

4기 크레인을 이용한 선체블록의 인양력 해석

최경식^{†*}, 김동준^{**}

한국해양대학교 해양개발공학부*
부경대학교 조선해양시스템공학과**

Lifting Analysis for Ship Hull Blocks using 4 Cranes

Kyungsik Choi^{†*} and Dong-Joon Kim^{**}

Div. of Ocean Development Engineering, Korea Maritime University*
Dept. of Naval Architecture and Marine Systems Engineering, Pukyong National University**

Abstract

This study focuses on an analytical approach to calculate four crane lifting forces for heavy ship hull blocks considering elongations of lifting slings. Four-crane-lifting is a redundant problem. During lifting procedures, in addition to the force and moment equilibrium equations, a compatibility condition is introduced to determine 4 unknown lifting forces. For verification of the method, a ship hull block with field measurements data is analyzed and the result shows that the information obtained by current method could be useful to engineers to conduct lifting work at shipyards.

※Keywords: Four cranes (4기 크레인), Block lifting (블록 인양), Statically indeterminate problem (부정정 문제), Inclination of hull block (선체블록의 경사)

1. 서 론

선박건조 시 생산성 향상과 공기 단축을 위해 선체블록을 대형화하고 도크에서 탑재하기 전에 가능한 많은 의장품 부착공사를 지상에서 수행하려는 추세이다. 이는 선대 위에서의 고소작업을 피할 수 있고 도크 회전율도 증대시킬 수 있기 때

문이다. 그러나 이를 위해서는 대형화된 선체블록을 한꺼번에 들어올려 탑재할 수 있는 대형 크레인 설비가 필수적이다. 조선소 현장에 대형 선체블록을 인양할 수 있는 골리앗 크레인과 같은 설비가 준비되어 있다면 관계없으나, 그렇지 못할 경우에는 보다 작은 용량의 크레인을 적절히 조합하여 블록을 들어올리게 된다. 일반적으로 중소형 조선소에서는 블록의 중량에 따라 크레인을 1기에서 4기까지 조합하여 사용하고 있는데 크레인의 조합으로 들어올릴 수 있는 블록의 최대 중량은 크레인을 3기까지 사용하는 것을 설계기준으로 상

접수일: 2003년 5월 12일, 승인일: 2004년 1월 31일

† 주저자, E-mail: kchoi@mail.hhu.ac.kr

Tel:051-410-4324

고 있다. 하지만 개별 크레인의 인양능력이 부족하거나 도크 주변의 크레인 배치상 3기만으로 블록 인양이 어려운 중소형 조선소에서는 대중량 선체블록을 4기 크레인을 사용하여 인양해야 하는 경우가 종종 발생하고 있는데 이 경우 실제로 현장에서 활용하고 있으면서도 설계 가이드라인이 없기 때문에 위험을 감수해야 하는 등 어려움이 있다.

각 크레인에 걸리는 하중은 크레인이 3기까지 배치되었을 경우 정역학적으로 해석 가능하지만, 4기 크레인의 경우 추가적으로 블록과 크레인 로프 사이의 적합조건을 사용하지 않으면 미지수의 개수(4)보다 방정식의 수(3)가 적은 부정정 문제를 풀 수 없다 (Crandall et al. 1978). 본 연구에서는 중소형 조선소 현장에서의 4기 크레인에 의한 대중량 블록의 인양력 문제를 해결하기 위하여, 추가 적합조건으로 크레인 로프의 인장변형을 포함시켜 푸는 방법을 제시하였다. 그리고 이 방법을 블록 인양 및 이동시 발생할 수 있는 선체블록 경사에 의한 크레인 로프 인양력의 변화를 구하는데 적용하였다 (최경석/ 김동준 2000).

2. 4기 크레인에 의한 인양력 해석

일반적으로 선체블록의 크레인 인양작업에서 중요한 문제는 블록의 무게중심과 인양 러그(lug)가 부착되는 위치의 선정이다(함주혁 2001). 본 연구에서는 먼저 정역학적 조건을 이용하여 크레인의 인양력을 추정하는 과정을 설명한 뒤, 나머지 1개의 잉여 미지력을 결정하기 위해 크레인 로프의 신장률을 고려하여 계산하는 과정을 설명하기로 한다. 여기서 블록은 자체 변형이 없는 강체로 이상화하였다.

2.1 평행방정식의 구성

블록의 경사나 회전에 의해서 무게중심의 위치가 달라지기 때문에 높이를 무시할 수 없는 중량물을 다룰 때는 경사 및 회전효과가 두드러지게 나타난다. 여러 대의 크레인을 이용하여 선체블록을 들어올릴 때 바람 등에 의해 크레인 자체나 크레인 붐(boom)이 움직이는 영향을 무시하더라도,

각 크레인 사이의 상대적인 조종의 차이에 의해 인양력에 불균형이 발생하게 되며 블록은 수평상태를 유지하지 못하고 경사가 발생한다.

일반적으로 3차원 직각좌표계에서 좌표계의 회전은 다음 식으로 표현된다.

$$x'_i = \alpha_{ij}x_j \tag{1}$$

여기서

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk} \tag{2}$$

(1)식의 α_{ij} 는 9개의 방향여현 (directional cosines)이다. 오일러 회전각 ψ , θ , ϕ 를 x , y , z 좌표축에 관한 회전행렬의 곱으로 표현하면 다음과 같다.

$$R = R_x(\psi) R_y(\theta) R_z(\phi) \tag{3}$$

여기서

$$R_x(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

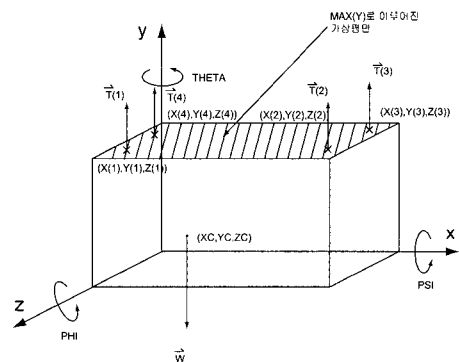


Fig. 1 Rotation of axes

인양물체를 들어올리는 4기 크레인 로프의 인장력 및 그 인양력점의 위치를 각각 \vec{T}_a , \vec{r}_a

($\alpha = 1, 2, 3, 4$), 인양물체의 중량 및 그 중심 위치를 \vec{W} , \vec{r}_c 라 하면 정적 평형조건식은 아래와 같이 수직방향(y축) 힘에 대한 평형방정식 하나와 x축과 z축 방향의 회전에 대한 모멘트의 평형방정식 두 개로 구성된다.

$$\vec{W} + \sum_{\alpha} \vec{T}_a = \vec{0} \tag{5}$$

$$\vec{r}_c \times \vec{W} + \sum_{\alpha} \vec{r}_a \times \vec{T}_a = \vec{0} \tag{6}$$

여기서

$$\begin{aligned} \vec{W} &= -W\hat{j}, \quad \vec{T}_a = T_a\hat{j} \\ \vec{r}_c &= x_c\hat{i} + y_c\hat{j} + z_c\hat{k}, \\ \vec{r}_a &= x_a\hat{i} + y_a\hat{j} + z_a\hat{k} \end{aligned} \tag{7}$$

일정한 각도 경사진 블록의 평형을 고려하려면 (6)식에서 인장력을 가할 위치와 무게중심의 위치를 각각 \vec{r}'_c 와 \vec{r}'_a 대신에 회전변환 후의 위치벡터 \vec{r}'_c 과 \vec{r}'_a 로 대체하면 된다. 이 때 회전변환식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{r}'_a &= R \vec{r}_a \quad \vec{r}'_c = R \vec{r}_c \\ \text{여기서} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\vec{r}'_a = \begin{Bmatrix} x'_a \\ y'_a \\ z'_a \end{Bmatrix}, \quad \vec{r}'_c = \begin{Bmatrix} x'_c \\ y'_c \\ z'_c \end{Bmatrix} \tag{9}$$

선체블록의 인양작업이 이루어지기 전에 블록의 어느 위치를 얼마만한 인양력으로 들어올릴 것인가를 결정하는 일은 매우 중요하다. 특히 인양중인 블록이 기울어짐에 따라 로프의 인장력이 크게 변동할 수 있으므로 크레인의 안전을 위한 작업 가이드라인을 제시할 필요가 있다.

2.2 크레인 로프 신장을 고려한 인양력 해석

4기 크레인의 인장력 계산은 정역학적으로 결정할 수 없는 부정정 문제인데 이를 해결하기 위해서는 앞서의 힘과 모멘트 평형조건식 3개 이외에 하나의 조건이 더 필요한데 이것은 크레인 로프의 인장변형을 고려하는 적합조건을 도입하여

해결할 수 있다.

여기서 크레인 로프의 길이를 l , 로프의 인장력을 T 라 하면 로프의 신장량 δ 은 다음과 같이 계산된다. EA 는 로프의 강성을 나타낸다.

$$\delta = \frac{TL}{EA} \tag{10}$$

바닥에서 크레인 붐 끝까지의 높이 H 는

$$\begin{aligned} H &= l + \delta + h \\ h &= a + y'' \\ y'' &= y' - \delta \end{aligned} \tag{11}$$

여기서

h 는 바닥에서 블록 위 러그 위치까지의 거리
 a 는 블록이 바닥에서 떨어진 높이
 y'' 는 블록 아래 면에서 러그가 부착된 위치까지의 거리이다. 로프의 신장으로 인해 블록은 로프의 신장을 고려하지 않은 때 보다 δ 만큼 아래로 더 내려온다. y' 는 $y'' + \delta$ 로 정의하고 로프가 신장된 상태에서의 블록 아래 면에서부터 로프가 신장되지 않은 상태의 러그가 부착된 원래 위치까지의 거리를 나타낸다.

$$\text{따라서 } \delta = \frac{T}{EA} (H - a - y') \text{ 로 표현된다.}$$

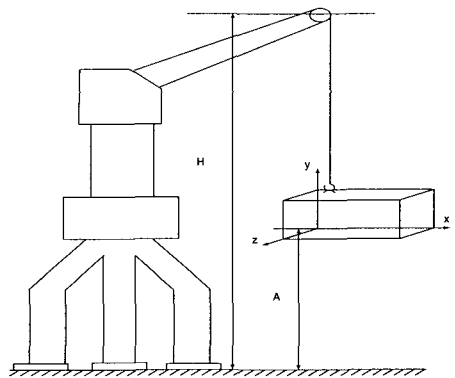


Fig. 2 Crane and lifting block geometry

한편 블록은 변형을 무시한 강체로 보았기 때문에 블록이 공중에 들려 올려진 상태에서도 러그가 위치한 네 지점은 블록이 바닥에 놓여있을 때와 마찬가지로 동일한 평면 (블록이 바닥에 놓인 상태에서 제일 위쪽에 위치한 러그의 좌표를 기준으로 만든 수평면) 상에 놓여 있다고 볼 수 있다. 이

가상평면과 실제 러그가 위치한 지점 사이의 크레인 로프의 길이에 비해 작다고 보아 그 신장량은 무시한다. 따라서 애초에 물체에 부착된 러그는 반드시 같은 평면에 놓일 필요는 없다.

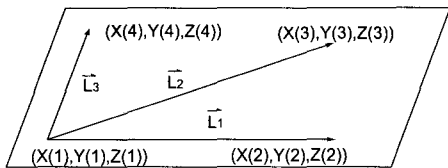


Fig. 3 Position vectors $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3$ on the imaginary plane

이 가상평면상에서 러그 위치를 연결하는 직선은 다음과 같이 벡터로 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 &= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \\ \vec{L}_2 &= (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k} \\ \vec{L}_3 &= (x_4 - x_1)\hat{i} + (y_4 - y_1)\hat{j} + (z_4 - z_1)\hat{k} \end{aligned} \quad (12)$$

벡터 \vec{L}_1, \vec{L}_2 가 만드는 평면에 수직인 벡터를 \vec{n} 이라 하면

$$\vec{n} = \frac{\vec{L}_1 \times \vec{L}_2}{|\vec{L}_1 \times \vec{L}_2|} \quad (13)$$

이고 위치벡터를 이용하여 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\vec{n} = \frac{(\vec{r}_2'' - \vec{r}_1'') \times (\vec{r}_3'' - \vec{r}_1'')}{|(\vec{r}_2'' - \vec{r}_1'') \times (\vec{r}_3'' - \vec{r}_1'')|} \quad (14)$$

여기서 \vec{r}_a'' 는 이미 회전된 상태에서 물체에 부착된 러그의 위치벡터로서 로프의 신장을 고려한 상태이며 $a = 1, 2, 3, 4$ 각각에 대하여 $\vec{r}_a'' = \vec{r}_a' + \delta_a$ ($\delta_a = -\delta_a \hat{j}$) 이다. \vec{r}_a' 는 크레인 로프의 신장이 고려되지 않은 상태의 러그의 위치벡터이다. 따라서 크레인 로프의 적합조건식은 벡터 $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3$ 가 같은 평면에 놓이기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\vec{n} \cdot \vec{L}_3 = 0 \quad (15)$$

이상 평행방정식인 식(5), 식(6)과 함께 적합조건인 식(15)를 연립하여 풀면 경사진 선체블록을 들어올리는 4개의 크레인 로프에 걸리는 인장력 T_1, T_2, T_3, T_4 을 계산할 수 있는데 본 연구에서는 이 과정을 상용 symbolic 수치해석 프로그램인 Mathematica를 이용하여 엄밀해를 구하였다 (Wolfram Research Inc., 2002). 3차원 공간에서 러그 4개의 위치와 무게중심의 위치, 블록의 총 중량과 크레인 로프 4개의 길이, 그리고 3개 축방향의 블록 경사각을 변수로 하는 연립방정식의 해는 상당히 길고 복잡한데 (최경식과 김동준, 2000) 본 논문에서는 블록의 y축 방향의 회전을 무시한 경우($\theta=0^\circ$)에 대한 해를 부록에 따로 수록하였다.

3. 예제해석 결과

먼저 Fig. 4와 같은 형태의 1축 비대칭 형상을 가진 선체블록(총중량 292 ton)을 선정하여 인장력을 계산해 보았다. 여기서 바람에 의한 영향은 고려하지 않았으며 수직축인 y축을 중심으로 하는 블록의 회전은 없다고 보았다. 각 러그의 위치와 무게중심의 위치는 Table 1에 제시된 바와 같다.

Fig. 5에는 동일한 4개의 크레인을 사용하여 현장에서 계측한 로프의 인장력 변화와 설계 예상치를 비교하여 보여주고 있다. 이 작업에서 크레인 기사가 작업기준으로 삼은 예상치는 현장에서의 운용 경험에 의거하여 수평상태에서 T_1, T_4 가

Table 1 Input data for a hull block

Lug Position	x (m)	y(m)	z(m)
T_1	2	7	27.45
T_2	11	7	26.30
T_3	11	7	3.70
T_4	2	7	2.55
Center of Block	6.20	2.80	15
Total Weight of Block	$W = 292 \text{ Ton}$		

Fig. 4 Configuration of a hull block
(TC85=T₁, TC84=T₂, TC83=T₃, C82=T₄)

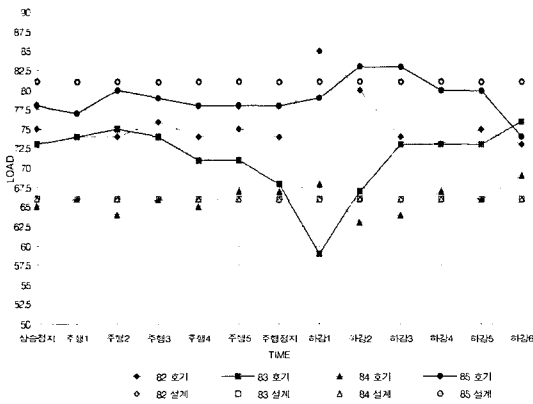


Fig. 5 Lifting load data for a hull block
(TC82=T₁, TC85=T₂, TC84=T₃, TC83=T₄)

각각 80.5 ton, T₂, T₃ 가 각각 65.5 ton 으로 결정되었는데 만일 동일한 크레인 3기를 사용하면 1기당 평균 97.3 ton 이 걸리게 되며 이 수치는 크레인 1기의 허용안전치 85 ton을 초과하게 되어 이 블록은 크레인 3기로는 결코 들어올릴 수 없는 상황이지만 현장에서는 크레인 4기를 사용하여 블록의 인양 및 이동작업을 수행하였다. Fig. 5 에서는 블록 인양을 시작하는 상승시기와 수평이동 후 블록을 내려놓는 하강시기에 인장력의 변화가 매우 커짐을 알 수 있는데 이 순간에 블록에 경사가 발생한 것을 의미한다. 특히 정지 후 하강하는 순간 크레인 수동 조작의 어려움으로 인해 순간적으로 T₁ 이 한계치인 85 ton에 다다랐던 것을 알 수 있다. 블록 이동작업이 진행되는 동안

에 각 크레인 로프의 장력 변화는 T₁, T₄가 73~85 ton, T₂, T₃ 가 59~75 ton으로 계속되었다.

Fig. 6부터 Fig. 9까지는 Table 1의 자료를 사용하여 수행한 인양력 해석결과를 보여주고 있다. 먼저 Fig. 6은 선체블록이 z축으로 회전이 없는 상태에서 ($\phi = 0^\circ$), x축으로 회전되었을 때의 각 크레인 로프에 걸리는 인장력의 변화를 블록의 경사각 변화(ϕ)에 따라 표시한 것이다. 로프의 인장력은 무게 중심에서 가까운 T₁, T₄가 T₂, T₃ 보다 크게 나타나는 것을 알 수 있다. 그리고 처음에는 아래로 기울어진 T₁과 T₂가 T₄와 T₃ 보다 인장력을 적게 받다가 수평이 되면 같아지고 위로 기울어지면 더 많은 인장력을 받는다는 것을 알 수 있다.

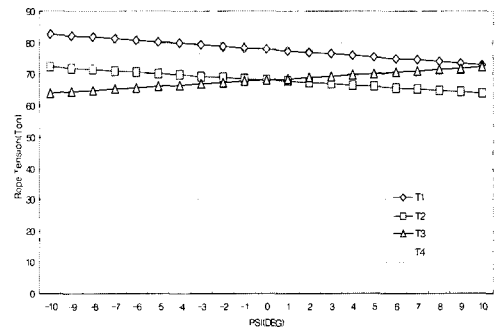


Fig. 6 Lifting rope tension vs. angle ϕ for a hull block ($\phi = 0^\circ$)

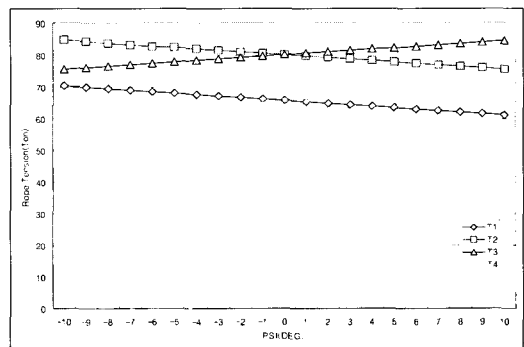


Fig. 7 Lifting rope tension vs. angle ϕ for a hull block ($\phi = 10^\circ$)

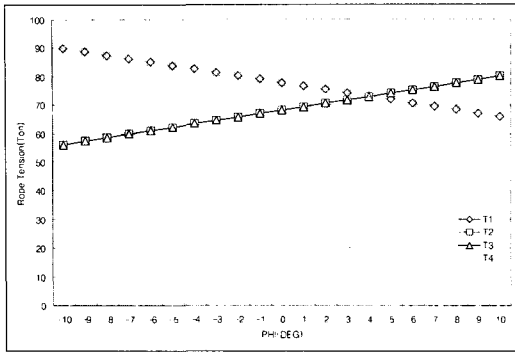


Fig. 8 Lifting rope tension vs. angle ϕ for a hull block ($\psi = 0^\circ$)

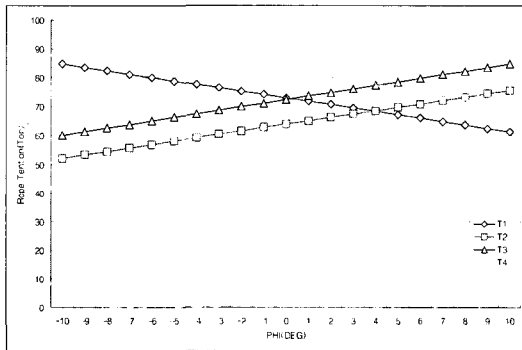


Fig. 9 Lifting rope tension vs. angle ϕ for a hull block ($\psi = 10^\circ$)

블록이 수평인 상태에서 크레인 로프의 장력은 T_1 , T_4 가 각각 77.87 ton, T_2 , T_3 가 각각 68.13 ton으로 계산되었는데 크레인 조작 실측치를 나타낸 Fig. 5에서 사용한 설계치와 비교할 때 각 크레인 로프 장력이 변화하는 값의 중간치에 본 계산결과가 좀더 가까운 것을 알 수 있다. 따라서 수평상태에 대하여 계산된 로프 인장력을 크레인 기사를 위한 초기 설계 예상치로 사용하는 것이 보다 정확한 것임을 알 수 있다.

Fig. 7은 선체블록이 z축으로 $\phi = 10^\circ$ 경사진 상태(선수쪽으로 트림)에서 x축으로 회전(횡경사)할 때의 각 크레인 로프에 걸리는 인장력의 변화를 나타낸 것이다. 이 경우 Fig. 6과는 달리 블록의 무게중심이 한쪽으로 치우치기 때문에 T_1 과 T_4 가 인장력이 크고 아래로 기울어진 쪽이 인

장력이 적다.

Fig. 8은 선체블록이 x축으로 회전이 없는 상태 ($\psi = 0^\circ$; 즉 횡경사 없음)에서, 전후방향으로 트림이 지는 경우의 각 크레인 로프에 걸리는 인장력의 변화를 블록의 경사각 변화에 따라 표시한 것으로서 무게중심에서 가까운 쪽이 아래로 기울어졌을 때 인장력의 분포가 안정적인 것을 알 수 있다. 그림에서 알 수 있듯이 전후방향으로 약 4° 경사진 상태에서 각 크레인 로프의 인장력이 모두 동일하다. 이 경사각을 계속 유지할 수 있다면 이 상태가 4기 크레인의 능력이 동일한 조건에서 가장 잘 활용되는 상태라고 말할 수 있다.

Fig. 9는 두 방향 모두 비대칭적인 회전 상황으로서 x축에 대하여 횡경사진 상태 ($\psi = 10^\circ$)에서 블록이 전후방향으로 회전할 때의 각 크레인 로프에 걸리는 인장력의 변화를 나타낸 것이다. 대각선 방향의 로프 인장력이 대칭적으로 변화한다는 것을 알 수 있다.

Fig. 6~9를 통하여 각 크레인에 걸리는 인장력이 최소가 되는 블록의 경사각을 알 수 있으며 동시에 각 크레인 인장력의 허용 한계치를 벗어나는 경사각을 사전에 파악하여 크레인 기사들의 작업에 운용지침으로 사용할 수 있을 것이다.

이상의 계산결과를 이용하여 블록의 경사각 변화에 따른 로프 인장력의 증분변화를 Table 2에 정리하였다.

이 표를 사용하면 블록의 경사에 따른 각 크레인 로프에 걸리는 인장력의 증감 정도를 미리 예측할 수 있어서 설계치 이상의 위험한 작업을 방지할 수 있다. 292 Ton 선체블록이 두 방향으로 약 5° 정도 경사가 생기는 동안 로프 장력은 대략 9 Ton 정도 변화가 발생함을 알 수 있다. 또한 이 표를 역으로 활용하면 예측된 장력의 변화를 통하여 선체블록이 어떤 경사상태에 있는지 추정할 수 있을 것이다.

4. 결 론

4기 크레인을 사용하여 선체블록을 인양하는 문제에 대한 본 연구의 결론은 다음과 같다.

- (1) 크레인 4기에 의한 인장력 해석은 정적 평

형조건 만으로는 해석이 불가능한 부정정 문제이므로 본 논문에서는 크레인 로프의 탄성변형을 적합조건으로 추가하여 해결하였고 이를 이용하여 크레인 로프의 인장력 T_1, T_2, T_3, T_4 를 인양물체의 경사각 변화가 고려된 작업조건에 따라 유일하게 결정할 수 있었다.

(2) 대칭인 형상인 경우 인접한 위치의 인장력은 서로 반비례하고 대각선으로 마주보는 위치의 인장력은 비례적으로 변화하는데 비대칭의 경우는 무게중심에서 가까운 쪽이 아래로 기울어졌을 때 인장력의 분포가 안정적인 것을 알 수 있었다. 예제의 경우 전후방향으로 약 4° 경사진 상태에서 각 크레인 로프의 인장력이 모두 동일하게 되는데 이 상태가 동일한 4기 크레인의 능력이 가장 잘 활용되는 상태라고 할 수 있다.

작업현장에서 4기의 동일한 크레인을 사용하는 경우 가장 적합한 해는 인장력이 모두 동일할 때이지만 현실적으로 수동작업의 특성상 경사각 변화에 따라 계산되는 인장력 중에 그 최대값과 최소값의 차이가 작도록 조종하는 것이 좋다. 또한 동일한 크레인 4기를 사용하는 경우 이론상 1기의 인양능력의 4배에 해당하는 중량의 블록을 인양 가능하지만 평가하기 어려운 여러 가지 변수가 있다는 점을 유의해야 한다. 본 해석을 뒷받침하는 현장의 사례확보 등 계속적인 보완 연구가 필요할 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 부산시의 BB-21 지원사업과 한진중공업(주)의 연구지원으로 이루어진 결과입니다.

참 고 문 헌

- 최경식, 김동준, 2000, Crane 4기에 의한 대형 중량물의 Lifting 해석기법 및 System 개발, 한국해양대학교 해양과학기술연구소 보고서.
- 함주혁, 2001, “탑재용 러그 구조의 설계시스템 개발,” 대한조선학회 논문집, 제38권, 제1호, pp. 86-98.

- Crandall, S.H., Dahl, N.C. and Lardner, T.J., 1978, An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill.
- Wolfram Research Inc., 2002, Mathematica for Windows ver.4.2.

Table 2 Changes in rope tension vs. inclination angle of a hull block

ϕ \ ψ		$-10^\circ \rightarrow -5^\circ$	$-5^\circ \rightarrow 0^\circ$	$0^\circ \rightarrow 5^\circ$	$5^\circ \rightarrow 10^\circ$	
		-10°	$\Delta T1$	-8.82	-8.67	-8.55
\downarrow	$\Delta T2$	4.15	4.12	4.05	3.95	
	$\Delta T3$	7.95	7.99	8.06	8.16	
	-5°	$\Delta T4$	-3.28	-3.43	-3.55	-3.62
	-5°	$\Delta T1$	-8.60	-8.47	-8.38	-8.33
\downarrow	$\Delta T2$	4.01	3.96	3.88	3.77	
	$\Delta T3$	7.91	7.96	8.04	8.16	
	0°	$\Delta T4$	-3.32	-3.45	-3.54	-3.59
	0°	$\Delta T1$	-8.49	-8.38	-8.31	-8.28
\downarrow	$\Delta T2$	3.95	3.88	3.78	3.66	
	$\Delta T3$	7.97	8.04	8.14	8.27	
	5°	$\Delta T4$	-3.43	-3.45	-3.61	-3.59
	5°	$\Delta T1$	-8.49	-8.40	-8.35	-8.33
\downarrow	$\Delta T2$	3.96	3.87	3.76	3.62	
	$\Delta T3$	8.15	8.23	8.34	8.49	
	10°	$\Delta T4$	-3.61	-3.70	-3.76	-3.77



< 최 경 식 >



< 김 동 준 >

부 록

$$T_4 = EA [-(x'_4 - x'_1)(y'_2 - y'_1)(z'_3 - z'_1) - (x'_4 - x'_1)(z'_2 - z'_1)(y'_3 - y'_1) + (y'_4 - y'_1)(x'_2 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (y'_4 - y'_1)(z'_2 - z'_1)(x'_3 - x'_1)]$$

$$\begin{aligned}
& - (z'_4 - z'_1)(x'_2 - x'_1)(y'_3 - y'_1) \\
& + (z'_4 - z'_1)(y'_2 - y'_1)(x'_3 - x'_1) \\
& - [(x'_4 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (x'_4 - x'_1)(z'_2 - z'_1) \\
& - (x'_2 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (z'_2 - z'_1)(x'_3 - x'_1) \\
& - (z'_4 - z'_1)(x'_2 - x'_1) - (z'_4 - z'_1)(x'_3 - x'_1)] \\
& \cdot (H_1 - a - y'_1)W \\
& \cdot \left[\frac{(z'_c - z'_3)(x'_2 - x'_3) - (x'_c - x'_3)(z'_2 - z'_3)}{(z'_1 - z'_3)(x'_2 - x'_3) - (x'_1 - x'_3)(z'_2 - z'_3)} \right] \\
& - [-(x'_4 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (z'_4 - z'_1)(x'_3 - x'_1)] \\
& \cdot (H_2 - a - y'_2)W \\
& \cdot \left[\frac{(z'_c - z'_1)(x'_3 - x'_1) - (x'_c - x'_1)(z'_3 - z'_1)}{(z'_2 - z'_1)(x'_3 - x'_1) - (x'_2 - x'_1)(z'_3 - z'_1)} \right] \\
& - [(x'_4 - x'_1)(z'_2 - z'_1) - (z'_4 - z'_1)(x'_2 - x'_1)] \\
& \cdot (H_3 - a - y'_3)W \\
& \cdot \left[\frac{(z'_c - z'_2)(x'_1 - x'_2) - (x'_c - x'_2)(z'_1 - z'_2)}{(z'_3 - z'_2)(x'_1 - x'_2) - (x'_3 - x'_2)(z'_1 - z'_2)} \right] \\
& - [(x'_4 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (x'_4 - x'_1)(z'_2 - z'_1) \\
& - (x'_2 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (z'_2 - z'_1)(x'_3 - x'_1) \\
& - (z'_4 - z'_1)(x'_2 - x'_1) - (z'_4 - z'_1)(x'_3 - x'_1)] \\
& \cdot (H_1 - a - y'_1)W \\
& \cdot \left[\frac{(z'_4 - z'_3)(x'_2 - x'_3) - (x'_4 - x'_3)(z'_2 - z'_3)}{(z'_1 - z'_3)(x'_2 - x'_3) - (x'_1 - x'_3)(z'_2 - z'_3)} \right] \\
& - [-(x'_4 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (z'_4 - z'_1)(x'_3 - x'_1)] \\
& \cdot (H_2 - a - y'_2)W \\
& \cdot \left[\frac{(z'_4 - z'_1)(x'_3 - x'_1) - (x'_4 - x'_1)(z'_3 - z'_1)}{(z'_2 - z'_1)(x'_3 - x'_1) - (x'_2 - x'_1)(z'_3 - z'_1)} \right] \\
& - [(x'_4 - x'_1)(z'_2 - z'_1) - (z'_4 - z'_1)(x'_2 - x'_1)] \\
& \cdot (H_3 - a - y'_3)W \\
& \cdot \left[\frac{(z'_4 - z'_2)(x'_1 - x'_2) - (x'_4 - x'_2)(z'_1 - z'_2)}{(z'_3 - z'_2)(x'_1 - x'_2) - (x'_3 - x'_2)(z'_1 - z'_2)} \right] \\
& + [(x'_2 - x'_1)(z'_3 - z'_1) - (z'_2 - z'_1)(x'_3 - x'_1)] \\
& \cdot (H_4 - a - y'_4)W
\end{aligned}$$

한편 T_1 , T_2 , T_3 는 T_4 를 이용하여 식(5) 및 (6)식으로부터 구할 수 있다.