

절점이동과 단항증가법에 의한 이차원 평면문제의 적응 유한요소 해석

Adaptive Finite Element Analysis of 2-D Plane Problems Using the rp-Method

임 장 근†

Lim, Jang-Keun

박 병 성*

Park, Byung-Sung

(논문접수일 : 2002년 7월 10일 ; 심사종료일 : 2004년 2월 16일)

요 지

최근, 유한요소해석결과의 신뢰도를 향상시키기 위하여 활발하게 연구되고 있는 적응유한요소해석은 반복계산을 통해서 해석결과의 오차가 사용자에게 의해 지정된 허용오차와 같아지도록 하는 해석방법이다. 이와 같은 적응유한요소해석은 해석결과의 오차평가와 이에 따른 유한요소의 재구성과정으로 나누어진다. rp방법에서는 절점의 위치를 이동시켜 요소의 크기를 조절하는 r방법과 형상함수차수를 증가시키는 p방법을 동시에 적용함으로써 적응해석의 유효성을 향상시키고자 하였다. 제안한 rp방법의 특성을 규명하고 적응해석의 유효성을 보이기 위하여 전형적인 이차원 평면문제들을 해석하고 그 결과를 검토하였다.

핵심용어 : 적응유한요소해석, 절점이동과 단항증가의 혼합법, 오차평가, 초 수렴점, 절점이동법, 단항증가법

Abstract

Adaptive finite element analysis, in which its solution error meets with the user defined allowable error, is recently used to improve the reliability of finite element analysis results. This adaptive analysis is composed of two procedures; one is the error estimation of an analysis result and the other is the reconstruction of finite elements. In the rp-method, an element size is controlled by relocating of nodal positions (r-method) and the order of an element shape function is determined by the hierarchical polynomial (p-method) corresponding to the element solution error by the enhanced SPR. In order to show the effectiveness and the accuracy of the suggested rp method, various numerical examples were analyzed and these analysis results were examined by comparing with those obtained by the existed methods.

Keywords : adaptive finite element analysis, rp-method, error estimation, SPR(super convergent patch recovery), super-convergent point, r-method, p-method

1. 서 론

유한요소법은 해석 영역을 유한 개의 요소들로 분할하여 근사해를 얻는 수치 해법이기 때문에, 요소 분할 방법과 요소의 구성 형태에 따라 해의 정확도가 좌우된다. 유한요소해석 결과가 실제 구조물의 설계 및 안전성 평가 등에 직접 응용될 때 유한요소해의 신뢰성 평가는 대단히 중요한 문

제이지만 일반적으로 엄밀해를 모르기 때문에 이의 평가는 현실적으로 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 유한요소 해석을 위한 최적의 요소망 구성과 오차 평가 문제를 병행하여 연구가 진행되어 왔다.

유한요소해의 오차를 평가하는 방법에는 여러가지가 있으나 Babuska등¹⁾이 제안한 잔여치 형태 (residual type) 와 Kelly등²⁾에 의한 후처리형태로 나누어 볼 수 있다. 그

† 책임저자, 정회원 · 한양대학교 기계공학부 교수
전화: 02-2290-0441 ; Fax: 02-2281-1869
E-mail : jklim@hanyang.ac.kr

* 현대 · 가아연구개발본부

• 이 논문에 대한 토론을 2004년 6월 30일까지 본 학회에 보내주
시면 2004년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

러나 잔여치 형태는 요소의 차수와 형상에 따라서 안정된 오차를 얻기가 어렵기 때문에 후처리 형태인 Zienkiewicz-Zhu의 Z^2 오차평가법³⁾을 주로 사용한다. Z^2 오차평가법은 절점응력을 계산하는 방법이 매우 중요하며 초기에는 단순평균화기법²⁾이 주로 사용되었으나, 이는 분할오차를 과소평가하여 적응해석에 어려움이 있다. 따라서 최근에는 SPR(superconvergent patch recovery)^{4)~9)}에 의한 절점응력을 계산하고 이로써 해석오차를 평가하는 방법이 사용된다. 해석자가 초기에 작성한 유한요소망(finite element mesh)을 재조정하는 방법에도 여러 가지가 연구되고 있다. 이 중 절점 이동법(r-method)¹⁰⁾은 최적 유한요소망을 구성하는 방법 중에서 가장 먼저 시도되었던 방법이다. 이 방법은 최적의 요소망 형성을 위해 초기 요소망의 절점 좌표를 수정하여, 해석 영역 내의 요소들을 동일한 이동 기준에 따라 크기를 조절하는 방법이다. 이 방법은 초기에 주어진 총 자유도 수를 일정하게 유지할 수 있다는 장점이 있으나, 사용자가 원하는 정확도의 해석 결과를 얻기에는 한계가 있다. 계의 자유도를 증가 시켜 유한요소해의 정확도를 향상시키는 방법으로 요소 세분법(h-method)²⁾과 단항 증가법(p-method)^{11), 12)}이 연구되었다. 요소 세분법은 분할 오차가 크게 평가된 요소들을 보다 작은 요소들로 세분함으로써 해의 정확도를 향상시키는 방법이다.

이 방법은 사용자가 원하는 정확도를 지정하고 이에 부합하는 해석 결과를 얻을 수 있으나, 요소의 세분으로 인하여 자유도가 급격히 증가하기 때문에 계산시간이 오래 걸리고 적응 해석 알고리즘이 복잡해진다. 단항 증가법은 계층적 형상 함수가 도입됨에 따라서 다항식의 차수를 증가시키기가 용이해졌으며, 자유도 증가로 인한 해의 수렴 속도가 요소 세분법보다 훨씬 빠른 장점이 있다.

본 논문에서는 오차평가와 적응해석을 효과적으로 수행하고자 향상된 SPR(enhanced super-convergent patch recovery)^{6)~9)}을 도입하여 해석 오차를 평가하고 요소망을 재구성하는 방법으로 절점이동과 단항증가법을 혼합한 rp법을 제안하고자 한다. 제안한 rp법의 유효성과 정확도를 평가하기 위하여 여러 가지 전형적인 수치 예제를 해석하고 그 결과를 비교 검토하고자 한다.

2. 오차 평가법

2.1 응력 오차

유한요소 해석의 결과로 얻어지는 요소의 응력값은 다음과 같이 표현할 수 있다.^{1), 2)}

$$\sigma^h = (DSM) \bar{u} \quad (1)$$

단, \bar{u} 는 요소의 절점변위이고 D, S, N 은 각각 구성행렬, 미분연산행렬, 변위의 형상함수행렬을 의미한다. 이때, 유한요소해인 σ^h 는 엄밀해(exact solution)인 $\bar{\sigma}$ 와 차이가 생기게 되며, 이 값을 응력 오차로 정의하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e_\sigma = \bar{\sigma} - \sigma^h \quad (2)$$

그러나 응력의 엄밀해는 일반적으로 알 수 없기 때문에 다음의 근사식을 사용한다.

$$\bar{\sigma} \approx N_\sigma \sigma^* \quad (3)$$

식 (3)에서 N_σ 는 변위의 형상 함수 행렬 N 을 응력분포에 도입한 응력에 대한 보간 함수 행렬이고 σ^* 는 요소의 절점응력이 된다. 결과적으로 요소의 응력오차 e_σ 는 절점응력 σ^* 의 정확도에 좌우되기 때문에 이를 구하는 방법이 매우 중요하다. 개선된 해(improved solution)로서 절점응력 σ^* 는 몇가지 후처리 과정이나 회복과정(recovering procedures)에 의해서 구해진다. 후처리 과정으로 흔히 사용해 오던 단순평균화기법(simple averaging technique)²⁾은 유한요소해의 영향을 직접 받기 때문에 분할오차를 과소 평가하게 된다. 최근, Zienkiewicz-Zhu^{4), 5)}에 의하여 제안된 SPR(super-convergent patch recovery)은 개선된 해를 보다 정확하게 얻기 위한 회복방법이다. 이 방법은 한 절점을 공유하고있는 요소들로서 하나의 패치(patch)를 구성하고 이 패치내에서 응력을 요소의 형상함수보다 높은 차수의 다항식으로 설정한 다음 응력값이 초수렴점(super-convergent point)에서의 유한요소해와 같아지도록 최소사승법(least square method)을 써서 미정계수를 결정한다. 즉, 한 절점의 패치내에서 응력 σ 는 다음과 같은 다항식 형태로 분포된다고 가정한다.

$$\sigma = P(x)a \quad (4)$$

식 (4)에서 a 는 미정계수 벡터이고 $P(x)$ 는 x 의 오름차순으로 정의되는 단항(monomials)들의 행렬이다. 예를 들어 이차원 평면문제에서 $P(x)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$P_i = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2 \dots], \ i=1,2,3 \quad (6)$$

식 (6)의 다항식 P_i 는 패치내에서 응력성분의 분포를 나타낸다. 식 (4)의 미정계수 a 는 이 패치를 구성하는 요소내에서 초수렴점으로 알려진 가우스 적분점에서 유한요소해인 σ^h 와 같아지도록 다음과 같은 응력오차의 크기 (norm) Π 를 정의한다.

$$\Pi = \sum_{i=1}^m (P(x_i)a - \sigma^h(x_i))^T (P(x_i)a - \sigma^h(x_i)) \quad (7)$$

식 (7)에서 m 은 패치내의 가우스적분점 x_i 의 갯수이다. 이제 식 (7)을 미정계수 a 에 관하여 최소화 시키면

$$Aa = b \quad (8)$$

$$A = \sum_{i=1}^m P^T(x_i)P(x_i) \quad (9)$$

$$b = \sum_{i=1}^m P^T(x_i)\sigma^h(x_i) \quad (10)$$

가 되어 식 (8)에서 미계수 a 를 구할 수있다. 이와 같이 a 가 구해지면 절점응력 σ^* 는 식 (4)에서

$$\sigma^* = \sigma(x_j) = P(x_j)a \quad (11)$$

로써 구한다. 단, x_j 는 j 절점패치에서 j 절점의 위치이다.

이상과 같이 절점응력 σ^* 의 개선된 해를 구하는 SPR은 해석모델의 내부절점에 대해서는 비교적 정확한 값을 구할 수 있으나 경계상의 절점에 관해서는 패치영역이 상대적으로 좁기 때문에 그 해의 정확도가 떨어진다. 이와 같은 문제는 Wiberg등^{6), 7)}이 제안한 트렉션 경계조건의 잔여치자승항을 식 (7)에 추가함으로써 다소 개선된다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{i=1}^m (P(x_i)a - \sigma^T(x_i))^T (P(x_i)a - \sigma^h(x_i)) \\ & + \int_{\Gamma} (Q(x)P(x)a - \bar{t}(x))^T (Q(x)P(x)a - \bar{t}(x))d\Gamma \quad (12) \end{aligned}$$

식 (12)에서, $Q(x)$ 는 경계에서의 방향여현 n_x, n_y 의 행렬로서 다음과 같이 표현된다.

$$[Q(x)] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (13)$$

Blacker등⁸⁾은 식 (3)으로 표현된 요소내의 개선된 응

력 분포식을 공동 다항식(conjoint polynomial)을 도입하여 다음과 같이 수정하는 방법을 제안하였다.

$$\bar{\sigma} = N_{\sigma}P(x)a \quad (14)$$

식 (14)의 의미는 절점응력 σ^* 를 식 (11)과 같이 미리 계산하여 식 (3)에 대입하는 것보다는 식(4)를 그대로 사용하는 것이 보다 정확한 오차평가를 얻을 수 있다는 것이다. 그 이유는 식 (3)과 식 (14)는 절점에서 동일한 보간 특성을 가지고 있지만 함수의 차수가 식 (3)보다 식 (14)가 고차로 표현되어 부드러운 분포특성을 보이고 요소의 분할오차는 이를 요소내에서 적분하여 얻기 때문이다.

2.2 요소의 분할오차

위에서 표현한 응력 오차에 대하여 오차에너지(error energy)를 구하고 이들 값을 요소 내에서 적분하여, 그 값을 요소의 분할 오차로 정의하면 탄성 문제에 대하여 다음과 같이 표현 할 수 있다.^{2)~6)}

$$\|e\|_e \cong \int_{\Omega} e^T D^{-1} e d\Omega \quad (15)$$

단, 첨자 e 는 유한요소를 의미하고 식 (15)로 표현한 오차의 크기를 각 요소에 대하여 구한 다음에 계 전체의 해석 오차는 다음과 같이 그 값을 평균하여 얻어진다.

$$e_i = \frac{1}{M} \sum_{e=1}^M \|e\|_e \quad (16)$$

식 (16)에서 M 은 전체 요소 갯수이기 때문에 e_i 는 계의 평균 해석 오차를 의미한다. 적용 해석의 반복 계산은 위에서 구한 전체 평균오차가 허용 오차보다 작아지도록 수행한다.

$$e_i \leq e_{all} \quad (17)$$

단, e_{all} 은 사용자가 지정한 허용 오차이다.

3. 요소망의 재구성 방안

3.1 절점 이동법 (r-method)

유한요소법으로 해석한 결과에 대하여 요소별로 응력 오차의 값을 구할 때, 이 오차 값을 모든 요소에 균일하게 분

포하도록 요소를 구성하게 되면 이때의 요소 분할은 가장 합리적이고 최적으로 분할된 상태라고 생각할 수 있다.^{1), 2)} 이와 같은 요소망의 구성을 합리화 하기위해 각 요소의 크기를 어느 정도로 조정하여야 하는가를 판단하기 위한 요소 크기의 재조정 계수를 다음과 같이 정의한다.

$$\xi_e \equiv \left[K \frac{\|e\|_e}{e_{all} \|u^*\|} \left(\frac{\Omega}{\Omega_e} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{1/\phi_e} \quad (18)$$

식 (18)에서 $\|u^*\|$ 는 계전체의 변형률에너지이고 K 는 수렴을 위한 여유계수(allowance)로 통상 이차원 문제에서는 1.2를 사용하며 Ω , Ω_e 는 계전체 및 요소의 면적을 의미한다. 또한 ϕ_e 는 형상함수의 차수 p 와 요소의 특이성 λ 의 합수로 다음과 같이 결정된다.⁹⁾

즉 요소의 에너지 집중계수 Ψ^e 를

$$\Psi^e \equiv \frac{\|u\|_e}{\|u^*\|} \left(\frac{\Omega}{\Omega_e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

로 정의하고¹²⁾ 이 계수의 값이 최대가 되는 요소에서는

$$\phi_e = \lambda = 0.5 \quad (20)$$

로 두고 평균치이하가 되는 요소에서는 형상함수의 차수 p 와

$$\phi_e = p \quad (21)$$

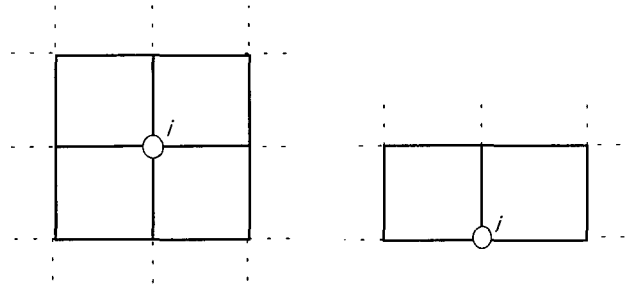
의 관계를 갖도록 한다. 요소에서 에너지 집중계수 Ψ^e 가 평균치보다 크고 최대치보다 작은 값에서는 0.5와 p 의 선형보간값으로 결정한다. 한편, 식 (18)에서 $\xi_e \geq 1$ 인 요소에 대해서는 이 요소에 할당된 절점의 위치를 조정하여 요소의 크기를 작게 하여야 하고, $\xi_e < 1$ 이면 좀 더 크게 조정되어야 함을 의미한다. 이때 새롭게 조정할 절점의 위치는 그림 1과 같이 해석 절점이 해석 영역의 내부에 있는 경우와 경계에 있는 경우로 나누어 생각한다.

그림 1(a)과 같이 이동시키고자 하는 절점 i 가 해석 영역의 내부에 위치하고 있는 경우는 식 (22)와 같이 절점좌표를 이동시켜 나타낼 수 있다.

$$x_i = \sum_{e=1}^m \bar{x}_e \left(\frac{\xi_e}{\Omega_e} \right) / \sum_{e=1}^m \left(\frac{\xi_e}{\Omega_e} \right) \quad (22)$$

단, 식 (22)에서 \bar{x}_e 는 e 요소의 도심좌표를 의미하고

m 은 i 절점을 공유하는 요소의 갯수이다. 그리고 그림 1(b)과 같이 이동하고자 하는 절점이 해석 영역의 경계에 위치하고 있는 경우는 절점이 주어진 경계선을 따라 이동되어야 하므로 다음과 같은 2차 등매개 사상 함수를 도입하여 절점의 좌표를 이동시킨다.



(a) Node in the domain (b) Node on the boundary nodal patch and node relocation scheme

그림 1 Condition of nodal location

$$(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^3 f_j(\eta) \cdot (\bar{x}_j, \bar{y}_j)$$

$$f_1(\eta) = -\frac{1}{2} \eta(1-\eta)$$

$$f_2(\eta) = 1 - \eta^2 \quad (23a)$$

$$f_3(\eta) = \frac{1}{2} \eta(1+\eta)$$

$$\eta = \left(-\frac{\xi_1}{\Omega} + \frac{\xi_2}{\Omega} \right) / \left(\frac{\xi_1}{\Omega} + \frac{\xi_2}{\Omega} \right) \quad (23b)$$

여기서 \bar{x}_j, \bar{y}_j 는 e 요소의 4개의 변 중에서 해석 영역 경계에 위치한 변의 중심좌표를 의미한다.

3.2 단항 증가법 (p-method)

3.2.1 계층형상함수 (hierarchical shape function)

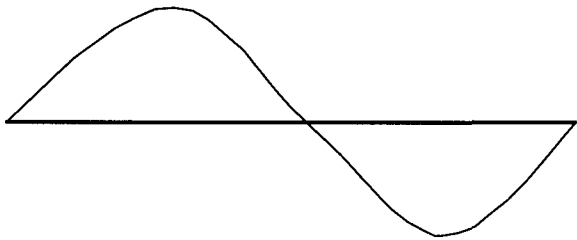
유한요소 내의 변위 분포를 가정할 때 오차를 줄이기 위하여 형상함수의 차수를 증가시킨다. 이 때 일반적인 다항식으로 차수를 증가 시키면 형상 함수 구성과 행렬식의 연산 등에 복잡한 계산이 따르기 때문에 이와 같은 어려움을 덜기 위하여 통상적으로 계층 함수를 도입한다. 이 계층 함수는 다음과 같은 Rodrigue의 다항식에서 유도된다^{11), 12)}

$$P(\xi) = \frac{1}{(n-1)! 2^{n-1}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (1-\xi^2)^n, n \geq 1 \quad (24)$$

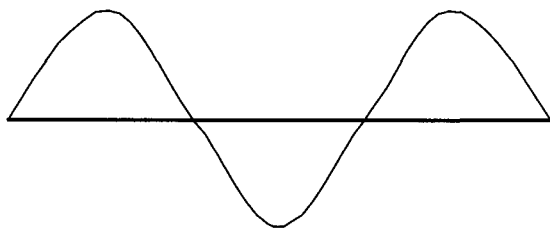
식 (24)를 이용한 계층 형상 함수는 $n = 1, 2, 3 \dots$ 에 대하여



(a) h_1 (quadratic function)



(b) h_2 (cubic function)



(c) h_3 (quartic function)

그림 2 Distribution modes for the hierarchical shape functions.

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 - t^2 \\ h_2 &= t(1 - t^2) \\ h_3 &= 1 - 6t^2 + 5t^4 \end{aligned} \quad (25)$$

로 구할 수 있다. 식 (25)에서 t 는 매개변수로서 $-1 \leq t \leq 1$ 의 범위를 가지며, 요소의 형상 함수에서 사용되

는 무차원 좌표계 ξ, η 중에서 변에 따라 설정되는 임의 값을 의미한다. 식 (25)로 표현되는 계층 형상 함수는 요소의 변에서 그림 2와 같이 2차, 3차, 4차식의 변위 분포를 설정하는데 사용된다.

3.2.2 변위 분포식

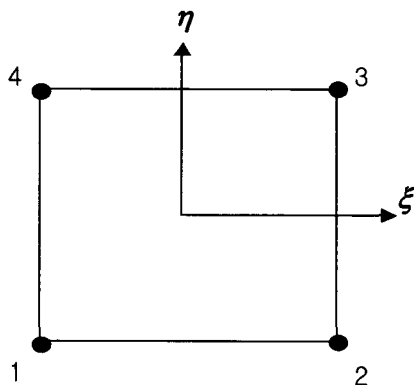
이차원 평면문제를 해석하기 위한 사변형 선형 요소에서 변위 벡터 u 는 다음과 같이 표현된다.

$$u = Nd = [N_b \quad N_h] \begin{Bmatrix} d_b \\ d_h \end{Bmatrix} \quad (26)$$

식 (26)에서 벡터 u 는 $u^T = [u \quad v]$ 이고, d_b 는 요소의 기본 절점변위로 4절점 사변형 요소에서는 $[u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T$ 로 나타내며, d_h 는 계층 형상 함수로 추가되는 계층 변수(hierarchical parameters) 벡터로서 $[\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \dots]^T$ 가 된다. 형상 함수 N 은 N_b 와 N_h 로 분할될 때 N_b 는 절점 변위에 해당되는 기본 형상 함수이고 N_h 는 계층 형상 함수 행렬로 다음과 같이 표현된다.

$$N_h = \begin{bmatrix} f_0 h_1 & 0 & f_0 h_2 & 0 & f_0 h_3 & 0 & \dots \\ 0 & f_0 h_1 & 0 & f_0 h_2 & 0 & f_0 h_3 & \dots \end{bmatrix} \quad (27)$$

식 (27)로 표현된 계층 형상 함수는 요소의 변에서 정의 되기 때문에 그림 3과 같이 사변형 요소를 사용하면 어느 변에 계층 형상 함수가 사용되느냐에 따라서 f_0, h_i ($i = 1, 2, 3$)가 다르게 정의되고, 차수가 1차에서 3차까지 변환에 따라서 행렬식 N_h 의 크기가 달라진다. 이들 관계를 정리하면 그림 4와 표 1과 같다.



$$f_0 = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \eta) & \text{at side 12} \\ \frac{1}{2}(1 + \xi) & \text{at side 23} \\ \frac{1}{2}(1 + \eta) & \text{at side 34} \\ \frac{1}{2}(1 - \xi) & \text{at side 41} \end{cases}$$

그림 3 4 node quadrilateral isoparametric element and f_0 functions

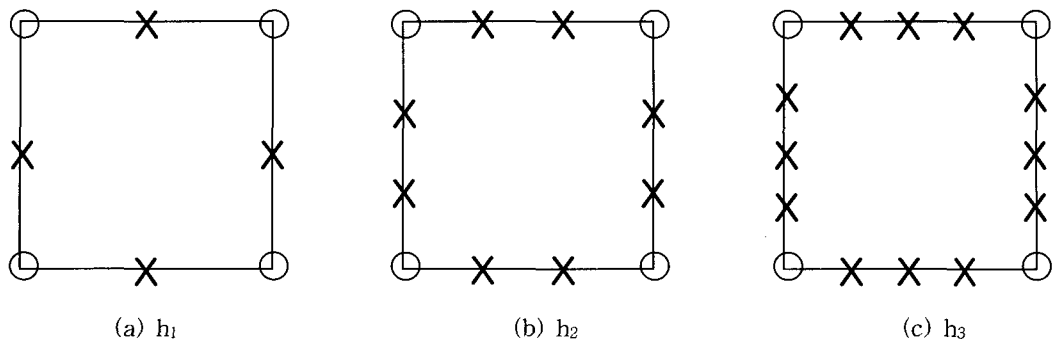


그림 4 Position of the basic nodes and hierachical nodes according to the p-method procedure. (O:basic nodes, X:hierarchical nodes)

표 1 Hierarchical shape functions of a quadrilateral element.

step	side12 side34	side23 side41
h ₁	1 - ζ ²	1 - η ²
h ₂	ζ(1 - ζ ²)	η(1 - η ²)
h ₃	1 - 6ζ ² + 5ζ ⁴	1 - 6η ² + 5η ⁴

3.2.3 단항 증가법의 해법

단항 증가법을 사용하면 초기 모델의 절점 자유도에 계층변수 자유도가 추가되어 자유도의 수가 늘어나고 자유도가 많아짐에 따라, 일반적인 강성행렬의 역행렬 연산이 복잡해 지게 된다. 이 때 계산의 편리를 위하여 다음과 같은 방법으로 전체계 방정식의 강성 행렬을 분할 하고 반복법에 의하여 해를 구한다.¹¹⁾ 초기의 유한요소 모델의 기본자유도에 관한 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[K_{bb}]\{d_b\} = \{f_b\} \quad (28)$$

식 (28)에서 첨자 b는 기본 절점에 관한 자유도를 의미한다. 위의 식으로 정확도가 기대값 보다 낮다고 판단될 때 요소의 계층 모드를 높여 정확도를 향상시키게 되며, 이러한 과정은 초기 유한요소의 강성 행렬에서 행과 열이 추가됨을 뜻하고 추가된 부분에 대하여 재조정한계의 방정식은 다음과 같이 분할된다.

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bh} \\ K_{hb} & K_{hh} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_b \\ d_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_b \\ f_h \end{bmatrix} \quad (29)$$

식 (29)에서 첨자 h는 계층 형상 함수로 인하여 추가된

자유도를 의미하고 K_{hh} , d_h , f_h 는 이에 따른 강성행렬, 계층 변수자유도와 힘을 표시한다. 식(29)를 전개하면,

$$[K_{bb}]\{d_b\} = \{f_b\} - [K_{bh}]\{d_h\} \quad (30a)$$

$$[K_{hh}]\{d_h\} = \{f_h\} - [K_{hb}]\{d_b\} \quad (30b)$$

로 되고 식 (30)이 반복해를 구하는 기본식이 된다. 즉 식 (30a)에서 초기 d_h 를 {0}으로 가정하고 d_b 를 구한다음 이를 식 (30b)에 대입하여 d_h 를 구하고 이 값을 다시 식 (30a)에 대입하여 d_b 를 구한다. 이와 같은 과정은 d_b 의 오차가 10^{-7} 에 이를 때 까지 반복 계산한다.

3.3 적응 해석법

적응 해석은 사용자가 초기에 설정한 허용 오차에 대하여 해석 결과의 오차를 평가하고 유한요소를 재조정하여 해석 오차가 허용 오차 보다 작아질 때까지 반복하여 해석하는 방법이다. 그림 5는 유한요소법에서 적응 해석을 수행하는 흐름도이다. 사용자는 초기에 허용 오차를 지정하고 개략적인 요소 분할로써 유한요소 해석을 수행한다.

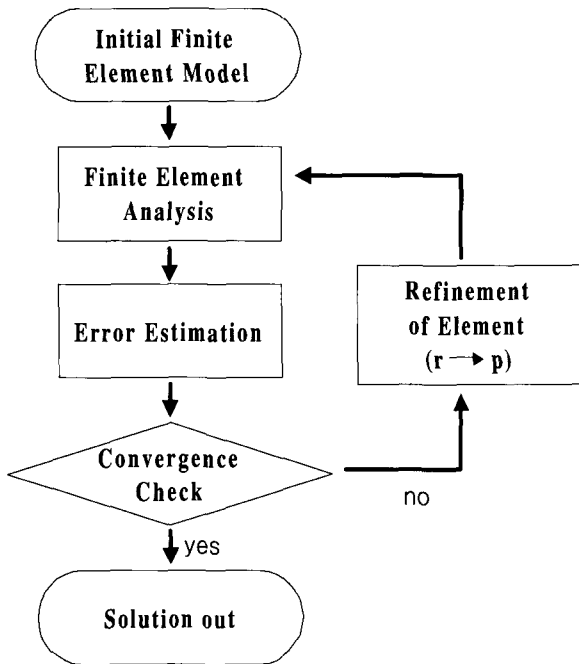


그림 5 Adaptive analysis procedure using-r-p method.

이와 같은 유한요소 해석 결과의 오차를 평가하고 이 오차가 큰 요소는 요소 크기가 작아지도록 그리고 오차가 작은 요소는 요소 크기가 커지도록 절점 이동법(r-method)으로 요소 크기를 조정 한 다음에 단항 증가법(p-method)이 수행된다. 단항 증가법에 서는 오차가 큰 요소에서부터 계층 형상 함수의 차수를 증가시켜가며 해석하고 오차를 평가하여 전체 오차의 평균치가 허용 오차보다 작아질 때까지 요소의 크기와 형상 함수의 차수를 조정하면서 해석을 반복 수행한다.

4. 수치예제 및검토

제안한 rp법의 유효성을 규명하기 위하여 여러 가지 수치 예제를 해석하였으며 그 결과를 r방법, p방법 및 rp법으로 구분하여 비교 검토한다.

4.1 외팔보

그림 6은 집중하중 P를 받는 외팔보 모델이다. 모델을 14개의 사각형 요소로 구성하였으며 rp 법으로 해석 한 결과와 r방법, p방법에 의한 결과를 비교하였다. 집중하중을 가한 외팔보의 최대 처짐에 대한 엄밀해는 아래의 식으로 얻을 수 있다.

$$V_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \tag{31}$$

r 해석과 rp 해석을 하기 이전과 이후의 유한 요소의 형상을 비교하면 그림 7과 같다. 응력 구배가 커지는 고정단 쪽에 요소의 크기가 작아지도록 절점이 이동함을 그림 7을 통하여 볼 수 있고, 또한 단항증가법의 계층형상함수 차수가 증가함을 알 수 있다.

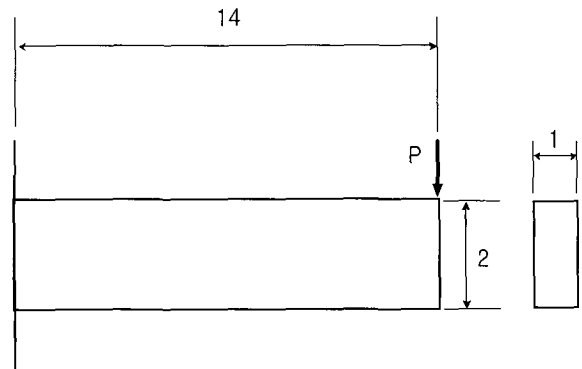
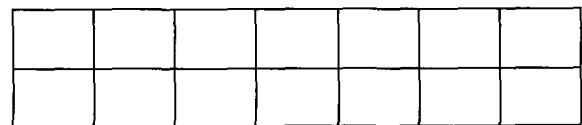
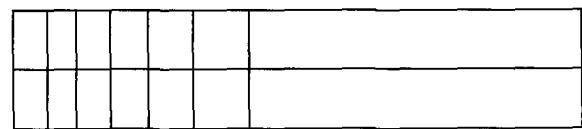


그림 6 cantilever beam under uniformly distributed loads.



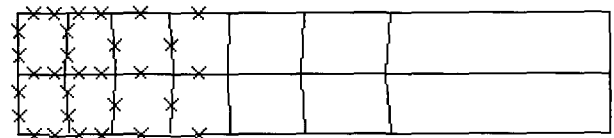
(a) Initial model



(b) r-model



(c) p-model



(d) rp-model

그림 7 Mesh shapes of initial, r-, p-, and rp-models of the cantilever

표 2는 외팔보의 최대 처짐량과 최대 응력을 엄밀해로 무차원화하여 각 방법에 대하여 비교한 것이다. 각 방법의 정확도와 유효성을 검토하기 위하여 반복 계산 횟수를 모두 5번으로 제안하였으며, 먼저 최대 처짐량을 비교해 볼

때, r 방법에 비하여 p방법의 경우가 더 엄밀해와 근접하고 있음을 알 수 있고, p방법과 rp방법은 거의 비슷한 정확도로 수렴함을 알 수 있다. 그리고, 최대 응력에 있어서는 일반유한요소법을 사용한 해석값을 제외하고는 모두 비슷한 값을 가진다.

표 2 Normalized maximum displacement and stress of the cantilever according to the various adaptive analysis

Adaptive analysis	V_{max} / V_{exact}	$\sigma_{x_max} / \sigma_{x_exact}$
Initial method	0.715	0.709
r-method	0.745	0.944
p-method	1.007	1.019
rp-method	0.98	1.019

4.2 L형 평판

그림 8은 한쪽 면에 분포 하중을 받고 있는 고정 L형 평판이다. 그림 9는 r과 rp방법으로 해석을 한 이후의 유한요소의 형상을 도시한 것이다. 그림 9(b)와 그림 9(c)에 보듯이 절점좌표의 이동이 있음을 알 수 있다. 이는 응력집중 때문에 나타나는 현상이다.

여러 가지 적응해석 방법에 대하여 엄밀해³⁾와 x 방향의 최대 변위를 무차원화하여 비교한 결과는 표 3과 같다. 정확도와 유효성을 비교하기 위하여 반복 계산 횟수는 5번으로 제한하였으며, rp법의 경우가 엄밀해와 가장 근사한 값을 나타내고 있음을 볼 수 있다.

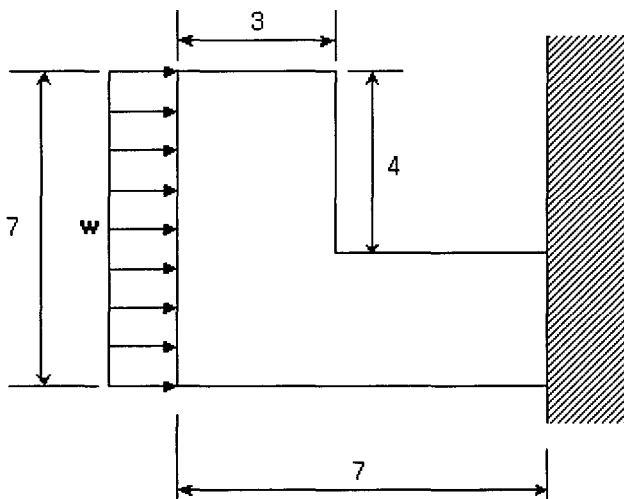
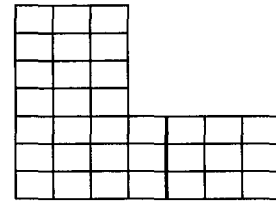
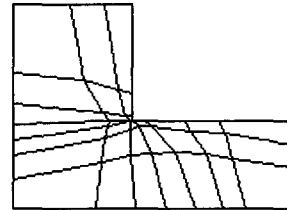


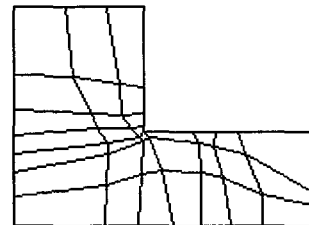
그림 8 L shaped plate under uniformly distributed loads.



(a) Initial model



(b) r-model



(c) rp-model

그림 9 Mesh shapes of the initial model and r-, rp-models of the L-shaped plate.

표 3 Normalized maximum displacement of the L-shape plate according to the various adaptive analysis

Adaptive analysis	u_{max} / u_{exact}
Initial method	0.764
r- method	0.818
p- method	1.090
rp- method	0.968

5. 결 론

이차원 평면 유한요소 해석에 대하여 해석 오차를 평가하고 이를 기준하여 유한요소를 재조정하여 해석하는 적응해석법에 대하여 연구하였다. 절점 이동법인 r방법과 단항증가법인 p방법을 혼합한 rp법을 제안하고, r방법과 p방법을 각각 독립적으로 사용한 결과와 비교 검토하여 다음의 결론을 얻었다.

1. 새롭게 수정된 SPR 법은 p방식에 의한 해석결과와 오차를 적절하게 평가한다.

2. rp법으로 r방법과 p방법을 각각 사용했을 때의 문제점이 개선 됨을 알 수 있었다.
3. rp 방법은 r방법의 수렴단계를 조절하거나 p 방법의 차수를 낮추어 적응해석의 수렴특성을 조정할 수 있기 때문에 매우 효과적인 적응해석기법이다.

참 고 문 헌

1. Babuska I. And Rheinboldt W. C. , "A Posteriori Error Estimates of the Finite Element Method", *Internatinal Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12 , 1978, pp.1597~1615
2. Kelly D. W. , Gago J. P. de SiR. , Zienkiewicz O. C. and Babuska I. , "A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method ; part 1. Error Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19 1983, pp.1593~1619
3. Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. , 1987 , "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Enginnering*, Vol. 24, pp.333~357
4. Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. , "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Estimates. Part 1. The Recovery Technique", *Internatinal Journal for Numerical Methods in Engineering* , Vol. 33, 1992, pp.1331~1364
5. Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z. , "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Estimates. Part 2. Error Estimates and Adaptivity", *Internatinal Journal for Numerical Methods in Engineering* , Vol. 33, 1992, pp.1365~1382
6. Wiberg N-E. and Abdulwahab F. , "Patch Recovery Based on Superconvergent Derivatives and Equilibrium", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , Vol. 36, 1993, pp. 2703~2724
7. Wiberg N-E. and Abdulwahab F. , "Error Estimation with Post Processed FE-Solutions", *Advances in Post and Preprocessing for Finite Element Technology*, CIVIL-COMP Ltd, Edinburgh , Scotland, 1994, pp.1~22
8. Blacker T. and Belytshko T. , "Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* , Vol. 37, 1994, pp.517~536
9. Li X. D. and Wiberg N-E. , "A Posteriori Error Estimate by Element Patch Post-processing, Adaptive Analysis in Energy and L2 Norms", *Computers & Structures*, Vol. 53, No. 4, 1994, pp.907~919
10. Oh H. S. and Lim J. K. , "Modified r-method for the Finite Element Adaptive Analysis of Plane Elastic Problem", *KSME International Journal* , Vol. 10, 1996, pp.190~202
11. Zienkiewicz O. C. and Kelly D. W., "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 16, 1983, pp.53~65
12. Robinson J., "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, 1986, pp.377~388