로, 다음과 같은 보-기둥 요소의 엄밀한 강도행렬을 구할 수 있다.

$$K = \begin{bmatrix} -RX(0)E^{-1} \\ RX(L)E^{-1} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (37)$$

이렇게 구한 탄성지반 위의 직선 보-기둥 요소의 엄밀한 강도행렬은 해석해라 할 수 있으므로, 직선 뼈대구조 모델링 할 경우에 요소의 수를 획기적으로 감소시킬 수 있으며, 경계조건의 제약도 받지 않는다. 마지막으로, 이와 같이 구한 보 요소의 강도행렬과 절점력, 절점변위와의 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$F_e = KU_e - K\hat{d}_p + \begin{bmatrix} -Rd_p(0) \\ Rd_p(L) \end{bmatrix} \quad (38)$$

식 (38)에서 U_e 를 0으로 놓으면(요소 양단을 고정단으로 보았을때) 요소의 절점에 작용하는 절점력을 계산할 수 있다. 이는 재하된 하중(분포하중 및 집중하중)에 대한 등가절점하중으로서 일반적인 유한 요소해석법으로써 절점변위를 얻을 수 있다. 이 절점변위를 식 (33)에 대입하게 되면 구간 내 모든 점에서의 변위파라메타 $d_1(=v)$, $d_2(=v')$, $d_3(=v'')$, $d_4(=v''')$ 를 계산할 수 있다.

2장에서 언급했듯이 비틀림 하중에 의한 처짐은 순수 비틀림 하중에 의한 처짐과 단면변형에 의한 처짐의 합으로 계산한다. 따라서 위에서 구한 단면변형에 의한 처짐 $d_1(=v)$ 과 식 (39)으로 계산되는 순수 비틀림 하중에 의한 처짐의 합이다.

$$v_{st} = \frac{\alpha}{2} \theta \quad (39)$$

여기서, θ 는 단면의 회전각이며 이는 $\theta' = T/GJ$ 의 관계와 경계조건을 이용하여 구한다.

또한 위에서 구한 변위파라메타로부터 단면에 작용하는 응력을 구할 수 있다. 식 (4), (5)으로부터, 우리는 $d_1(=v)$ 는 횡 굽힘 응력에 관여하고, $d_3(=v'')$ 은 단면변형됨응력에 관여한다는 것을 알 수 있다.

3. 상자형의 격벽강도

표 1은 참고문헌 1과 10에서의 격벽의 형식에 따른 격

표 1 참고문헌 1, 10의 각 격벽형태에 대한 격벽강도

격벽형식		단면변형이론	참고문헌 1	참고문헌 10
격판형식		$K_D = \frac{A_b E_b}{L_b} \left(\frac{\delta_b}{\delta_1} \right)^2$	$A_b = \frac{G_p t_p L_b^3}{2 E_b A_p}$	$K_D = G t_p b h$
트러스형식	X형 트러스		트러스 단면적 그대로 쓴다.	$K_D = \frac{2 E A_b b^2 h^2}{L_b^3}$
	V형 트러스	x	$K_D = \frac{E A_b b^2 h^2}{2 L_b^3}$	
라멘형식			$K_D = \frac{1}{\delta_1}$	$K_D = \frac{2 A E I_w}{a_0 h}$

벽강도(K_D)를 정리한 것이다. 본 연구에서의 수치해석 예는 참고문헌 1의 단면변형이론을 사용하고 있다. 참고문헌 1과 10의 각 격벽강도는 임의의 단면에 대해 같은 값이 아니라 서로 일정 상수배이다. 이는 두 이론이 복부판의 처짐(v), 단면의 회전(θ)에 의한 운동방정식으로부터 각각 유도 되었기 때문이다.

여기서, 참고문헌 1의 δ_b 는 단위 비틀림 하중에 의한 상자형 단면의 대각선 변위를 나타낸다. 또한 δ_1 는 단위 비틀림 하중에 의한 복부판의 처짐을 나타내며 L_b 는 격판의 상하 대각방향 모서리 길이(단, V형은 하부플랜지 중앙지점과 상부플랜지와 접하는 복부판의 끝지점 사이의 길이)며, A_b 는 격판의 면적을 나타내고 있다. 참고문헌 10의 I_w, I_u, I_t 는 각각 복부, 상부, 하부 플랜지의 단면 2차 모멘트이고, a_0 는 격벽강도 파라미터이다.

그림 7은 위의 격벽강도를 적용시키기 위해 상자형을 탄성지반 보로 유사한 그림이다. 그림과 같이 상자형의 중간 격벽을 중간스프링으로 대체해 놓았음을 알 수 있다.

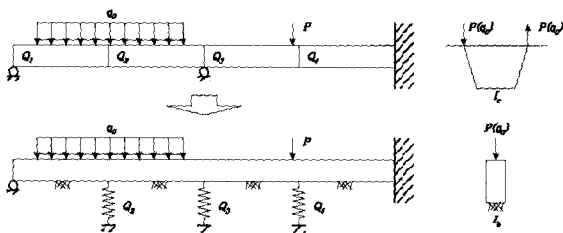


그림 7 BEF analogy of box girder.

4. 수치해석

본 연구에서 제안된 단면변형 해석방법을 이용하여 강상자형 보의 단면변형을 MATLAB을 이용하여 프로그래밍하여 수치해석을 실시하였다. 본 연구의 방법으로써 강상자형 박스 거더의 하중조건, 즉 집중하중과 분포하중의 하중조건아래 격벽의 유무에 따라 단면변형(distortion)에

의한 처짐, 뒹움력 그리고 단면변형 휨응력을 각각 SAP 2000의 Shell model의 결과와 비교하였다.

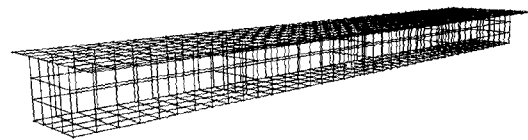


그림 8 격벽4개를 갖는 3차원 셸 모델(SAP2000)

4.1 거더의 형태와 단면제원

거더의 형태와 단면제원을 다음 그림 9에 나타내었다.

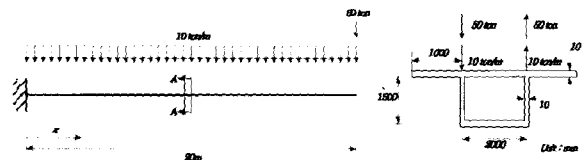


그림 9 캔틸레버보의 하중 재하조건과 거더의 단면제원

4.2 모델 설명

본 연구에서 캔틸레버 박스 거더의 모델링은 격벽이 없는 경우와 있는 경우, 두 가지로 나누어 졌다. 또한 하중 재하 조건은 분포하중과 집중하중으로 각각 나누어 재하하였다. 분포하중의 경우, 전 지간에 걸쳐 재하되고 집중하중은 자유단부에 재하된다. 여기서 그림 9(a)에서 보듯이 분포하중은 10tonf/m, 집중하중은 50tonf이 각각 재하된다. 그림 9(b)는 단면의 형태와 크기, 편심하중 재하위치를 나타낸다. 재하위치는 그림 9(b)와 같이 상부 플랜지와 복부 플랜지와 만나는 모서리 지점에 각 하중을 재하한다. 그리고 그림 9(b)의 단면의 비틀림상수 J 는 0.051429이고 BEF에 적용 할 탄성지반계수(k)와 2차 단면 모멘트(I_b)는 각각 26.374, 0.012882이다(단면상수 단위: m^4).

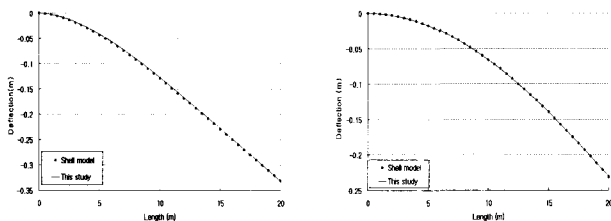
SAP2000 프로그램에 의한 셸 모델링은 그림 8와 같이

4절점 720개의 쉘 요소로서 모델링 되어있다. 그림 8의 경우는 격벽이 있는 박스의 경우로서 두께가 10mm인 격벽 3개(자유단부 격벽 포함)를 10m 간격으로 배치한 것이다. 격벽은 격판형식으로 적용하였으며, 표 1로써 격벽강도를 산정하였다. 격벽강도(K_{dia})는 격벽의 강도를 484615.385 (tonf/m)로 하여 Shell model에 적용하였다. 반면에, MATLAB을 이용한 본 프로그램은 그림 9와 같이 집중하중과 분포하중이 재하되는 한 개의 요소로서 해석할 수 있다. 또한 중간격벽이 있는 경우, 격벽강도에 상응하는 중간스프링 강성을 두어 해석하였다.

4.3 수치해석결과

박스거더의 처짐은 복부플랜지와 상부플랜지가 만나는 모서리 지점의 처짐을 나타낸다. 그리고 단면응력(distortional stress)들은 복부플랜지와 하부플랜지가 만나는 모서리 지점의 값과 그 지점으로부터 하부 플랜지의 중간지점 방향으로 0.5m 지점, 이 두 점에 대응하는 응력을 나타낸다. 해석은 중간 격벽이 없는 박스거더와 3개의 중간격벽이 있는 박스거더를 선택하였다. 여기서 그림 10, 11에서 각각의 (a), (b)에서 볼 수 있듯이 처짐에 대한 Shell model과 본 연구와의 차이는 집중하중 재하시 집중점의 과대한 처짐을 제외하고는 거의 없다고 할 수 있다. 다만 단면변형 뒀응력과 횡 굽힘응력과 같은 응력 비교에서 일부 단부나 격벽부의 응력이 크게 차이가 나게 된다. 먼저, Shell 모델의 고정단이 완벽한 고정단이 아니라 절점에 의하여 고정되는 모델이어서 반력의 집중이 불가피하기 때문에 켈틸레버 단부의 응력 값의 차이가 발생하게 된다. 또한 격벽에서의 일부 결과의 차이가 있음을 알 수 있는데, 이것은 본 연구가 일차원 해석이므로 격벽자체는 강성만을 제공하여 처짐해석에만 기여할 뿐 다른 부분 즉, 응력해석에 대한 직접적인 영향을 끼치지 못한다. 한편, 3차원 Shell model에서는 격벽자체가 박스거더 시스템에서 하나의 요소로 구성되기 때문에 거더 응력에 상당한 영향을 미치게 되어 결과 값의 차이는 필연적으로 발생한다.

4.3.1 중간 격벽없는 박스거더



(a) Deflection of box girder due to distributed load (b) Deflection of box girder due to concentrated load

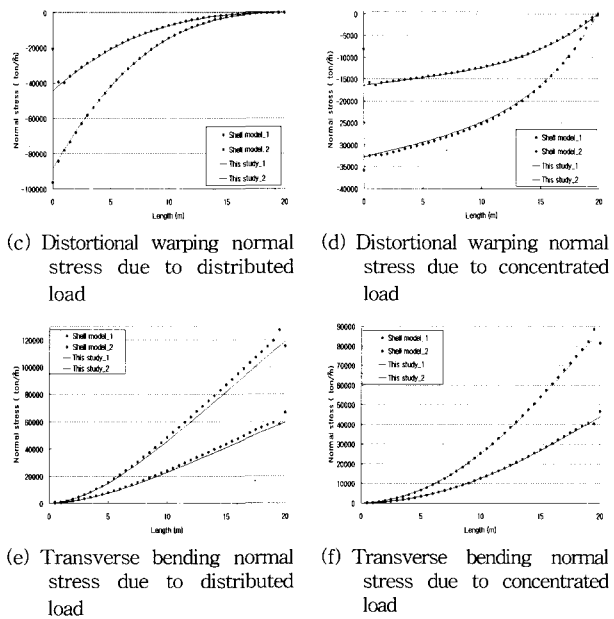


그림 10 중간 격벽이 없는 박스 거더의 단면변형에 의한 응력

중간격벽이 없는 박스거더의 처짐과 뒀응력과 단면변형 휨응력을 그림 10에 나타내었다. 본 연구의 처짐값과 응력 값이 Shell model의 값과 거의 같음을 그림 10(a), (b), (c), (d)에서 알 수 있다. 그림 10(e), (f)에서는 각각 분포하중과 집중하중에 대한 단면변형 휨응력을 나타내는 것으로서 어느 정도의 차이는 있으나 응력 분포의 타당성을 입증하기엔 충분하다.

4.3.2 3개의 중간 격벽을 갖는 박스거더

중간격벽을 갖는 박스 거더의 처짐과 뒀응력과 단면변형 휨응력을 그림 11에 나타내었다. 그림 11에서 보듯이 분포하중일 때는 거의 같음을 알 수 있으나 다만, 집중하중 재하 시에는 결과 값의 차이가 상당히 있음을 알 수 있다. 이것은 3개의 격벽을 가지는 켈틸레버보는 단면변형에 의한 처짐이나 응력이 순수 비틀림(St. venant torsion)에 의한 것보다 상대적으로 아주 작음을 그림 11(c), (e)와 (d), (f)의 세로축의 스케일을 비교함으로써 확인 할 수 있다. 따라서, 그림 11(d), (f)는 하중의 집중 시 생기는 국부효과(local effect)와 세로 축의 스케일을 생각할 때 그림에서의 결과 값의 차이는 미미하다고 할 수 있고 응력 분포면에서 볼 때 그 타당성을 입증하기도 충분하다.

5. 결 론

본 연구에서는 단면변형의 이론적인 고찰을 통하여, 일반적인 상자형단면에서 단면변형효과에 의한 변위 및 응력

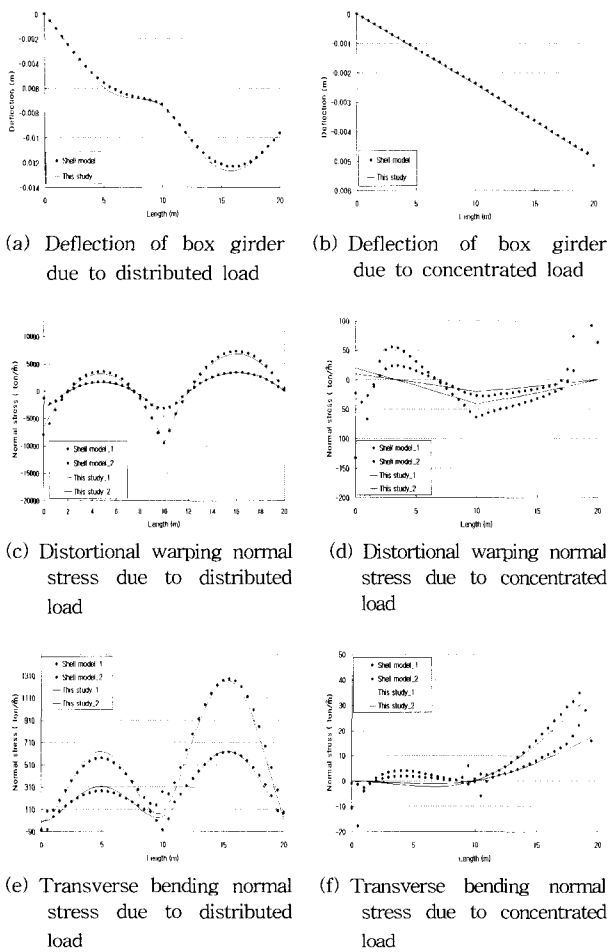


그림 11 3개의 중간 격벽을 갖는 박스 거더의 단면변형에 의한 응력

을 산정하는 엄밀한 강도행렬을 구성하였다. 또한, 다양한 하중이 작용 할 경우에 대하여 단면변형의 변위와 응력을 산정 할 수 있는 이론을 구축함으로써 다양한 적용을 가능케 하였다. 이에 대한 결과는 상용프로그램(SAP2000) 및 MATLAB을 이용한 BEF 프로그램과 비교 검토하여 타당성 여부를 검토하였다. 이러한 결과는 앞으로 단면변형 효과를 BEF 이론을 기반으로 하여 일반적인 상자형 거더에 적용시킬 수 있게 하며, 보다 효율적인 계산을 가능케 하는 기본적인 토대가 될 수 있다. 본 연구의 결과는 다음과 같다.

- (1) 단면변형(distortion)에 대한 이론적 기본적인 이해를 토대로 격벽이 있는 상자형 거더에서 단면변형의 변위와 응력을 보다 엄밀하게 산정하였다. 이는 BEF 이론 방법에서 제시된 지배방정식을 Eigenvalue 해석을 통하여 단면변형의 변위와 응력을 효과적으로 해석하였다.
- (2) MATLAB으로 제작된 본 프로그램을 이용하면, 해의 엄밀성을 위해 여러 개의 요소로 나누어야 하는 유한요소해석보다 훨씬 적은 요소(예제에서는 한개의 요소를 사용함)로 구조물의 지배방정식과 힘-변위 관계식

을 이용해 정확한 해를 구하였다.

- (3) 집중하중 및 등분포 하중에 대한 변위 및 응력 산정은 MATLAB을 이용한 프로그램과 상용프로그램인 SAP 2000의 결과를 비교함으로써 본 연구에 대한 타당성을 검증하였다.
- (4) 단면변형의 변위 및 응력을 산정하기 위한 방법으로 BEF 이론에서 제안된 바 있는 4계 미분방정식으로 구성된 지배방정식을 Eigen-Analysis를 이용하여 구함으로써, 엄밀한 강도행렬을 산정하고 이에 따른 변위를 구하고 변위에 따른 응력을 구하였다. 이는 단면변형의 변위 해석뿐만 아니라, 탄성지반 위에 놓인 보의 해석에서 축방향력, 등분포하중 및 집중하중과 같이 다양한 하중조건과 격벽이 있는 일반적인 강상자형 보의 해석에도 엄밀한 강도행렬을 통해 해석이 가능하다. 또한 지배방정식에 추가로 고려되는 항에 대해서도 식 (10)의 A와 B행렬에 쉽게 추가될 수 있는 장점이 있다.
- (5) 단면변형 이론의 근본적인 이해를 통해 박스형 구조물에서의 단면변형 효과에 의하여 단면에 작용하는 응력을 구하는 연구이다. 이에 유한요소프로그램에서는 각각의 응력별로 나누어 해석하여 확인할 수 없는 단면변형 응력에 대한 면밀한 분석으로 격벽의 강성 및 간격을 결정할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 학술진흥재단(E00511) 및 한국과학재단 2002 특정기초연구(R01-2002-000-00265-0)에 의해 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Wright, R.N., Abdel Samad, S.R., and Robinson, A.R., "BEF analogy for analysis of box girders", *Journal of Structural Division*, Vol.94, No.ST7, 1968, pp.1719~1743
2. Dabrowski, R., *Curved Thin-Walled Girders Theory and Analysis*, Cement and Concrete Association, 1968
3. Bazant, Z. P, El-Nimeiri, M., "Stiffness Method for Curved Box Girders at Initial Stress." *J. Structural Engineering*, ASCE, Vol.100, No.10, 1974, pp.2071~2090
4. Zhang, Z. G., "Research on basic behavior of concrete filled square steel tubular stub under eccentric load." *Journal of Building Structures*, Vol.10, No.6, 1989, pp.10~20

5. Maisel, B. I., "Analysis of Concrete Box Beams Using Small Computer Capacity." *Canadian Journal of Civil Engineering*, Vol.12, 1985, pp.265~278
6. Razaqpur, A.G., Li, H., "Thin-walled multicell box-girder finite element", *Journal of Structural Engineering*, Vol.117, No.10, 1991, pp.2953~2971
7. Razaqpur, A.G., Li, H.G., "Refined Analysis of Curved Thin-Walled Multicell Box Griders." *J. Computers and Structures*, Vol.53, No.1,1994, pp.131~142
8. Razaqpur, A.G., Li, H.G., "Analysis of Curved Multicell Box Girder Assemblages." *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.5, No.1, 1997, pp.33~49
9. Kang, Y.J, Park, N.H, Yi, G.S, "Distortional Analysis of Steel Box Girders.", *International Journal of steel structures*, Vol.2, No.1, 2002, pp.51~58
10. 방명석, "강교설계의 기초", 도서출판건설도서, 1993.
11. 정희효, "편심하중을 받는 상자형의 거동해석", 서울대학교 공학박사학위논문, 1986.
12. Hsu, Y.T., Fu, C.C, David, R.S "EBEF Method for Distortional Analysis of Steel Box Girder Bridges", *Journal of Structural Engineering*, Vol.121, No.3, 1995