

## 2K-H II 차동기어 결합형 무단변속기의 성능해석

박재민\*, 김연수\*\*, 최상훈#

### Performance Analysis of CVTs with a 2K-H II Differential Gear

Jae-Min Park\*, Yeon-Su Kim\*\* and Sang-Hoon Choi#

#### ABSTRACT

Continuously variable transmission (CVT) mechanisms considered here are input coupled types that combine the functions of a 2K-H II type differential gear and a V-belt type continuously variable unit (CVU). For the 8 different mechanisms, 4 of them are power-circulation modes while the other 4 are power-split modes, various performance analysis (speed ratios, power flows, divisions of power transmission in a differential gear and a CVU, and theoretical efficiencies) are performed to vary design parameters. Experimental studies are executed to validate fundamental relations (speed ratios, power flows, efficiencies, occurrence of geared neutral). Some useful characteristics associated with performance also are discussed in the mechanisms.

**Key Words** : Continuously Variable Transmission(무단 변속기), Differential Gear(차동기어), Power-Circulation mode(동력 순환형), Power-Split mode(동력 분류형), Geared Neutral(중립)

#### 1. 서론

무단변속기는 속도비를 연속적으로 변화시킬 수 있고, 자동차에 적용할 경우 엔진속도를 차량 속도와 독립적으로 제어함으로써 동력성능과 연비 성능을 동시에 만족시킬 수 있는 장점을 가지고 있다. 무단변속기는 다양한 종류가 개발되어 사용되고 있으나, 이들 대부분은 자체적으로 중립(geared neutral)을 구현할 수 없거나 효율과 수명 측면에서 기존의 유단변속기(기어 변속기)보다 불리한 단점을 가지고 있다.<sup>1</sup> 이러한 단점을 극복하기 위해 기존의 무단변속기구에 차동기어를 결합시켜 전달동력의 일부분을 효율이 상대적으로 높

은 차동기어로 전달하고, 무단변속을 위한 일부의 동력을 무단변속기구로 전달하는 새로운 형식의 무단변속기에 대한 연구가 진행되었다. 이러한 무단변속기는 소형 및 경량화 설계가 가능하고, 효율과 수명의 증대, 변속 범위의 확대, 그리고 자체적으로 중립의 생성이 가능하여 출발장치를 생략할 수 있는 등의 많은 장점을 갖는 것으로 분석되었다.<sup>2-14</sup> 특히 저자들은 2K-H I 형식, 2K-H II 형식, K-H-V 형 차동기어에 각각 V-벨트식 무단변속기구를 입력축 연결방식과 출력축 연결방식으로 결합시켜 다양한 무단변속기 구성을 제안하였다. 2K-H I 형식을 결합한 경우는 24 개의 구성<sup>8-10</sup>, 2K-H II 형식을 결합한 경우는 16 개의 구성<sup>11</sup>, K-H-V 형식

\* 접수일: 2004 년 2 월 13 일; 게재승인일: 2004 년 3 월 12 일

\* 건국대학교 대학원

\*\* 한국철도기술연구원 경량전철연구팀

# 교신저자: 건국대학교 기계항공공학부

E-mail shchoi@konkuk.ac.kr Tel. (02) 450-3476

을 결합한 경우는 24 개의 구성들을<sup>12</sup> 제안하였고, 이들에 대해 동력전달효율, 동력흐름, 무단변속기구와 차동기어의 동력 분담율, 속도비에 대한 이론식을 유도하였다. 또한 2K-H I 형식을 결합하여 제안된 무단변속기에 대해서는 다양한 실험을 통해 유도된 이론식들의 타당성을 확인하였다.<sup>13,14</sup>

본 논문에서는 2K-H II형식 차동기어에 V-벨트식 무단변속기구를 입력축 연결방식으로 결합시켜 제안한 4 가지 동력순환형과 4 가지 동력분류형을 설계 제작하고, 효율, 속도비, 동력흐름에 대해 다양한 실험을 통해 제안된 무단변속기의 성능해석을 수행하고, 그 이론식의 타당성을 입증하였다.

## 2. 구조 및 동력흐름

### 2.1 무단변속기구

V-벨트식 무단변속기구는 Fig. 1 과 같이 2 개의 가변풀리(variable pulley)가 고정된 축에 각각 설치되어 고무벨트로 구동된다. 또한 속도비 조정기와 연결된 링크장치가 한쪽 가변풀리의 회전반경을 변화시키면 다른 쪽은 스프링에 의해 회전반경이 조정되어 속도비가 연속적으로 변화되는 구조이다.

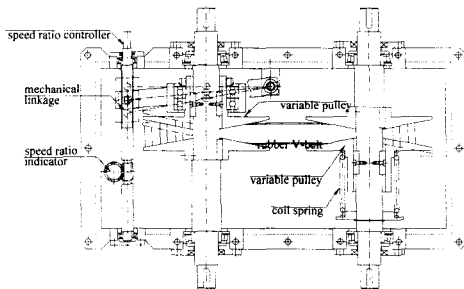


Fig. 1 Drawing of the V-belt type CVU

### 2.2 차동기어

2K-H II형식 차동기어는 Fig. 2 와 같이 태양기어 s, 링기어(ring gear) r, 동심축으로 서로 연결되는 유성기어 p1 과 p2 각 3 개, 유성기어의 원활한 공전운동을 안내하는 캐리어 c 로 구성된다. 캐리어가 고정된 경우의 기본효율( $\eta_0$ )은 식 (1)과 같이 링기어 r 과 유성기어 p1 사이의 물림효율  $\eta_{p1}$ , 태양기어 s 와 유성기어 p2 사이의 물림효율  $\eta_{sp2}$  의 곱으로 정의된다.<sup>15,16</sup>

$$\eta_0 = \eta_{p1} \eta_{sp2} \quad (1)$$

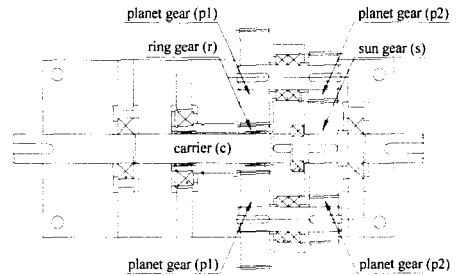


Fig. 2 Drawing of the 2K-H II differential gear

### 2.3 구성방식과 동력흐름

무단변속기구에 차동기어를 결합시키는 방식으로는 무단변속기구가 입력축에 직접 연결되는 입력축 연결방식(input coupled type)과 출력축에 연결되는 출력축 연결방식(output coupled type)이 있다.<sup>13</sup> 무단변속기 내에서의 동력흐름은 동력순환형(power-circulation mode)과 동력분류형(power-split mode)으로 분류된다. 동력순환형은 출력동력의 일부가 변속기 내부에서 순환하는 것이며, 동력분류형은 전체 전달동력을 무단변속기구와 차동기어가 임의의 비율로 분담하는 동력흐름이다.<sup>3,8,9</sup>

### 2.4 기본구성

선행 연구에서 제안된 입력축 연결방식의 무단변속기 기본구성은 Fig. 3 과 같다.<sup>11</sup> 각각의 구성은 아이들러 기어 f 의 유무에 따라 동력흐름이 변화하므로 실제로는 동력분류형 4 가지, 동력순환형 4 가지 구성이 된다.

Fig. 3 에서 동력분류형과 동력순환형의 기준, 속도비( $i$ ), 이론효율( $\eta$ ), 입력동력( $P_i$ )에 대한 무단변속기구의 동력분담율( $P_{CVU}/P_i$ )과 차동기어의 동력분담율( $P_{dif}/P_i$ )은 Appendix 1, 2 와 같다.<sup>11</sup> 여기서  $D_1$ ,  $D_2$  는 가변풀리의 회전직경이고,  $z_a, z_b, z_e, z_g$  는 Fig. 3 에서의 기어 a, b, e, g 의 잇수이다.  $\eta_0'$  은 기어 f 가 있는 구성들에서는 식 (2), 기어 f 가 없는 구성들에서는 식 (3)과 같이 정의된다.<sup>8-12</sup>

$$\eta_0' = \eta_{ab} \eta_{ef} \eta_{fg} \eta_{CVU} \quad (2)$$

$$\eta_0' = \eta_{ab} \eta_{eg} \eta_{CVU} \quad (3)$$

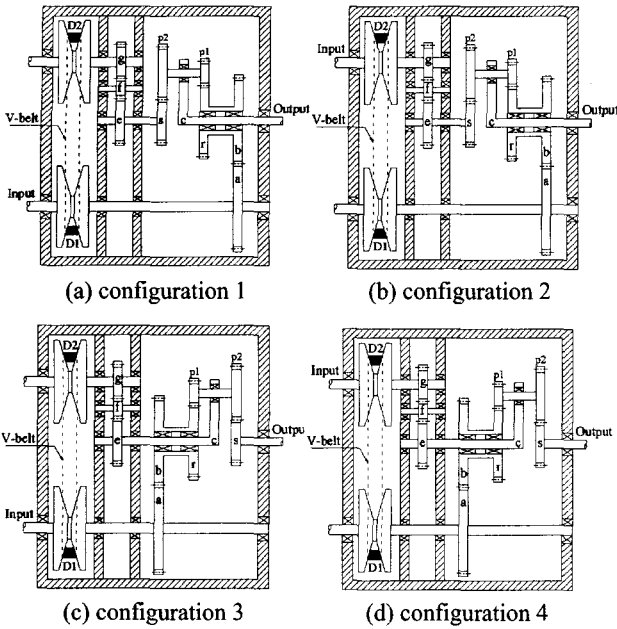


Fig. 3 Basic configurations of the input coupled type

### 3. 무단변속기의 성능해석

#### 3.1 설계 및 제작

2K-H II 형식 차동기어는 압력각이 20°, 모듈이 2.0 인 표준 스퍼기어로서 치폭을 30 mm로 설계하였다. 또한 구성기어의 잇수는  $z_s=48$ ,  $z_r=24$ ,  $z_{p1}=48$ ,  $z_{p2}=24$ 이며, Fig. 3의 구성 1, 2와 구성 3, 4는 동일한 차동기어를 180° 회전하여 설치하므로 제작된 1 개의 차동기어로 모두 구현할 수 있도록 설계하였다. Fig. 4는 제작된 2K-H II 형식 차동기어이다.

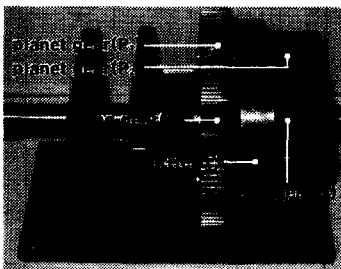


Fig. 4 Photograph of the 2K-H II differential gear

V-벨트식 무단변속기구는 축간거리가 279 mm,

가변폴리의 최대직경이 216 mm이며, 전체 변속범위 0.5~2.0 내에서 연속적인 변속이 가능하다. 고무 V-벨트는 굽힘에 유연하고 벨트 측면에 작용하는 큰 축력에 견딜 수 있도록 안쪽이 이(齒) 모양으로 가공된 제품을 사용하였다. 벨트 폭이 36.5 mm, 벨트 홈각이 22°, 피치길이가 1069.3 mm인 미국 표준규격(RMA/MPTA 2322V421)의 제품을 사용하였다. Fig. 5는 제작된 V-벨트식 무단변속기구이다.

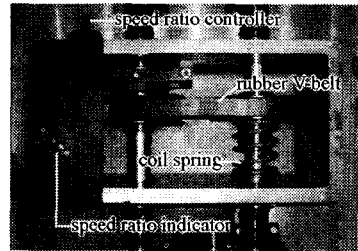


Fig. 5 Photograph of the V-belt type CVU

Fig. 3에서의 기어 a, b, e, g, f는 차동기어와 동일하게 압력각이 20°, 모듈이 2.0, 치폭이 30 mm인 표준 스퍼기어이며, 각각의 잇수는 Table 1과 같다. 동력순환형과 동력분류형에 대한 다양하고 충분한 성능해석이 되도록 다양한 잇수비를 설정하였고, 기어 a와 b, e와 g는 각각의 구성에서 서로 교환되어 설치될 수 있도록 설계하였다. 또한 아이들러 기어 f의 잇수는 성능에 영향이 없으므로 18개로 설계하였다.

Table 1 Number of teeth of gear trains

| Gears | Numbers of teeth                   |
|-------|------------------------------------|
| a     | 70, 90, 120                        |
| b     | 40, 54, 60, 90, 105                |
| e     | 20, 33, 34, 40, 48, 60, 70, 77     |
| g     | 20, 28, 33, 34, 35, 40, 45, 48, 60 |

#### 3.2 이론해석

각종 기어열의 물림효율은 표준 스퍼기어로 제작되고, 베어링 손실과 윤활 손실을 무시하는 가정 하에서 치면의 마찰손실(마찰계수 0.1)만을 고려하여 해석한 결과를 이용하였다.<sup>15,16</sup> 또한 무단변속기구의 효율은 4개의 속도비에 대해 효율

측정실험을 수행하였고, 이들 사이의 효율은 실험 결과를 이용하여 선형보간법으로 산출하였다.<sup>8-11</sup> 무단변속기구의 차체 효율은  $\eta_{CVU}$ , 기어 a, b 사이의 물림효율  $\eta_{ab}$ , 기어 e, f 사이의 물림효율  $\eta_{ef}$ , 기어 f, g 사이의 물림효율  $\eta_{fg}$ , 기어 e, g 사이의 물림효율  $\eta_{eg}$ 은 Table 2 와 같다.

Appendix 1 과 2, Table 1 과 2 를 이용하여 동력 분류형 4 개 구성과 동력순환형 4 개 구성에 대한 속도비, 이론효율, 입력동력에 대한 차동기어와 무단변속기구의 동력분담율을 각각 해석하였다.

Table 2 Efficiencies of the gear trains and the CVU

| Mating efficiencies of gear trains                                    |                                 |
|---|---------------------------------|
| $\eta_{rp1}=\eta_{sp2}=\eta_{ef}=\eta_{fg}=\eta_{eg}=\eta_{ab}=0.982$ |                                 |
| V-belt type continuously variable unit                                |                                 |
| Speed ratios  | CVU efficiency ( $\eta_{CVU}$ ) |
| 0.50  | 0.938                           |
| 0.66  | 0.904                           |
| 1.00  | 0.870                           |
| 2.00  | 0.824                           |

### 3.3 성능실험

무단변속기의 성능실험은 Fig. 6 과 같이 구동용 교류전동기, 고무 V-벨트식 무단변속기구, 2K-H II 형식 차동기어, 토크센서, 속도센서, 부하장치, 각종 기어열 등으로 구성된 실험장치를 이용하여 수행되었다. 구동용 교류전동기의 용량은 11kW 이며 부하장치에 의한 부하량의 크기에 관계없이 설정된 회전속도가 일정하게 유지되도록 속도제어가 수행되었다. 교류전동기가 ①에 설치될 경우 구성 1, 3 을 구현하고, ②에 설치되면 구성 2, 4 를 구현한다. 실험장치의 입력축과 출력축에는 각각 토크센서와 속도센서를 설치하여 부하에 따른 토크와 회전속도를 측정한다. 토크센서는 스트레인 게이지 형식으로서 0~100Nm 의 측정범위를 가지며, 속도센서는 적색 발광 다이오드를 광원으로 하는 광화이버 센서로서 60~2400rpm 의 측정범위를 갖는다. 속도센서 ③과 토크센서 ④는 전동기의 위치에 따라 이동 설치가 가능하도록 하였다. 토크를 발생시키는 부하장치는 0~100Nm 의 용량을 갖는 전자기식 파티클(particle) 브레이크로서 부하의 크기를 연속적으로 제어할 수 있도록 하였다.

무단변속기구의 벨트장력 안정화, 차동기어 및 기어열의 치면 마찰상태, 부하장치의 냉각 등을 위해 각각의 실험조건에서 약 20 분 정도의 무부하 작동을 수행한 후 성능실험을 수행하였다. 이러한 무부하 작동은 무단변속기구의 효율측정 실험과 동일한 조건이다. Fig. 7 은 무단변속기의 성능 실험장치이다.

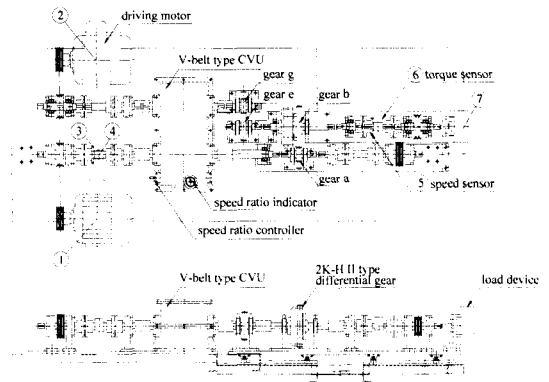


Fig. 6 Schematic drawing of the test rig for CVTs



Fig. 7 Photograph of the test rig for CVTs

### 3.4 결과의 분석

Fig. 7 의 성능 실험장치로 무단변속기를 구동시키면서 부하를 작용시켜 입력축과 출력축의 회전속도와 토크를 측정후 식 (4)를 이용하여 효율과 속도비를 계산하였다. 여기서  $\eta$ 는 무단변속기의 효율,  $i$ 는 속도비,  $T_i$ 는 입력축에 발생된 토크,  $T_o$ 는 출력축에 발생된 토크,  $\omega_i$ 는 입력축의 회전속도,  $\omega_o$ 는 출력축의 회전속도이다. Fig. 8 은 기어열의 구성이  $z_a=70, z_b=105, z_c=48, z_g=20$  인 동력분류형 구성 1 에서 무단변속기구의 속도비가  $i_{CVU}=0.95$  일때의 성능실험 측정데이터이다. 부하의

증가에 따라 입력축과 출력축의 토크는 증가하지만 회전속도는 거의 일정하게 유지되었다. 또한 Fig. 9 는 Fig. 8 의 측정 데이터를 식 (4)로 계산한 효율과 속도비이다. 효율은 부하의 증가에 따라 최고효율까지 증대되지만, 속도비는 거의 일정하게 유지되는 것을 확인할 수 있다.

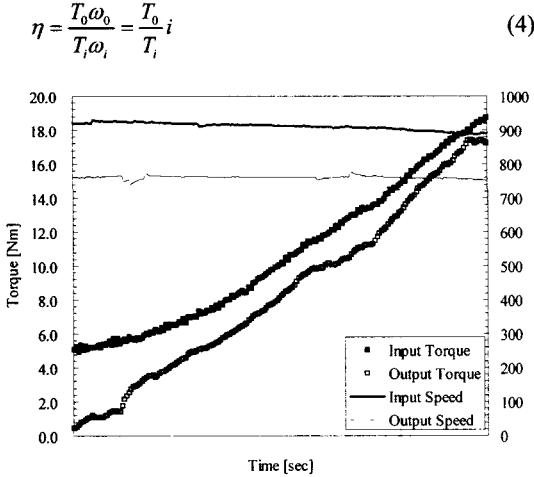


Fig. 8 Experimental results of power-split mode 1 with  $z_a=70, z_b=105, z_c=48, z_g=20, i_{CVU}=0.95$

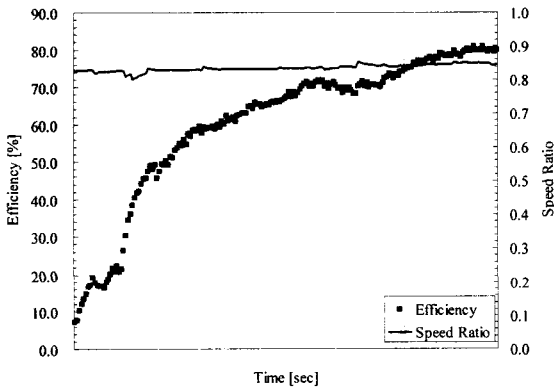


Fig. 9 Efficiency and speed ratios of power-split mode 1 with  $z_a=70, z_b=105, z_c=48, z_g=20, i_{CVU}=0.95$

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 동력순환형

Fig. 10(a), 11(a)는 구성 1, 3 의 3 가지 기어열에 대해 수행된 효율 이론해석과 실험결과를 비교한

것이다. 효율에 대한 실험결과는 이론해석과 비교 오차 약 8% 내외의 차이를 나타냈다. 이는 이론 해석에서 고려되지 않은 무단변속기와 실험장치 구성요소의 관성, 각종 연결부위와 베어링에서 발생하는 손실 등이 복합적으로 작용한 것으로 분석된다. Fig. 10(b), 11(b)에서 속도비는 이론해석과 실험결과가 거의 유사한 경향을 보였다.

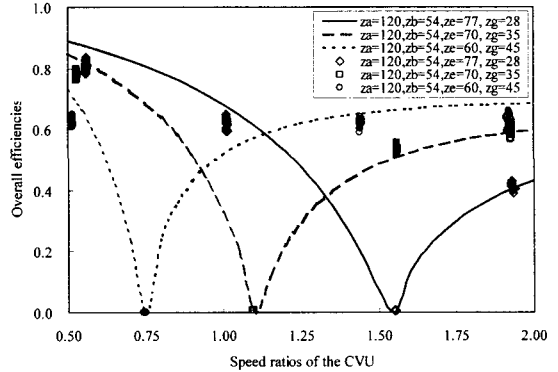


Fig. 10(a) Experimental results v.s. simulation results of efficiencies for power-circulation mode 1

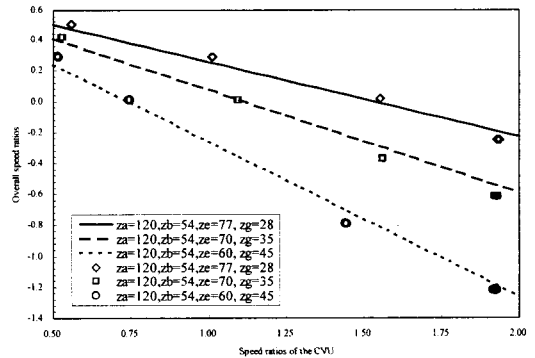


Fig. 10(b) Experimental results v.s. simulation results of speed ratios for power-circulation mode 1

모든 기어열의 중립점에서는 이론해석과 같이 출력축이 정지하여 효율과 속도비가 0 이 되었다. 또한 Fig. 12 에서와 같이 무단변속기구와 차동기어의 동력분담율이 최대가 되었다. 차동기어의 동력분담율이 높은 부분에서는 전체 효율이 증대되었고, 그 반대인 경우는 저하되었다. 이는 차동기어가 무단변속기구보다 효율이 높기 때문에 동력분담율이 증가하면 전체효율이 증대되었다. 따라서

선행연구<sup>11</sup>에서 이론효율과 속도비를 이용하여 유도된 동력분담을 이론식에 대한 타당성도 Fig. 10, 11의 실험결과를 통해 확인할 수 있었다.

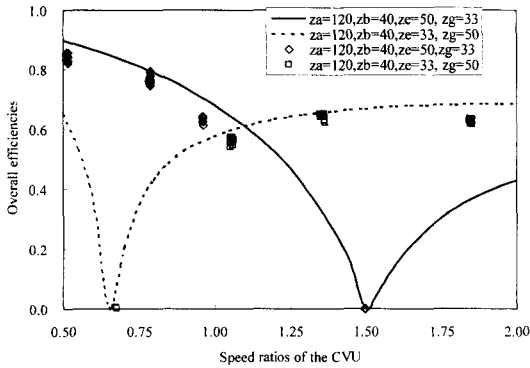


Fig. 11(a) Experimental results v.s. simulation results of efficiencies for power-circulation mode 3

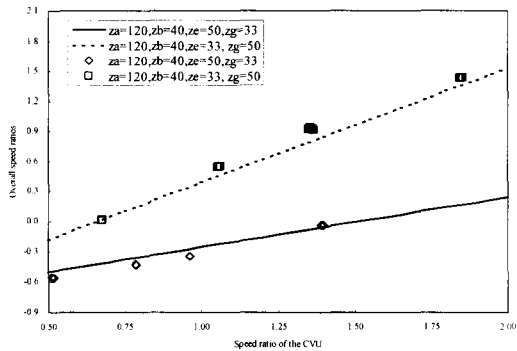


Fig. 11(b) Experimental results v.s. simulation results of speed ratios for power-circulation mode 3

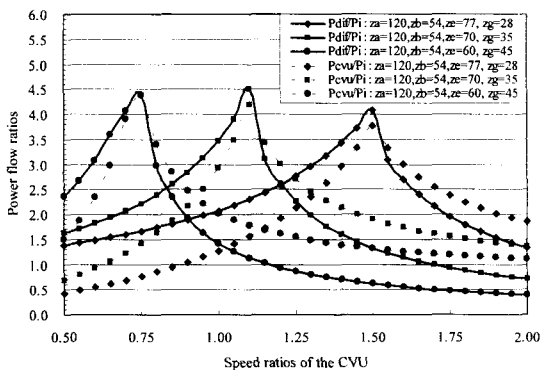


Fig. 12 Power flow ratios of the differential gear and the CVU in power-circulation mode 1

동력순환형 구성 2는 구성 1, 구성 4는 구성 2와 각각 동일한 기어열로 구성하여 이론해석과 성능실험을 수행한 결과 구성 1, 3에서의 결과와 거의 유사한 경향을 나타냈다. 또한 Appendix 2의 동력흐름 기준에 대해서도 설계 제작된 무단변속기의 성능실험으로 통해 타당성(동력순환)을 확인할 수 있었다.

#### 4.2 동력분류형

Fig. 13(a), 14(a)는 구성 1, 3의 3가지 기어열에 대해 수행된 효율 이론해석과 성능실험 결과를 비교한 것이다. 효율 실험결과는 동력순환형의 경우와 유사하게 이론해석 결과와 비교오차 8% 내외의 차이를 나타냈다. 또한 Fig. 13(b), 14(b)는 속도비 이론해석과 성능실험 결과를 비교한 것으로서 서로 거의 유사한 경향을 나타냈다.

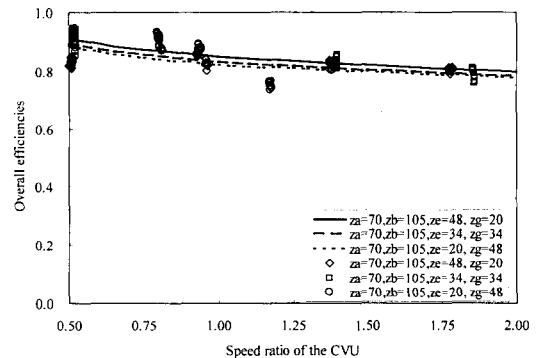


Fig. 13(a) Experimental results v.s. simulation results of efficiencies for power-split mode 1

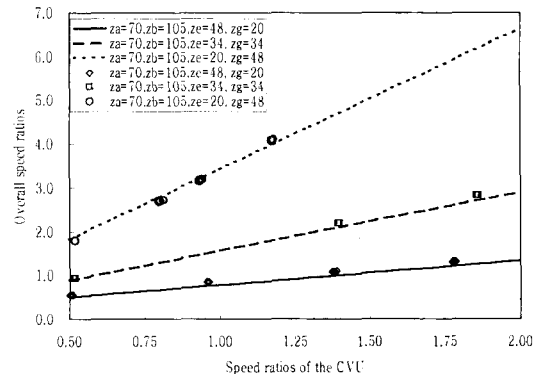


Fig. 13(b) Experimental results v.s. simulation results of speed ratios for power-split mode 1

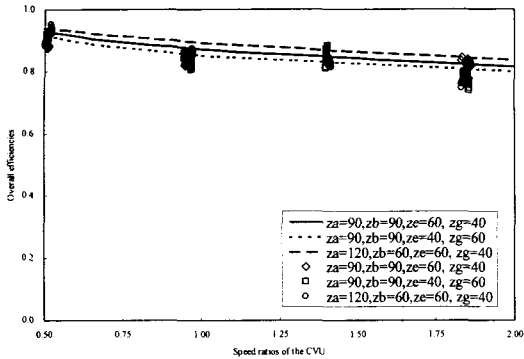


Fig. 14(a) Experimental results v.s. simulation results of efficiencies for power-split mode 3

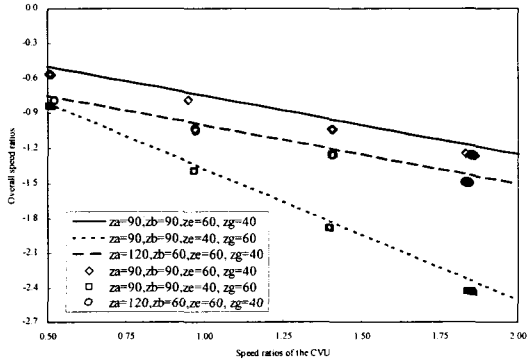


Fig. 14(b) Experimental results v.s. simulation results of speed ratios for power-split mode 3

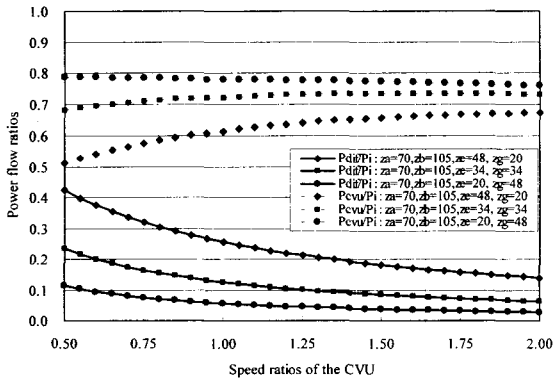


Fig. 15 Power flow ratios of the differential gear and the CVU in power-split mode 1

동력분류형에서는 전체동력을 차동기어와 무단변속기구가 임의의 비율로 분담하여 전달한다.

따라서 Fig. 15 에서 차동기어의 동력분담율이 무단변속기구보다 높은 CVU 속도비에서 전체 효율이 증대되었고, 그 반대인 경우는 전체 효율이 저하되었다. 따라서 이론효율과 속도비를 이용하여 유도된 동력분담율 이론식의 타당성을 Fig. 13, 14 의 실험결과를 통해 확인할 수 있었다.

동력분류형 구성 2 는 구성 1, 구성 4 는 구성 2 와 각각 동일한 3 가지 기어열로 이론해석과 성능실험을 수행한 결과 구성 1, 3 의 경우와 같이 거의 유사한 경향을 나타냈다. 또한 Appendix 1 에서 제시된 동력흐름의 기준도 성능실험으로 통해 타당성(동력분류)도 확인할 수 있었다.

### 5. 결론

2K-H II 형식 차동기어에 V-벨트식 무단변속기구를 입력축 연결방식으로 결합시켜 제한한 무단변속기를 설계 제작하고, 성능실험을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 효율, 속도비, 무단변속기구와 차동기어의 동력분담율 이론해석이 성능실험 결과와 비교오차 8% 내외임을 확인하였고, 따라서 제안된 이론식은 무단변속기의 설계에 유용하게 사용 가능하다.
- 2) 동력순환형의 중립 생성, 출력축의 회전방향 변환 등 본 연구에서 고려한 무단변속기 내의 동력흐름 기준을 실험적으로 증명하였다.

### 후 기

본 연구는 2002 년도 건국대학교 학술진흥연구비의 지원으로 수행되었습니다.

### 참고문헌

1. Beachley, N. H. and Frank, A. A., "Principles and Definitions for Continuously Variable Transmissions with Emphasis on Automotive Application," ASME Paper 80-C2 /DET-95, 1980.
2. Macmillan, R. H. and Davies, P. B., "Analytical Study of Systems for Bifurcated Power Transmission," Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 7, No. 1, pp. 40-47, 1965.
3. White, G., "Properties of Differential

- Transmission," The Engineer, pp. 105-111, 1967.
4. Yu, D. and Beachley, N., "On the Mechanical Efficiency of Differential Gearing," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 107, pp. 61-67, 1985.
  5. Wohl, R., Long, T., Mucino, V. H. and Smith, J. E., "A Model for a Planetary-CVT Mechanism : Analysis and Synthesis," SAE Paper 930065, 1993.
  6. Mucino, V. H. and Smith, J. E., "Parametric Modeling and Analysis of a Planetary Gear-CVT Mechanism," SAE Paper 940519, 1994.
  7. Morozumi, M. and Kishi, S., "A Mechanical Consideration on CVT with a Differential Gearing," Mechanical Researches (Japanese), Vol.49, No.5, pp. 570-578, 1997.
  8. Kim, Y. S. and Choi, S. H., "Power Flow and Efficiency of Input Coupled type CVT combined Differential Gear Unit," J. of the KSPE, Vol. 17, No. 11, pp. 141-150, 2000.
  9. Choi, S. H. and Kim, Y. S., "Characteristics on the Output Coupled CVT with Differential Gear," J. of the KSPE, Vol. 18, No. 3, pp. 205-216, 2000.
  10. Kim, Y. S. and Choi, S. H., "Development of CVTs Composed of a 2K-H I Type Differential Gear Unit and a V-belt Drive," Tran. of the KSME(A), Vol. 26, No. 6, pp. 1060-1068, 2002.
  11. Kim, Y. S. and Choi, S. H., "Continuously Variable Transmission Composed of a V-belt Drive and a 2K-H II type Differential Gear Unit," Tran. of the KSME(A), Vol. 26, No. 8, pp. 1495-1505, 2002.
  12. Choi, S. H., "Performance of CVTs Composed of a Differential Gear Unit and a V-belt Drive," J. of the KSPE, Vol. 20, No. 2, pp. 199-208, 2003.
  13. Kim, Y. S. and Choi, S. H., "Experimental Study on the Input Coupled type CVT combined a Differential Gear and a V-Belt type CVU," Int'l. J. of the KSPE, Vol. 2, No. 1, pp. 43-55, 2001.
  14. Kim, Y. S., Park, J. M. and Choi, S. H. "Experimental and Parametric Study on the Output coupled type Continuously Variable Transmission," Int'l. J. of the KSPE, Vol. 3, No. 3, pp. 28-36, 2002.
  15. Kim, Y. S., Choi, S. U. and Choi, S. H., "A Study on the Efficiency Analysis of 2K-H Type Planetary Gear Train," J. of the KSPE, Vol. 17, No. 3, pp. 200-207, 2000.
  16. Morozumi, M., The Theory and Design Method for Planetary Gear Drive and Differential Gear Unit, Japan Daily Industrial Paper, Tokyo, pp. 8-31, 1989.

Appendix 1 Speed ratios, power flow ratios, efficiencies of power-split modes

|   | power flow criteria                         | differential gear ratio ( $i_0$ ) | equivalent relations ( $i_{eq}$ ) | speed ratios( $i$ )                           | overall efficiencies of CVT( $\eta$ )   | power ratio of CVU ( $P_{CVU}/P_i$ )   | power ratio of differential gear unit( $P_{diff}/P_i$ )                                 |
|---|---|-----------------------------------|-----------------------------------|---|---|--|---|
| 1 | $z_r > z_s$<br>(including f)                | $\frac{z_r z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $\frac{D_1 z_g z_b}{D_2 z_r z_a}$ | $\frac{1+i_0 i_{eq} z_a}{1-i_0} z_b$          | $\frac{\eta_0'(\eta_0-i_0)(1+i_0 i_{eq})}{(1-i_0)(i_0 i_{eq} + \eta_0 \eta_0')}$        | $\frac{\eta_0' i_0 i_{eq}}{i_0 i_{eq} + \eta_0 \eta_0'}$                                   | $\frac{\eta_0' \eta_0}{i_0 i_{eq} + \eta_0 \eta_0'}$                                    |
|   | $z_r > z_s$<br>(including f)                | $\frac{z_r z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   |                                   | $\frac{i_0 + i_{eq} z_a}{1-i_0} z_b$          | $\frac{\eta_0'(\eta_0-i_0)(i_0+i_{eq})}{(1-i_0)(\eta_0 i_{eq} + \eta_0' i_0)}$          | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_{eq}}{\eta_0 i_{eq} + \eta_0' i_0}$                                | $\frac{\eta_0' i_0}{\eta_0 i_{eq} + \eta_0' i_0}$                                       |
| 2 | $z_r > z_s$<br>(including f)                | $\frac{z_r z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $\frac{D_1 z_g z_b}{D_2 z_r z_a}$ | $\frac{1+i_0 i_{eq} z_a}{i_{eq}(1-i_0)} z_b$  | $\frac{\eta_0'(\eta_0-i_0)(1+i_0 i_{eq})}{(1-i_0)(\eta_0' i_0 i_{eq} + \eta_0)}$        | $\frac{\eta_0' \eta_0}{\eta_0' i_0 i_{eq} + \eta_0}$                                       | $\frac{\eta_0' i_0 i_{eq}}{\eta_0' i_0 i_{eq} + \eta_0}$                                |
|   | $z_r > z_s$<br>(including f)                | $\frac{z_r z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   |                                   | $\frac{i_{eq} + i_0 z_a}{i_{eq}(1-i_0)} z_b$  | $\frac{\eta_0'(\eta_0-i_0)(i_{eq}+i_0)}{(1-i_0)(\eta_0' \eta_0 i_{eq} + i_0)}$          | $\frac{\eta_0' i_0}{\eta_0' \eta_0 i_{eq} + i_0}$  | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_{eq}}{\eta_0' \eta_0 i_{eq} + i_0}$                             |
| 3 | $z_r > z_s$<br>(including f)                | $\frac{z_r z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $\frac{D_1 z_g z_b}{D_2 z_r z_a}$ | $-\frac{1+i_{eq}(1-i_0)}{i_0} z_b$            | $\frac{\eta_0' \eta_0 [1+i_{eq}(1-i_0)]}{i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + \eta_0'}$               | $\frac{\eta_0' i_{eq}(1-\eta_0 i_0)}{i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + \eta_0'}$                      | $\frac{\eta_0'}{i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + \eta_0'}$  |
|   | $z_r < z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{z_r z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   |                                   | $\frac{i_0 i_{eq} + (1-i_0) z_a}{i_{eq}} z_b$ | $\frac{\eta_0' \eta_0 [i_0 i_{eq}(1-i_0)]}{\eta_0(1-\eta_0 i_0) + \eta_0' i_0 i_{eq}}$  | $\frac{\eta_0' \eta_0 (1-\eta_0 i_0)}{\eta_0(1-\eta_0 i_0) + \eta_0' i_0 i_{eq}}$          | $\frac{\eta_0' i_0 i_{eq}}{\eta_0(1-\eta_0 i_0) + \eta_0' i_0 i_{eq}}$                  |
|   | $z_r < z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{z_r z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   |                                   | $-\frac{D_1 z_g z_b}{D_2 z_r z_a}$            | $-[i_0 + i_{eq}(1-i_0)] \frac{z_a}{z_b}$  | $\frac{\eta_0' \eta_0 [i_0 + i_{eq}(1-i_0)]}{\eta_0 i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + \eta_0' i_0}$   | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_{eq}(1-\eta_0 i_0)}{\eta_0 i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + \eta_0' i_0}$ |
| 4 | $z_r > z_s$<br>(including f)                | $\frac{z_r z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $\frac{D_1 z_g z_b}{D_2 z_r z_a}$ | $-\frac{1+i_{eq}(1-i_0)}{i_0 i_{eq}} z_b$     | $\frac{\eta_0' \eta_0 [1+i_{eq}(1-i_0)]}{\eta_0' i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + 1}$             | $\frac{\eta_0'}{\eta_0' i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + 1}$   | $\frac{\eta_0' i_{eq}(1-\eta_0 i_0)}{\eta_0' i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + 1}$                 |
|   | $z_r < z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{z_r z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   |                                   | $-\frac{D_1 z_g z_a}{D_2 z_r z_b}$            | $-\frac{i_0 i_{eq} [i_0 i_{eq} + (1-i_0)]}{\eta_0' \eta_0 (1-\eta_0 i_0) + i_0 i_{eq}}$ | $\frac{\eta_0' \eta_0 [i_0 i_{eq} + (1-i_0)]}{\eta_0' \eta_0 (1-\eta_0 i_0) + i_0 i_{eq}}$ | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_{eq}}{\eta_0' \eta_0 (1-\eta_0 i_0) + i_0 i_{eq}}$              |
|   | $z_r < z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{z_r z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   |                                   | $\frac{D_1 z_g z_b}{D_2 z_r z_a}$             | $-\frac{i_0 + i_{eq}(1-i_0)}{i_{eq}} z_b$   | $\frac{\eta_0' \eta_0 [i_0 + i_{eq}(1-i_0)]}{\eta_0' \eta_0 i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + i_0}$   | $\frac{\eta_0' i_0}{\eta_0' \eta_0 i_{eq}(1-\eta_0 i_0) + i_0}$                         |



Appendix 2 Speed ratios, power flow ratios, efficiencies of power-circulation modes

|   | power flow criteria                         | equivalent relations ( $i_{eq}$ ) | differential gear ratio ( $i_0$ ) | power flow conditions                                     | speed ratios( $i$ )  | overall efficiencies ( $\eta$ )   | power ratio of the CVU ( $P_{CVU}/P_i$ )  | power ratio of differential gear( $P_{diff}/P_i$ )   |
|---|---|-----------------------------------|-----------------------------------|---|--|---|---|--|
| 1   | $z_r > z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_r z_u}{D_1 z_g z_h}$ | $\frac{z_s z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $i_{eq} > i_0$  | $-\frac{i_{eq} - i_0}{1 - i_0} \frac{z_g}{z_s}$  | $\frac{(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(i_{eq} - i_0)}{\eta_0(1 - i_0)[i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0(\eta_0 - i_0)]}$                  | $\frac{i_0(\eta_0 - i_0)}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0(\eta_0 - i_0)}$                            | $\frac{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0)}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0(\eta_0 - i_0)}$                                |
|   |   |                                   |                                   | $i_{eq} > i_0$  | $\frac{i_{eq} - i_{eq}}{i_{eq}(1 - i_0)} \frac{z_g}{z_s}$                              | $\frac{\eta_0'(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(i_0 - i_{eq})}{(1 - i_0)[i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)]}$                 | $\frac{\eta_0' i_0(1 - \eta_0 i_0)}{i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                  | $\frac{\eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                          |
|   | $z_r < z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_g z_h}{D_1 z_r z_u}$ | $\frac{z_s z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | -   | $-\frac{1 - i_0 i_{eq}}{1 - i_0} \frac{z_g}{z_s}$                                      | $\frac{(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(1 - i_0 i_{eq})}{\eta_0(1 - i_0)[(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)]}$               | $\frac{i_{eq} i_0(\eta_0 - i_0)}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                    | $\frac{1 - \eta_0 i_0}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                                       |
|   |   |                                   |                                   | $i_{eq} > i_0$  | $-\frac{1 - i_0 i_{eq}}{i_{eq}(1 - i_0)} \frac{z_g}{z_s}$                              | $\frac{\eta_0'(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(1 - i_0 i_{eq})}{(1 - i_0)[\eta_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)]}$ | $\frac{\eta_0' \eta_0(1 - \eta_0 i_0)}{\eta_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$ | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{\eta_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$ |
| 2   | $z_r > z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_r z_u}{D_1 z_g z_h}$ | $\frac{z_s z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   | $i_{eq} > i_0$  | $-\frac{i_{eq} - i_0}{1 - i_0} \frac{z_g}{z_s}$  | $\frac{\eta_0'(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(i_{eq} - i_0)}{\eta_0(1 - i_0)[i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0(\eta_0 - i_0)]}$           | $\frac{i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                         | $\frac{\eta_0' i_0(\eta_0 - i_0)}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0(\eta_0 - i_0)}$                             |
|   |   |                                   |                                   | $i_{eq} > i_0$  | $\frac{i_0 - i_{eq}}{1 - i_0} \frac{z_g}{z_s}$   | $\frac{(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(i_0 - i_{eq})}{(1 - i_0)[i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)]}$                        | $\frac{i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                         | $\frac{i_0(1 - \eta_0 i_0)}{i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                                   |
|   | $z_r < z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_g z_h}{D_1 z_r z_u}$ | $\frac{z_s z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | -   | $-\frac{1 - i_0 i_{eq}}{i_{eq}(1 - i_0)} \frac{z_g}{z_s}$                              | $\frac{\eta_0'(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(1 - i_0 i_{eq})}{\eta_0(1 - i_0)[(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)]}$        | $\frac{\eta_0'(1 - \eta_0 i_0)}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                     | $\frac{\eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                     |
|   |   |                                   |                                   | $i_{eq} < i_0$  | $\frac{i_0 - i_{eq}}{i_{eq}(1 - i_0)} \frac{z_g}{z_s}$                                 | $\frac{(\eta_0 - i_0)(1 - \eta_0 i_0)(i_0 - i_{eq})}{(1 - i_0)[i_0(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)]}$                        | $\frac{i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                        | $\frac{1 - \eta_0 i_0}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' i_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                                       |
| 3   | $z_r < z_s$<br>(including f)                | $\frac{D_2 z_g z_h}{D_1 z_r z_u}$ | $\frac{z_s z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   | $i_0 > i_{eq}(1 - i_0)$                                   | $-\frac{[i_0 - i_{eq}(1 - i_0)] z_g}{z_r}$   | $\frac{\eta_0[i_0 - i_{eq}(1 - i_0)]}{i_0 - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$  | $\frac{i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{i_0 - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$   | $\frac{i_0}{i_0 - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$   |
|   |   |                                   |                                   | $i_0 < i_{eq}(1 - i_0)$                                   | $\frac{[i_{eq}(1 - i_0) - i_0] z_g}{z_r}$  | $\frac{\eta_0'[i_{eq}(1 - i_0) - i_0]}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0}$  | $\frac{\eta_0' i_{eq}(1 - \eta_0 i_0)}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0}$                      | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_0}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0}$   |
|   | $z_r > z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_r z_u}{D_1 z_g z_h}$ | $\frac{z_s z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $i_{eq} > 1 - i_0$  | $-\frac{i_{eq} - (1 - i_0)}{i_0 i_{eq}} \frac{z_g}{z_r}$                               | $\frac{\eta_0[i_{eq} - (1 - i_0)]}{i_{eq} - \eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}$  | $\frac{\eta_0(\eta_0 - i_0)}{i_{eq} - \eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}$                                      | $\frac{i_{eq}}{i_{eq} - \eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}$   |
|   |   |                                   |                                   | $i_{eq} < 1 - i_0$  | $\frac{(1 - i_0) - i_{eq}}{i_0 i_{eq}} \frac{z_g}{z_r}$                                | $\frac{\eta_0' \eta_0[(1 - i_0) - i_{eq}]}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0^2 i_{eq}}$   | $\frac{\eta_0'(1 - \eta_0 i_0)}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0^2 i_{eq}}$                          | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_{eq}}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0^2 i_{eq}}$                                     |
| 4   | $z_r < z_s$<br>(including f)                | $\frac{D_2 z_g z_h}{D_1 z_r z_u}$ | $\frac{z_s z_{p2}}{z_r z_{p1}}$   | $i_0 > i_{eq}(1 - i_0)$                                   | $-\frac{i_0 - i_{eq}(1 - i_0)}{i_{eq}} \frac{z_g}{z_r}$                                | $\frac{\eta_0' \eta_0 [i_0 - i_{eq}(1 - i_0)]}{i_0 - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$   | $\frac{\eta_0' i_0}{i_0 - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$  | $\frac{\eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{i_0 - \eta_0' i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$  |
|   |   |                                   |                                   | $i_0 < i_{eq}(1 - i_0)$                                   | $\frac{i_{eq}(1 - i_0) - i_0}{i_{eq}} \frac{z_g}{z_r}$                                 | $\frac{i_{eq}(1 - i_0) - i_0}{i_{eq}}$  | $\frac{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - i_0}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0}$                        | $\frac{\eta_0' i_0}{i_{eq}(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_0}$  |
|   | $z_r > z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_r z_u}{D_1 z_g z_h}$ | $\frac{z_s z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | $i_{eq} > 1 - i_0$  | $-\frac{i_{eq} - (1 - i_0)}{i_0} \frac{z_g}{z_r}$                                      | $\frac{\eta_0' \eta_0 [i_{eq} - (1 - i_0)]}{i_{eq} - \eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}$   | $\frac{\eta_0' i_{eq}}{i_{eq} - \eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}$  | $\frac{\eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}{i_{eq} - \eta_0' \eta_0(\eta_0 - i_0)}$                                       |
|   |   |                                   |                                   | $i_{eq} < 1 - i_0$  | $\frac{(1 - i_0) - i_{eq}}{i_0} \frac{z_g}{z_r}$                                       | $\frac{\eta_0[(1 - i_0) - i_{eq}]}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_{eq}}$   | $\frac{\eta_0^2 i_{eq}}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_{eq}}$  | $\frac{1 - \eta_0 i_0}{(1 - \eta_0 i_0) - \eta_0' \eta_0 i_{eq}}$  |
| $z_r > z_s$<br>(without f, $i_{eq} < 1.0$ ) | $\frac{D_2 z_g z_h}{D_1 z_r z_u}$           | $\frac{z_s z_{p1}}{z_r z_{p2}}$   | -                                 | $-\frac{1 - i_{eq}(1 - i_0)}{i_0 i_{eq}} \frac{z_g}{z_r}$ | $\frac{\eta_0' \eta_0 [1 - i_{eq}(1 - i_0)]}{1 - \eta_0' \eta_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$ | $\frac{\eta_0'}{1 - \eta_0' \eta_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$   | $\frac{\eta_0' \eta_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}{1 - \eta_0' \eta_0 i_{eq}(\eta_0 - i_0)}$                     |  |