한국소음진동공학회논문집 제 14 권 제 3 호, pp. 244~252, 2004.

유체가 부분적으로 채워진 내부지지 연속 원통셸의 진동해석

Vibration Analysis of Partially Fluid-filled Continuous Cylindrical Shells with Intermediate Supports

김 영 완†

Young-Wann Kim

(2003년 11월 27일 접수 : 2004년 2월 6일 심사완료)

Key Words : Artificial Spring(가상 스프링), Continuous Cylindrical Shell(연속 원통셸), Intermediate support(내부지지), Fluid-structure Interaction(유체-구조 연성)

ABSTRACT

The theoretical method is developed to investigate the vibration characteristics for the partially fluid-filled continuous cylindrical shells with the intermediate supports. The intermediate supports are simulated by two types of artificial springs: the translational spring for the translation for each direction and the rotational spring for a rotation. The springs are continuously distributed along the circumferential direction. By allowing the spring stiffness to become very high compared to the stiffness of the structure, the rigid intermediate supports are approximated. In the theoretical procedure, the Love's thin shell theory is adopted to formulate the theoretical model. The frequency equation of the continuous cylindrical shell is derived by the Rayleigh-Ritz approach based on the energy method. Comparison and convergence studies are carried out to verify and establish the appropriate number of series term and the artificial spring stiffness to produce results with an acceptable order of accuracy. The effect of intermediate supports, their positions and fluid level on the natural frequencies and mode shapes are studied.

1. 서 론

원통셸의 축방향 임의의 지점에 원주 방향을 따라 임의의 경계조건(이하 내부지지)을 갖는 연속 원통셸은 송유관, 가스관, 핵연료봉 및 배관 등의 산업설비에 널리 이용되는 구조물이며, 항공기, 원자로, 잠수함 등의 응용구조물에도 널리 이용되고 있다. 이들 구조물은 대부분 유체를 포함하고 있는 구조물로써 유체와 구조물의 연성에 의해진동특성에 큰 영향을 미치므로 진동특성을 보다 정확히 예측하여 구조물 설계에 이용되어야 한다.

연속 구조물의 해석을 위해 다양한 방법이 이용되고 있다. 내부지지를 탄성지지로 취급한 후 탄성지지에 저장되는 하중을 구조물에 작용하는 외부하중으로 간주하여 해석을 할 수 있다.[1] 또한 각각의 경계구간에 있는 구조물을 하나의 부분 구조물로 취급하여 해석한 후 부분 구조물의 연결을 동적 응답법을 적용하여 해석하기도 한다.[2~4] 그리고 내부 지지부를 강성이 큰 강체 링으로 보강된 구조물로 취급한 후 이들 보강 지지부의 경계조건을 구현하기 위해 변위식을 수정하여 해석을 수행하기도 한다.[5,6] 한편 보다 접근이 용이한 유한요소법을 이용한 경우도 있다.[7] 이상의 연구결과는 유체가 채워지지 않은 구조물에 대한 것으로 유체가 채워진 연속 구조물에 대한 연구

† 책임저자 : 정회원, 여수대학교 기계공학과
E-mail : ywkim@yosu.ac.kr
Tel : (061) 659-3285, Fax : (061) 652-3655

는 매우 미비한 실정이다. 유체가 채워진 구조물에 대한 대부분의 연구는 내부지지가 없는 구조물들[8, 9]이며, 단지 내부지지된 사각형 탱크 구조물에 대해 유한요소법과 경계요소법을 이용하여 해석한 경우만을 찾아 볼 수 있다.[10] 그러나 연속 구조물의 해석을 위해 이전에 사용된 이론적 방법에는 여러 가지 제한을 갖는다. 동적 응답법을 이용할 경우 각각의 부분 구조물에 대한 진동해석을 개별적으로 수행하여야 하며 지지부가 많아지게 되면 풀어야 할 행렬의 크기가 커지게 되는 등의 문제점을 가지고 있다. 또한 내부 지지를 강체의 링으로 취급하여 해석할 경우 내부지지의 정확한 경계조건을 구현할 수 없으며, 링 지지가 많아지면 변위식이 매우 복잡해져 이론전개과정에서의 적분이 매우 어렵게 된다.

따라서 본 연구에서는 이와 같은 문제점을 해결하기 위해 내부 지지부를 가상스프링으로 모사한 후 가상스프링의 상수값을 조절하여 경계조건을 만족하도록 하였다. 가상스프링을 이용한 방법은 기존의 원통셸 해석에서 쓰이는 보함수 등과 같은 변위식의 수정이 필요 없고, 지지부의 증가에 따라 풀어야할 행렬의 크기도 변하지 않으며, 지지부의 경계조건을 보다 정확히 표현할 수 있다. 이와 같이 가상스프링에 의해 모사된 내부 지지를 갖는 연속 원통셸에 대한 진동해석을 수행하기 위해 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 진동수 방정식이 유도되었으며, 본 이론해의 타당성을 검증하기 위해 유한요소해석이 수행되었다.

2. 수식화

길이가 L인 원통셸에 축 방향으로 N개의 내부지지를 갖는 연속 원통셸을 Fig. 1에 나타냈다. 여기서 R과 h는 각각 셸의 반경 및 두께이며, u, v및 w는 축방향, 원주방향 및 횡방향 변위성분이다. 한편 x_i는 셸의 원점에서 i-번째 내부 지지부까지의 거리이다. 내부 지지부에서는 각 방향의 변위와 x축으로의 회전이 구속될 수 있다. 각 방향 변위를 구속하기 위해 스프링 상수 k_x, k_θ 및 k_z를 갖는 3개의 가상 병진 스프링과, 회전을 구속하기 위해 스프링 상수 k_R을 갖는 가상 회전 스프링을 이용하였다. 한편 비압축성, 비점성및 비회전성인 유체가 셸의 바닥으로부터 H만큼 채워져 있으며 셸의 바닥은 강체로 가정하였다.

내부지지부가 없는 원통셸에 대한 변위식을 가정하면 식 (1)과 같이 된다.

$$u(x,\theta)=\sum_{m=1}^{M} U_{mn}\frac{\psi_m(x),_x}{\alpha_m}\cos n\theta \tag{1a}$$

$$v(x,\theta)=\sum_{m=1}^{M} V_{mn}\psi_m(x)\sin n\theta \tag{1b}$$

$$w(x,\theta)=\sum_{m=1}^{M} W_{mn}\psi_m(x)\cos n\theta \tag{1c}$$

여기서 U_{mn}, V_{mn}과 W_{mn}은 미정계수이며, m, n는 축방향 및 원주방향 반파수, M은 급수항이다. $\psi_m(x)$는 축 방향 경계조건을 만족하는 보함수다.

원통셸이 다른 기하형상에 비해 작다고 가정하면 평면 응력상태라 가정할 수 있어 원통셸에 대한 변형 및 운동에너지를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_S=\frac{1}{2}\int_{dV}\{\varepsilon\}^T\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\{\varepsilon\}dV \tag{2}$$

$$T_S=\frac{1}{2}\omega^2\rho\int_{dV}\left[u^2+v^2+w^2\right]dV \tag{3}$$

여기서 $dV=dxRd\theta dz$, E, ν와 ρ는 셸의 탄성계수, 푸아송 비 및 밀도를 나타낸다. 셸에 대한 변형률-변위 관계식은 Love의 셸 이론으로부터 다음과 같

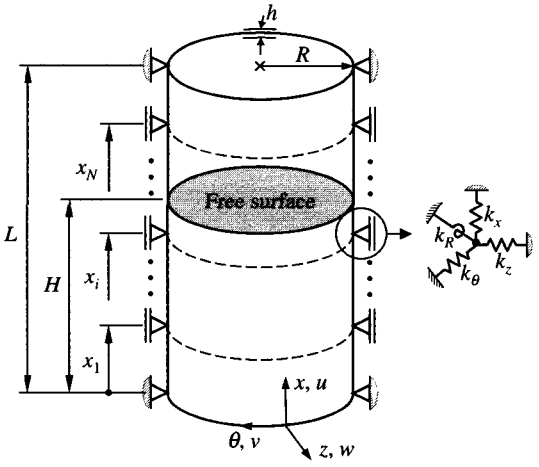


Fig. 1 Considered continuous cylindrical shell

이 쓸 수 있다.[8]

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_{,x}\\ (v_{,\theta}+w)/R\\ u_{,\theta}/R+v_{,x}\end{Bmatrix}-z\begin{Bmatrix}w_{,xx}\\ (w_{,\theta\theta}-v_{,\theta})/R^2\\ (2w_{,x\theta}-v_{,x})/R\end{Bmatrix} \quad (4)$$

여기서 (,)는 공간에 대한 미분을 나타낸다. 가정된 변위식을 에너지식에 대입하여 정리하면 다음과 같이 변형 및 운동에너지를 표현할 수 있다.

$$U_S=\frac{1}{2}\{X\}^T[\mathbf{K}_S]\{X\} \quad (5)$$

$$T_S=\frac{1}{2}\omega^2\{X\}^T[\mathbf{M}_S]\{X\} \quad (6)$$

여기서 $\{X\}^T=\{U_{mn}\ V_{mn}\ W_{mn}\}$, $[\mathbf{K}_S]$와 $[\mathbf{M}_S]$는 원통셸에 대한 강성 및 질량행렬이다.[8]

한편 내부지지에 대한 경계조건은 다양한 형태를 가질 수 있으며, 가상 스프링을 이용하여 내부지지 경계조건을 표현한다. 가상 스프링에 저장된 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{Sp}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_x\int_0^{2\pi}\delta(x-x_i)[k_x u^2+k_\theta v^2 + k_z w^2+k_R w_{,x}^2]Rd\theta dx \quad (7)$$

이 식은 다음과 같이 행렬형태로 쓸 수 있다.

$$U_{Sp}=\frac{1}{2}\{X\}^T[\mathbf{K}_{Sp}]\{X\} \quad (8)$$

$[\mathbf{K}_{Sp}]$는 스프링의 강성행렬로 부록에 제시되었다.

가상 스프링의 강성계수값을 적절히 조절함에 따라 내부 지지부를 탄성지지나 강건한 경계조건을 갖는 것으로 모사할 수 있으며, 강건한 경계조건을 모사하기 위해서는 충분한 크기의 강성계수를 가져야 한다. 가상 스프링에 의해 모사되는 내부지지에서의 경계조건은 단순지지 또는 고정으로 간주할 수 있다. 단순지지는 일반적으로 원주방향 및 횡 방향 변위를 구속하므로 스프링 상수 k_θ와 k_z를, 고정지지에 대해서 모든 자유도를 구속하므로 모든 스프링 상수를 충분히 크게 함으로써 경계조건을 모사할 수 있다.

고려된 유체에 대한 변형포텐셜 ϕ는 다음의 laplace식을 만족하여야 한다.

$$\phi_{,rr}+\frac{\phi_{,r}}{r}+\phi_{,xx}+\frac{\phi_{,\theta\theta}}{r^2}=0 \quad (9)$$

자유표면에서 유체의 슬러싱을 무시하면 변형 포텐셜에 대한 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\phi_{,x}=0 \quad \text{at} \quad x=0 \quad (10a)$$

$$\phi_{,x}=0 \quad \text{at} \quad x=H \quad (10b)$$

$$\phi_{,r}=w \quad \text{at} \quad r=R \quad (10c)$$

식 (10a)는 강체로 가정된 바닥에서의 유속이 0인 조건, 식 (10b)는 자유표면에서 동압이 0인 조건이며, 식 (10c)는 유체와 셸이 접하는 벽면에서의 유속이 같다는 적합조건식이다. 조건식 (10a, b)를 만족하는 변형 포텐셜을 다음과 같이 가정할 수 있다.[8]

$$\phi(x,r,\theta)=\sum_{k=1}^{K}A_{kmn}\cos\frac{p_k x}{H}I_n\left(\frac{p_k r}{H}\right)\cos n\theta \quad (11)$$

여기서 $p_k=(2k-1)\pi/2$ 이다.

식 (11)을 식 (10c)에 적용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$A_{kmn}=\frac{2W_{mn}\gamma_{km}}{[I_n(p_k r/H)_{,r}]_{r=R}H} \quad (12a)$$

$$\gamma_{km}=\int\cos\frac{p_k x}{H}\psi_m(x)dx \quad (12b)$$

셸과 유체가 접할 경우 셸과 유체의 연성에 의한 유체의 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_F=\frac{1}{2}\rho_F\omega^2\int_0^H\int_0^{2\pi}\phi\phi_{,x}Rd\theta dx \quad (13)$$

여기서 ρ_F는 유체의 밀도이다. 이 식은 다음과 같이 행렬형태로 정리된다.

$$T_F=\frac{1}{2}\omega^2\{W_{mn}\}^T[\mathbf{M}_F]\{W_{mn}\} \quad (14)$$

$[\mathbf{M}_F]$는 유체의 질량행렬로 부록에 제시되었다.

유체가 채워진 연속 원통셸에 대한 진동수방정식을 얻기 위해 식 (15)의 Rayleigh-Ritz법을 적용하자.

$$\frac{\partial(U_S + U_{Sp} - T_S - T_F)}{\partial X} = 0 \tag{15}$$

그 결과가 무용해를 갖지 않기 위해 다음과 같이 계수행렬식이 0이어야 한다.

$$\left|[\mathbf{K}_S + \mathbf{K}_{Sp}] - \omega^2[\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_F]\right| = 0 \tag{16}$$

여기서 ω는 유체가 채워진 연속 원통셸의 고유진동수이다. 이 식은 연속 원통셸에 대한 진동수방정식으로 고유치 문제가 된다. 따라서 이 식을 풂으로써 고유진동수 및 고유벡터를 얻을 수 있다.

3. 수렴성 검토 및 해의 검증

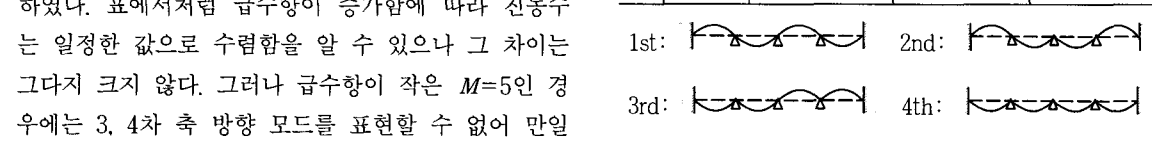
본 연구에서 탄성계수 207 GPa, 푸아송 비 0.3,밀도 7850 kg/m^{3}의 특성을 갖는 재료가 고려되었으며 셸의 양단은 모두 고정 경계조건이다. 각각의 가상스프링은 강성계수를 셸의 굽힘 강성계수 D에 대한 비 $k_T^* = k_{x(\theta,z)}R^3/D$ 와 $k_R^* = k_R R/D$ 로 정의된 무차원 강성계수를 이용하였다. 실제 현장에서 이용되는 내부 지지부는 일반적으로 단순지지이므로 수치예에서는 단순지지로 가정하여 원주방향 및 횡방향 변위 v, w만을 구속하였다.

Rayleigh-ritz법을 적용하여 보다 정확한 해를 얻기 위해서는 셸에 대한 급수항 M에 따른 수렴성을 검토하여야 한다. 셸의 길이 L은 $4R$, 두께 대 반경비 h/R 는 0.01이며, 동일한 간격으로 위치한 3개의 내부지지를 갖는 연속 원통셸에 대한 수렴성 검토 결과를 Table 1에 제시하였다. 표에서 사용된 진동수 매개변수는 $\Omega = \sqrt{(1-\nu^2)\rho R^2\omega^2/E}$ 로 계산되었으며, 무차원 스프링 강성계수는 충분히 큰 10^{15}을 이용하였다. 표에서처럼 급수항이 증가함에 따라 진동수는 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있으나 그 차이는 그다지 크지 않다. 그러나 급수항이 작은 M=5인 경우에는 3, 4차 축 방향 모드를 표현할 수 없어 만일 급수항을 작게 선택한다면 커다란 오류를 범할 수 있다. 결과로부터 M=15이상으로 하면 보다 정확한 해를 얻을 수 있을 것으로 예측되나 급수항을 너무 크게 선택하면 풀어야 할 행렬의 크기가 너무 커져 수렴성에 비해 계산시간이 많이 걸리게 되어 비효율적이다 할 수 있다. 따라서 앞으로 제시될 모든 수치결과는 비교적 수렴성이 좋은 M=15를 이용하여 계산된다.

연속 원통셸의 내부 경계조건은 이용된 가상 스프링의 강성 크기에 따라 다양한 형태의 경계조건을 표현할 수 있다. 완전한 경계조건을 구현하기 위해 가상 스프링의 강성계수에 따른 진동수변화를 살펴봄으로써 적당한 강성계수를 선정할 수 있다. Fig. 2는 Table 1에서 제시된 원통셸에 대해 기본진동수가 나타나는 n=7모드에서 무차원 스프링 강성계수에 따

Table 1 Convergence study of frequency parameter, Ω

n	Axial Mode	M		
		5	10	15
1	1st	0.85163	0.84927	0.84855
	2nd	0.86395	0.85824	0.85492
	3rd	–	0.87873	0.87177
	4th	–	0.88606	0.87418
2	1st	0.66498	0.66080	0.65942
	2nd	0.69195	0.68066	0.67354
	3rd	–	0.70100	0.68833
	4th	–	0.71233	0.69142
3	1st	0.49952	0.49461	0.49313
	2nd	0.53384	0.52146	0.51426
	3rd	–	0.55198	0.53930
	4th	–	0.56550	0.54378
4	1st	0.37973	0.37506	0.37380
	2nd	0.41787	0.40699	0.40100
	3rd	–	0.44311	0.43243
	4th	–	0.45761	0.43861
5	1st	0.30180	0.29780	0.29685
	2nd	0.33996	0.33120	0.32655
	3rd	–	0.36812	0.35963
	4th	–	0.38283	0.36722
6	1st	0.25928	0.25610	0.25541
	2nd	0.29407	0.28729	0.28380
	3rd	–	0.32165	0.31503
	4th	–	0.33583	0.32331



른 진동수변화를 나타낸 것이다. 여기서 축 방향 진동모드는 m=1, 2, 3으로 각 축 방향 모드에 대해 4차까지의 진동수를 고려하였다. 그림에서처럼 강성계수의 증가에 따라 각 모드에서 진동수가 다르게 증가하는 것을 볼 수 있다. 일반적으로 고려된 모든 모드에 대해 세가지 영역 (A, B, C)으로 진동수변화를 설명할 수 있다. 영역 A에서는 강성계수가 진동수에

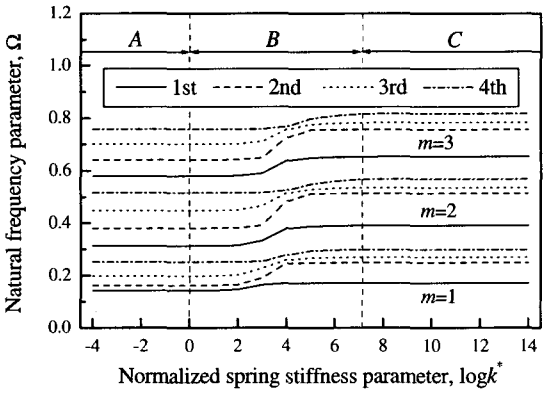


Fig. 2 Variation of frequency parameter with normalized spring stiffness parameter

Table 2 Comparison study with FEM

		Natural Frequency (Hz)				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
1	Ω_t	0.2914	0.3863	0.5516	0.5664	0.7170
	Ω_f	0.2771	0.3748	0.5324	0.5576	0.7077
	Disc.*	5.1677	3.0776	3.6020	1.5890	1.3198
2	Ω_t	0.2797	0.3500	0.4912	0.5523	0.6815
	Ω_f	0.2671	0.3384	0.4731	0.5410	0.6690
	Disc.	4.7221	3.4166	3.8232	2.0862	1.8733
3	Ω_t	0.2687	0.3264	0.4484	0.5424	0.6571
	Ω_f	0.2577	0.3139	0.4311	0.5286	0.6410
	Disc.	4.2576	3.9689	4.0171	2.5993	2.5214
4	Ω_t	0.2623	0.3164	0.4240	0.5381	0.6435
	Ω_f	0.2521	0.3027	0.4070	0.5216	0.6234
	Disc.	4.0482	4.5507	4.1758	3.1583	3.2454
5	Ω_t	0.2652	0.3196	0.4176	0.5409	0.6409
	Ω_f	0.2547	0.3046	0.4004	0.5214	0.6163
	Disc.	4.1324	4.9667	4.2899	3.7527	3.9996
6	Ω_t	0.2794	0.3358	0.4281	0.5520	0.6499
	Ω_f	0.2680	0.3192	0.4104	0.5290	0.6206
	Disc.	4.2812	5.1737	4.3310	4.3515	4.7252

*Disc. means the discrepancy between two results calculated by $(\Omega_t - \Omega_f)/\Omega_f \times 100(\%)$

미치는 영향이 거의 없는 구간으로 내부지지가 없는 일반 원통셸과 동일한 진동수를 갖는다. 영역 B는 강성계수 변화에 대해 진동수가 민감하게 반응하는 구간으로 이 영역에서는 탄성 지지에 대한 해석을 수행할 수 있다. 영역 C에서는 강성계수의 증가에 대해진동수가 안정되게 일정한 값으로 수렴되는 구간이다. 이와 같은 경향으로부터 내부지지에서의 강건한 경계조건을 충분히 만족시킬 만큼 구조물의 강성계수에 비해 영역 C에서의 스프링 강성계수가 충분히 크다는 것을 알 수 있다. 진동차수의 증가에 따라 영역 C로 접근하는 스프링 강성계수가 커지는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 고차 진동특성을 얻기 위해서는 충분히 큰 스프링 강성계수를 선택하여야 한다. 따라서 앞으로 제시될 연속 원통셸에 대한 수치결과는 고차 진동특성에 대해서도 강건한 경계조건을 구현할 수 있도록 충분히 큰 10^{14}의 무차원 강성계수를 이용한다.

이상의 결과를 기초로 하여 유체가 채워진 연속 원통셸에 대한 해석을 수행하였다. 본 연구에서 제시한 이론적 방법의 타당성을 검증하기 위해 유한요소프로그램인 ANSYS[11]를 이용한 2차원 해석을 통해 얻은 결과를 Table 2에 제시하였다. 원통셸에 대해서는 축대칭 구조 셸요소인 SHELL61이 유체에 대해서는 FLUID81이 사용되었다. 유체는 셸의 중간 $(H = L/2)$까지 채워졌고, R=0.2 m, $L = 2R$, t=2 mm이며, 같은 간격으로 위치한 2개의 내부지지를 갖는 연속 원통셸이다. 내부 지지부의 경계조건은 횡방향 변위만을 구속하였다. Table 2에서 Ω_t와 Ω_f는 각각 이론및 유한요소해석에서 얻은 진동수 매개변수이다. 표에서처럼 전반적으로 두 해석방법간에 차이는 최대 5 %정도로 잘 일치하고 있으며 이론해가 유한요소해보다 약간 큰 값을 보여주고 있다.

4. 수치결과 및 토의

Fig. 3은 내부지지가 없는 원통셸과 셸의 중앙에 하나의 내부지지를 갖는 연속 원통셸에 대해 유체의 높이에 따른 진동수거동을 진동형상에 관계없이 낮은 순서부터 5차까지 나타낸 것이다. 이 때 $L = 2R$, $h/R = 0.01$이다. 그림에서처럼 채워지는 유체의 양이

많아질수록 유체가 진동수에 미치는 영향이 커져 진동수는 크게 낮아지는 것을 볼 수 있다. 이와 같은 현상은 유체와 셸의 연성에 의해 발생되는 유체의 운동에너지의 영향 즉, 부가질량효과가 유체의 양에 따라 증가하기 때문에 나타나는 현상이다. 그러나 이 효과는 유체량의 변화에 대해 선형적으로 변하지 않고 비선형성을 갖는 것을 알 수 있다. 내부지지가 없는 셸의 경우 유체의 양 $H/L=0.20.8$구간에서 유체의 영향이 크게 나타나고 있다. 연속셸의 경우 내부지지이하로 유체가 채워질 경우 부가질량의 효과가 가장 크게 작용하여 진동수 변화가 가장 크게 나타나며, 내부지지이상으로 채워진 경우 그 영향이 매우 작게 나타난다. 또한 내부지지를 가짐으로써 진동수가 증가하는 것을 볼 수 있어 연료탱크를 설계할 때 내부지지부를 줌으로써 설계목적에 맞는 진동수 범위를 얻을 수 있다.

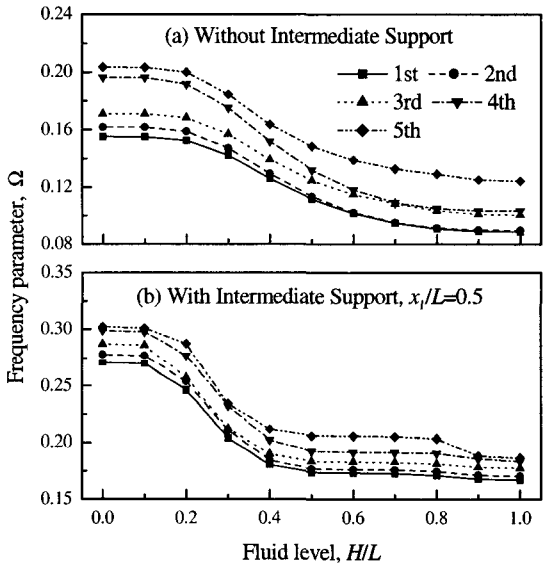


Fig. 3 Frequency variation of continuous shells for various fluid levels

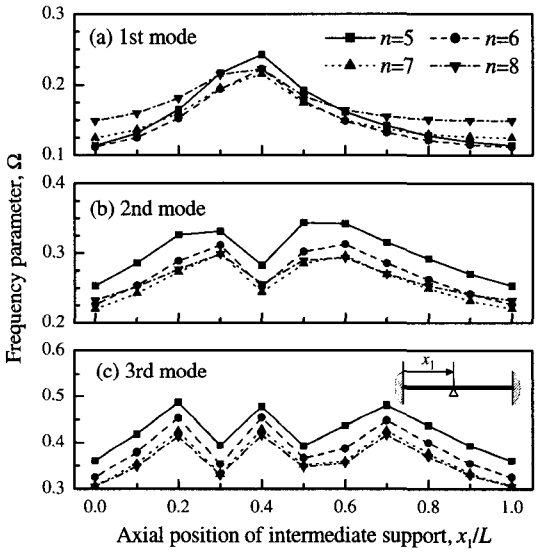


Fig. 4 Frequency variation of continuous shell for various positions of an intermediate support

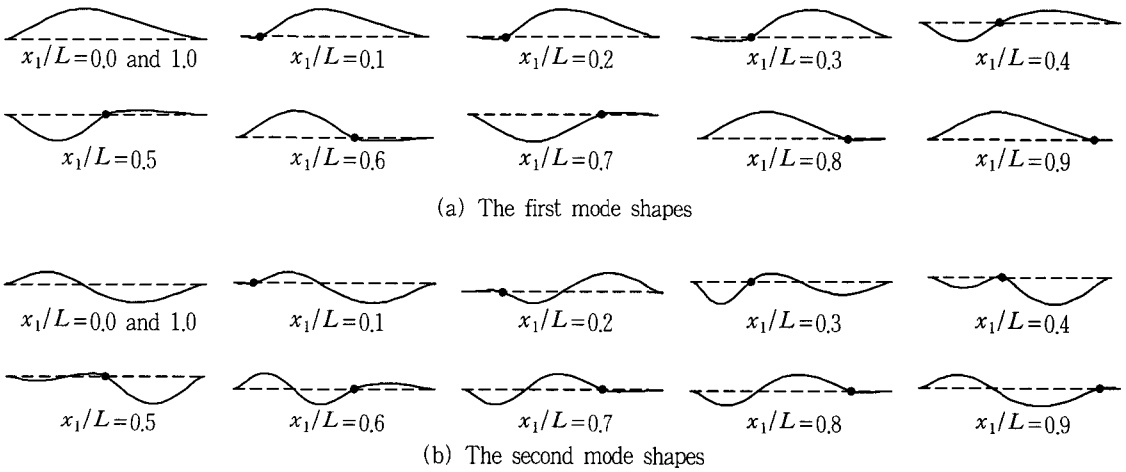


Fig. 5 Axial mode shapes for the shell used in Fig. 4

Fig. 3에서 이용된 연속 원통셸에 대해 내부지지의 위치에 따른 최초 3차까지의 축방향 모드에 대한 진동수 거동을 Fig. 4에 제시하였다. 이 때 유체는 셸의 중간까지 채워져 있다. 결과에서처럼 축 방향 진동차수의 증가에 따라 진동수 변화를 나타내는 변곡점(진동수가 증가하다 감소되는 지점)이 증가하는 것을 볼 수 있다. 즉, 1차 모드인 경우 $x_1/L=0.4$부근에서 한 번 변곡이 일어나고, 2차인 경우 에는 $x_1/L=0.3$과 0.6에서 두 번, 3차인 경우에는 $x_1/L=0.2, 0.4$ 및 0.7에서 세 번의 변곡이 일어난다. 이와 같은 현상은 내부 지지부의 위치변화에 따라 진동형상이 변화되기 때문에 나타나는 현상으로 $n=7$모드에 대한 1, 2차 축 방향 진동형상을 제시한 Fig. 5를 이용하여 설명할 수 있다. 그림에서 (·)은 내부 지지를 표시한다. 1차 진동형상의 경우 지지부의 위치가 $x_1/L=0.3$

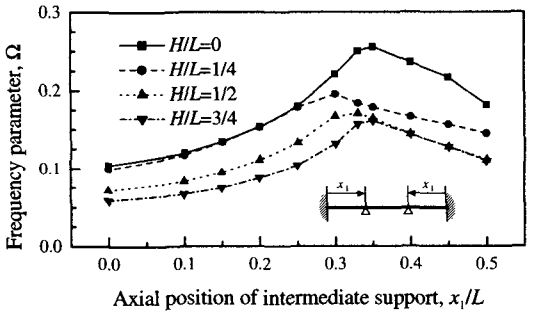


Fig. 6 Fundamental frequency of a continuous shell for various positions of intermediate support and fluid levels

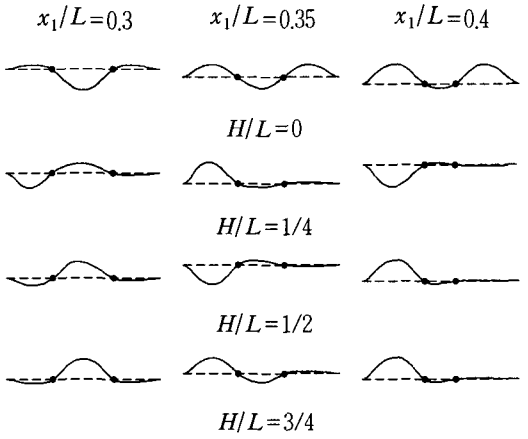


Fig. 7 Mode shapes of the shell used in Fig. 6

이하인 경우 진동형상을 지배하는 긴 스팬부분에서 최대 진폭이 발생되는 반면 지지점 위치의 변화에 따라 유체의 영향이 크게 작용하여 유체가 채워진 부분에서 최대진폭이 나타난다. 2차 진동형상의 경우 지지부의 위치가 $x_1/L=0.3$이하인 경우 진동형상을 지배하는 긴 스팬부분에서의 진동형상이 $m=2$모드를 갖다가 $x_1/L=0.4$로 변함에 따라 $m=1$모드로 변화되는 것을 볼 수 있다. 또한 지지부가 $x_1/L=0.5$인 경우 진동형상에서의 최대진폭이 유체가 채워지지 않은 부분에서 나타나다가 $x_1/L=0.6$으로 변할 경우 유체가 채워진 부분에서 최대진폭이 나타난다. 이와 같이 진동형상의 변화에 의해 유체 양에 따른 진동수변화에서의 변곡이 발생되는 것이다. 한편 내부 지지부의 위치에 따라 기본진동수가 나타나는 원주방향 반파수가 변화되는 것을 Fig. 4(a)에서 볼 수 있다. $x_1/L=0.3$까지는 $n=6$모드에서 기본진동수가 나타났으나 $x_1/L=0.4$와 0.5에서는 $n=7$모드에서 나타나다가 그 이후에는 $n=6$모드에서 기본진동수가 나타난다. 일반적으로 스팬의 길이가 짧고, 지지부에서의 구속정도가 크며, 유체의 양이 적을 경우 큰 진동수를 갖기 때문에 1차 진동수의 경우 $x_1/L=0.4$일 때 가장 큰 진동수를 갖는다. 이와 같이 지지부의 위치에 따라 기본진동수의 크기나 기본진동수가 나타나는 원주방향 반파수가 변화되기 때문에 각 모드에 대한 진동해석을 필히 수행하여야 한다.

길이 $L=3R$, 두께 대 반경비 $h/R=0.01$이고 두 개의 내부지지를 갖는 연속 원통셸의 내부지지의 위치 및 유체의 양에 따른 기본 진동수 및 진동형상 변화를 Fig. 6 과 7에 제시하였다. 결과에서처럼 유체가 채워지지 않았거나 많은 양의 유체가 채워진 경우 ($H/L=3/4$) 내부지지가 셸의 양단에서 $0.35L$에 위치할 경우 가장 큰 기본진동수를 보이고 있다. 이는 진동형상에서처럼 $x_1/L=0.3$인 경우 진동형상을 지배하는 두 번째 스팬의 길이가 $0.4L$이며 양단 단순지지 경계조건을 갖는 반면, $x_1/L=0.35$인 경우 진동형상을 지배하는 첫 번째 스팬의 길이가 $0.35L$이며 고정-단순지지 경계조건을 갖기 때문에 $x_1/L=0.35$에서 보다 큰 진동수를 갖게 된다. 유체의 양이 $H/L=1/4$인 경우에는 $0.3L$에서 가장 큰

기본진동수를 가지며 앞에서 설명된 같은 이유 때문에 이와 같은 현상이 나타난다. 반면 $H/L=1/2$인 경우에는 균일하게 등분되는 $L/3$지점에 위치할 경우 가장 큰 기본진동수를 갖으며, $x_1/L=0.35$에 내부 지지부를 갖는 경우보다 $x_1/L=0.3$인 경우 보다 큰 진동수를 갖는다. $x_1/L=0.35$인 경우 진동형상을 지배하는 스팬의 길이가 $0.35L$이며 고정-단순지지 경계조건을 갖고, $x_1/L=0.3$인 경우는 진동형상을 지배하는 스팬의 길이가 $0.4L$이며 단순-단순지지 경계조건을 갖기 때문에 앞의 설명에 의하면 $x_1/L=0.35$인 경우가 큰 진동수를 가져야 하지만 반대의 경향이 나타나고 있다. 이와 같은 이유는 유체에 의한 영향으로 $x_1/L=0.3$인 경우 비록 진동형상을 지배하는 스팬의 길이가 길며 단순-단순지지 경계조건을 갖지만 유체가 두 번째 스팬의 절반까지만 채워져 있는 반면 $x_1/L=0.35$인 경우에는 진동형상을 지배하는 첫 번째 스팬의 전체에 걸쳐 유체가 채워져 있어 유체의 부가질량효과에 의해 진동수가 많이 감소되었기 때문에 이와 같은 현상이 나타난다.

5. 결 론

본 연구에서는 산업시설에서 널리 이용되는 유체가 부분적으로 채워지고, 내부 지지된 연속 원통셸에 대한 진동특성을 고찰하기 위한 이론적 방법을 제시하였다. 연속셸의 내부 지지부에 대한 경계조건을 모사하기 위해 가상스프링을 이용하였으며, 가상 스프링에 의해 모사된 연속 원통셸에 대한 진동해석을 수행하기 위해 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 진동수 방정식이 유도되었다. 가상스프링을 이용할 경우 기존의 원통셸 해석에서 쓰이는 보함수 등과 같은 변위식의 수정 없이도 정확한 결과를 얻을 수 있었다. 또한 지지부의 증가에 따라 풀어야 할 행렬의 크기도 변하지 않으며, 간단히 지지부의 스프링 강성계수를 조절함으로써 지지부의 경계조건을 정확히 표현할 수 있었다. 결과를 통해 진동특성에 미치는 내부지지의 영향과 유체의 영향을 검토하였다. 유한요소해석을 수행하여 제안된 이론적 방법의 타당성 검증하였다.

참 고 문 헌

(1) Nagaya, K., 1976, "Transient Response of a Continuous Plate on Elastic Supports," Journal of Sound and Vibration, Vol. 47, pp. 359~370.

(2) Azimi, S., Hamilton, J. F. and Soedel, W., 1984, "Receptance Method Applied to the Free Vibration of Continuous Rectangular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 93, pp. 9~29.

(3) Huang, S.-C. and Hsu, B.-S., 1993, "Modal Analysis of a Spinning Cylindrical Shell with Interior Point or Circular Line Supports," Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, Vol. 115, No. 4, pp. 535~543.

(4) 이영신, 한창환, 2000, "동적응답법을 이용한 다점 단순지지된 연속원통셸의 자유진동 해석", 한국소음진동공학회논문집, 제 10 권, 제 6 호, pp. 998~1008.

(5) Swaddiwudhipong, S., Tian, J. and Wang, C.M., 1995, "Vibrations of Cylindrical Shells with Intermediate Supports," Journal of Sound and Vibration, Vol. 187, No. 1, pp. 69~93.

(6) Loy, C. T. and Lam, K. Y., 1997, "Vibration of Cylindrical Shells with Ring Support," Int. Journal of Mechanical Sciences, Vol. 39, No. 4, pp. 455~471.

(7) Pany, C., Parthan, S. and Mukhopadhyay, M., 2001, Free Vibration Analysis of an Orthogonally Supported Multi-span Curved Panel, Journal of Sound and Vibration, Vol. 241, No. 2, pp. 315~318.

(8) Kim, Y. W., Lee, Y. S. and Ko, S. H., 2003, "Coupled Vibration of Partially Fluid-filled Cylindrical Shells with Ring Stiffeners," Journal of Sound and Vibration, In press.

(9) 이영신, 김현수, 이재형, 김영완, 고성호, 2003, "날개형 및 격막형 배플을 이용한 유체저장탱크 내부

의 슬러싱 저감연구", 대한기계학회 논문집(A), 제 27 권 12 호, pp. 2039~2046.

(10) 배성용, 2003, "수치해석에 의한 심수 탱크 구조물의 진동에 관한 연구", 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권 제 10 호, pp. 791~797.

(11) SASI, 2000, "ANSYS User's Manual," Swanson Analysis System Inc., Houston.

부 록

식 (8)에서 스프링에 대한 강성행렬과 식 (14)에서의 유체의 질량행렬은 다음과 같다.

$$[\mathbf{K}_{Sp}]=\begin{bmatrix}[K_{Sp11}] & 0 & 0\\ 0 & [K_{Sp22}] & 0\\ 0 & 0 & [K_{Sp33}]\end{bmatrix}$$

$$[K_{Sp11}]_{mj}=k_x C_n R\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\psi_m(x),_x}{\alpha_m}\frac{\psi_j(x),_x}{\alpha_j}\right]_{x=x_i}$$

$$[K_{Sp22}]_{mj}=k_\theta S_n R\sum_{i=1}^{N}\left[\psi_m(x)\psi_j(x)\right]_{x=x_i}$$

$$[K_{Sp33}]_{mj}=C_n R\sum_{i=1}^{N}[k_z\psi_m(x)\psi_j(x)+k_R\psi_m(x),_x\psi_j(x),_x]_{x=x_i}$$

$$[M_F]_{mj}=\rho_F C_n R\sum_{k=1}^{K}\left[\frac{2\gamma_{km}\gamma_{kj}I_n(p_k r/H)}{I_n(p_k r/H),_r H}\right]_{r=R}$$

$$C_n=\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta d\theta,\quad S_n=\int_0^{2\pi}\sin^2 n\theta d\theta$$