

변화폭 원호형 띠기초의 자유진동

Free Vibrations of Circular Strip Foundations with Variable Breadth

이 병 구[†] · 허 영* · 이 종 국**

Byoung Koo Lee, Young Huh and Jong Kook Lee

(2003년 11월 7일 접수 ; 2004년 2월 13일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수), Strip Foundation(띠기초), Variable Breadth(변화폭), Winkler Foundation(Winkler지반)

ABSTRACT

This paper deals with the free vibration analysis of circular strip foundations with the variable breadth. Taking into account effects of both rotatory inertia and shear deformation, differential equations governing free vibrations of such foundations are derived. The Winkler foundation is chosen as the model of soil foundation. The breadth of strip foundation is assumed to be a linear function. The differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies. In numerical examples, the strip foundations with the hinged-hinged, hinged-clamped, clamped-hinged and clamped-clamped end constraints are considered. The parametric studies are conducted and the lowest four frequency parameters are reported in figures as the non-dimensional forms.

1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동 특성은 구조공학 및 기초공학 분야에서 중요한 연구 대상 중에 하나이며 이와 관련된 많은 연구들이 수행되고 있다. 지반 - 구조물 상호작용 문제에서 구조물은 지반 위에 놓인 구조로 모형화할 수 있다. 띠기초, 파이프 라인 및 철도 궤도 등은 지반 - 구조물 상호작용 문제로 해석한다.

이와 같이 여러 가지 조건을 갖는 지반으로 지지된 구조물의 정·동적 거동에 관한 연구들^(1~11)이 활발하게 이루어지고 있지만 대부분 직선부재에 관한 연구들이다. 그러나 실제 구조물에서는 직선부재와 더불어 곡선부재가 빈번하게 사용되고 있으며, 유체 저장 탱크, 곡물 저장 싸이로 등을 지지해주는 원호형 띠

기초는 그러한 예들이다.⁽¹⁰⁾

Laura 등⁽¹²⁾이 고찰한 바와 같이 지반으로 지지된 곡선부재의 동적 거동에 대한 연구는 매우 부족한 실정이며 이러한 부재들의 동적 거동에 대한 연구가 활발히 진행되어 공학적인 설계자료로 제공되어야 할 것이다. 이러한 관점에서 지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 관한 연구는 동역학 분야에서 기초적인 연구일 뿐만 아니라 곡선부재를 이용한 구조물 설계에 동적 자료를 제공할 수 있는 실용적인 연구이기도 하다.

지반 위에 놓인 구조물의 거동 해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 Winkler지반⁽¹³⁾이다. 이 모형은 지반을 무한개의 독립적인 스프링으로 표현한 모형으로 지반 - 구조물 상호작용 문제에서 탄성지반으로 많이 이용되고 있다.

Winkler지반 위에 놓인 단면폭이 변화하는 원호형 띠기초의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 이 연구의 목적이 있다. 수치

† 책임저자 : 정희원, 원광대학교 토목환경도시공학부

E-mail : bklee@wonkwang.ac.kr

Tel : (063) 850~6718, Fax : (063) 857~7204

* 정희원, 수원대학교 토목공학과

** 정희원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과

해석 예제에서는 변수연구를 통하여 기초공학에서 실제로 필요한 다양한 지점조건을 갖는 띠기초의 자유진동 특성을 고찰한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 Winkler지반으로 지지되어 있는 반경 ρ , 중심각 α 인 원호형 띠기초를 나타낸다. 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다. 이 그림에서 θ 는 띠기초의 임의점을 정의하기 위한 각도이다. 점선으로 표시되어 있는 정적 상태의 띠기초가 자유진동하게 되면 실선으로 표시되어 있는 동적 변위를 갖게 된다. v 는 수직변위, Ψ 와 β 는 휨과 전단에 의한 회전각, ϕ 는 비틀림에 의한 비틀림각으로 변위항이다. R_v 와 R_T 는 지반변위에 의하여 발생하는 지반회복력(restoring force)으로 단위길이당 수직반력과 비틀림반력이다. 수학적 모형에 Ψ 와 β 를 고려함으로써 지배미분방정식에는 회전관성과 전단변형 효과를 동시에 고려한다.

Fig. 2는 자유진동할 때에 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸다. 합응력인 Q, M, T 는 전단력, 휨 모멘트, 비틀림 모멘트를 나타내고, 단위길이당의 관성력인 F_v, C_Ψ 및 C_ϕ 는 수직관성력, 회전관성우력, 비틀림관성력을 나타낸다. 미소요소에 작용하는 Q, M, T 와 F_v, C_Ψ, C_ϕ 및 R_v, R_T 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

$$Q' - \rho F_v - \rho R_v = 0 \tag{1}$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \tag{2}$$

$$M - T' + \rho C_\phi + \rho R_T = 0 \tag{3}$$

식 (1)~(3)에서 $(\cdot) = d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

변위에 의하여 발생하는 합응력 Q, M, T 는 식 (4)~(6)과 같다.⁽⁶⁾

$$Q = \alpha_s GA (\rho^{-1} v' - \Psi) \tag{4}$$

$$M = EI \rho^{-1} (\phi - \Psi') \tag{5}$$

$$T = GJ \rho^{-1} (\Psi + \phi') \tag{6}$$

여기서 A 는 단면적, I 는 단면2차모멘트, J 는 단면극관성모멘트이고, G 는 전단탄성계수, E 는 탄성계수이며, α_s 는 단면형상계수이다.

띠기초가 자유진동을 하면 질량을 갖는 미소요소에 단위길이당의 관성력 F_v, C_Ψ, C_ϕ 가 다음 식과 같이 발생한다.

$$F_v = -\gamma A \omega^2 v \tag{7}$$

$$C_\Psi = -\gamma I \omega^2 \Psi \tag{8}$$

$$C_\phi = -\gamma J \omega^2 \phi \tag{9}$$

여기서, γ 는 질량밀도이고 ω 는 고유각진동수이다.

띠기초를 지지하는 지반모형으로 Winkler 지반을 채택하였다. Fig. 3은 Winkler 지반 위에 놓인 띠기초의 임의점 θ 에서 v 및 ϕ 를 나타내고 있다. B 는 지반과 접촉하는 단면폭, k 는 Winkler지반계수, r 은 단면도심을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이다.

지반이 접촉하는 면의 r 에서 지반의 압력변화와 지반변위는 다음의 관계가 있다.⁽⁸⁾

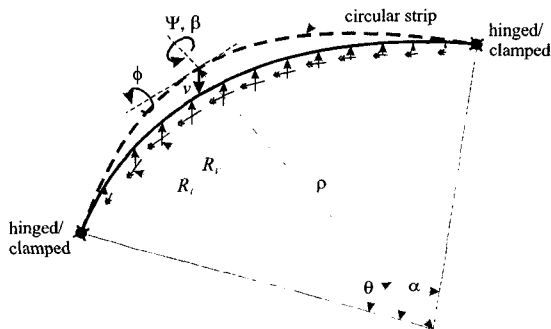


Fig. 1 Circular strip foundation and its variables

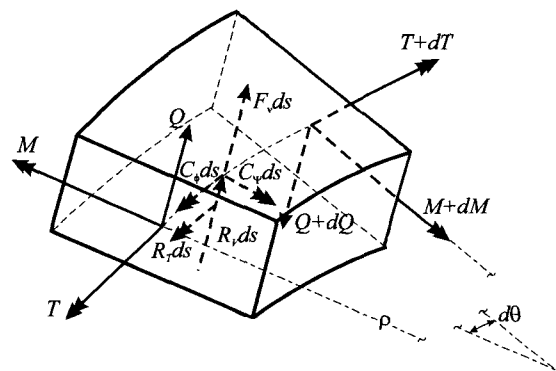


Fig. 2 Stress resultants, inertia forces and restoring forces on strip element

$$p(r, \theta) = kz(r, \theta), \quad -B/2 \leq r \leq B/2 \quad (10)$$

위의 식에서 $p(r, \theta)$ 는 압력변화이고 $z(r, \theta)$ 는 ϕ 에 의하여 발생하는 수직방향의 지반변위이다.

임의점 θ 에서 수직변위, 비틀림각이 각각 v, ϕ 이고 ϕ 는 미소각이므로 $z(r, \theta)$ 는 다음과 같이 r 의 1차 식으로 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - \phi r \quad (11)$$

식 (10), (11)을 이용하면 띠기초와 지반이 접촉하는 면에서 Winkler지반의 압력분포를 얻을 수 있고, 임의점 θ 에서 발생하는 지반회복력인 단위길이당의 R_v 와 R_T 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = kBv \quad (12)$$

$$R_T = (kB^3/12)\phi \quad (13)$$

띠기초의 단면은 기초공학에서 많이 이용되고 있는 구형단면으로 채택하였다. 구형단면의 변화폭을 정의하기 위하여 좌단 ($\theta=0$)의 단면폭 B_a 와 우단 ($\theta=\alpha$)의 단면폭 B_b 의 비 m 을 식 (14)와 같이 도입한다. 또한 구형단면의 단면높이를 정의하기 위하여 B_a 와 단면높이 H 의 비 n 을 식 (15)와 같이 도입한다. 식 (14)의 m 값을 띠기초의 단면비로 정의하며, 단면높이 H 는 전단면이 일정하다.

$$m = B_b/B_a \quad (14)$$

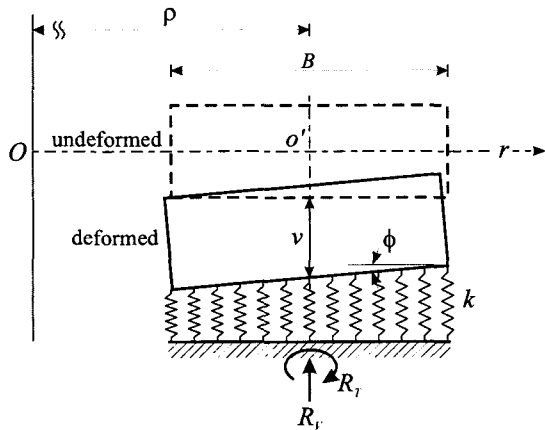


Fig. 3 Restoring forces of foundation due to vertical deflection and axial twist

$$n = H/B_a \quad (15)$$

변화폭 B 의 함수는 θ 로 주어지는 모든 함수가 가능하지만 다음과 같은 θ 의 1차 식을 채택하였다.

$$B = B_a(1 + c\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (16.1)$$

$$c = \alpha^{-1}(m-1) \quad (16.2)$$

구형단면의 높이 H 및 폭 B 가 식 (15), (16)과 같이 결정되었으므로 단면적 A , 단면2차모멘트 I , 단면극관성모멘트 J 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = nB_a^2(1 + c\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (17)$$

$$I = (n^3B_a^4/12)(1 + c\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (18)$$

$$J = (nB_a^4/12)\{(1 + c\theta)^3 + n^2(1 + c\theta)\}, \quad 0 \leq \theta \leq \alpha \quad (19)$$

미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta = v/\rho \quad (20)$$

$$s = \rho/(I_a/A_a)^{1/2} \quad (21)$$

$$\lambda = kB_a\rho^4/(EI_a) \quad (22)$$

$$\Gamma = G/E \quad (23)$$

$$c_i = \omega\rho(\gamma/E)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (24)$$

여기서 η 는 무차원 수직변위, s 는 세장비, λ 는 무차원 지반계수, Γ 는 탄성계수비, c_i 는 무차원 고유진동수이며 i 는 모드 번호이다. 식 (21), (22)에서 $A_a = nB_a^2$, $I_a = n^3B_a^4/12$ 로 표시되는 좌단 ($\theta=0$)의 단면적 및 단면2차모멘트를 나타낸다.

식 (4)~(6)에서 θ 에 대한 1계미분 Q', M', T' 을 구하고 이 식들과 식 (4)~(6)의 합응력, 식 (7)~(9)의 관성력 및 식 (12), (13)의 지반회복력을 식 (1)~(3)의 동적 평형방정식에 대입하고 식 (20)~(24)의 무차원변수를 이용하면 Winkler지반으로 지지된 변화폭 원호형 띠기초의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1\eta' + (b_1c_i^2 + b_2)\eta + \Psi' - a_1\Psi \quad (25)$$

$$\Psi'' = b_3\eta' + a_1\Psi' + (a_2 - b_3 - c_i^2)\Psi + (a_2 + 1)\phi' - a_1\phi \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \phi'' &= (a_3 - 1)\Psi' + a_4\Psi + a_4\phi' \\ &+ (a_5 + b_4 c_i^2)\phi \end{aligned} \quad (27)$$

식 (25)~(27)에서 계수 $a_1 \sim a_5$ 및 $b_1 \sim b_4$ 는 다음과 같다.

$$a_1 = -c(1 + c\theta)^{-1} \quad (28.1)$$

$$a_2 = \Gamma n^{-2} \{ (1 + c\theta)^2 + n^2 \} \quad (28.2)$$

$$a_3 = -n^2 \Gamma^{-1} \{ (1 + c\theta)^2 + n^2 \}^{-1} \quad (28.3)$$

$$a_4 = -c \{ 3(1 + c\theta) + n^2(1 + c\theta)^{-1} \} \{ (1 + c\theta)^2 + n^2 \}^{-1} \quad (28.4)$$

$$a_5 = \Gamma^{-1} \{ \lambda s^{-2}(1 + c\theta)^2 + n^2 \} \{ (1 + c\theta)^2 + n^2 \}^{-1} \quad (28.5)$$

$$b_1 = -\Gamma^{-1} a_s^{-1} \quad (29.1)$$

$$b_2 = \lambda s^{-2} \Gamma^{-1} a_s^{-1} \quad (29.2)$$

$$b_3 = -s^2 \Gamma a_s \quad (29.3)$$

$$b_4 = -\Gamma^{-1} \quad (29.4)$$

띠기초의 지점조건은 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전 및 고정-고정의 4가지 조건을 고려하였다. 이들 조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 먼저, 회전지점 ($\theta=0$ 또는 $\theta=\alpha$)에서 수직변위, 비틀림각 및 식 (4)로 나타낸 휨 모멘트가 "0"이다. 이 경계조건을 무차원 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = 0 \quad (30)$$

$$\phi = 0 \quad (31)$$

$$\Psi' = 0 \quad (32)$$

고정지점에서 수직변위, 비틀림각 및 회전각은 "0"이다. 이를 경계조건 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = 0 \quad (33)$$

$$\phi = 0 \quad (34)$$

$$\Psi = 0 \quad (35)$$

3. 수치해석 결과 및 토의

이상에서 변화폭 원호형 띠기초의 자유진동을 지배

하는 미분방정식 및 경계조건을 유도하였다. 이제 입력변수인 α , m , n , s , λ , Γ , a_s 및 지점조건이 주어지면 적절한 수치해석 방법에 의하여 무차원 고유진동수 c_i 를 산출할 수 있다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였다. 무차원 고유진동수 c_i 는 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다. 이와 같은 수치해석 방법은 다수의 문헌들^(11,14)에서 그 타당성이 입증되었다.

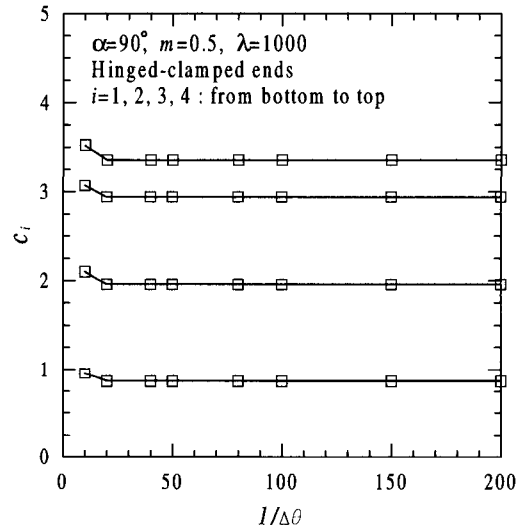


Fig. 4 Convergence analysis for hinged-clamped ends

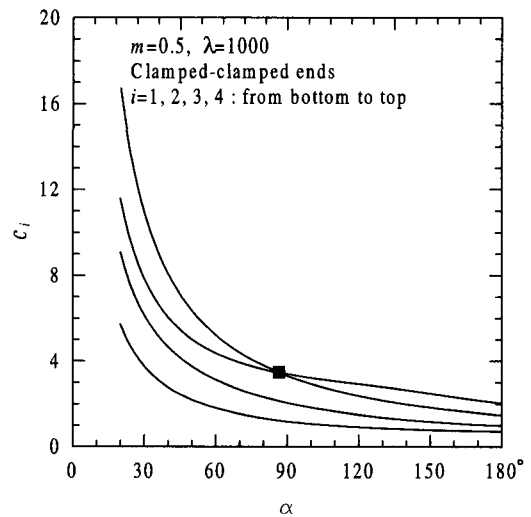


Fig. 5 c_i versus α curves for clamped-clamped ends

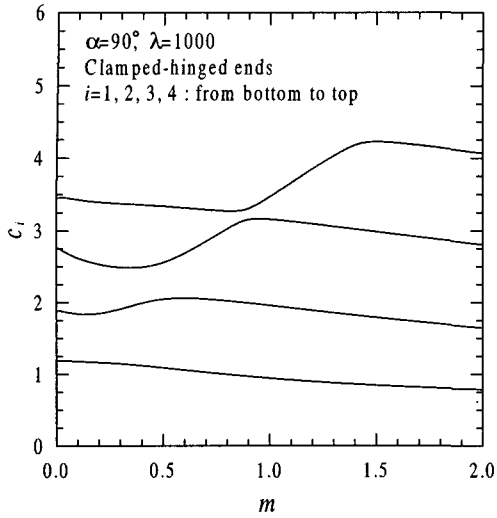


Fig. 6 c_i versus m curves for clamped-hinged ends

수치해석 예에서는 단면 및 재료의 성질로부터 결정이 되는 단면형상계수 $\alpha_s = 1.5$ (구형단면), 단면높이비 $n = 0.2$, 세장비 $s = 50$, 탄성계수비 $\Gamma = 0.4$ 를 기본 변수 값으로 하고 나머지 무차원 변수들인 중심각 α , 단면비 m , 무차원 지반계수 λ 는 변수연구(parametric study)에 이용하였다.

Runge-Kutta법에서 적절한 단계길이(step size) $\Delta\theta$ 를 결정하기 위하여 회전-고정 띠기초에 대하여 수렴해석을 실시하였다. Fig. 4에서와 같이 $1/\Delta\theta = 20$ 즉, $\Delta\theta = 0.05$ 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 실제의 수치해석에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여 $1/\Delta\theta = 100$ 으로 수치해석하였다.

Fig. 5는 띠기초의 중심각 α 를 변화시키면서 고정-고정 띠기초의 무차원 고유진동수 c_i 의 변화를 나타낸 그림이다. α 가 증가하면 c_i 는 감소한다. 이는 α 가 증가하면 수평높이가 증가하기 때문에 진동에 대한 강성이 감소되는 결과로 사료된다. Fig. 5에서 제 3, 4 모드의 고유진동수 곡선이 서로 접하는 ■로 표시한 (α, c_i) 좌표가 존재한다. 이 α 값에서 c_i 는 중복근을 갖게 되어 한 개의 고유진동수에서 두 개의 진동형이 가능하다. 이러한 현상은 아치의 자유진동에서도 발생한다.⁽¹⁵⁾ 띠기초의 기하적 형상이 대칭이기 때문에 이 두 진동형은 대칭 진동형(symmetric mode)과 역대칭 진동형(anti-symmetric mode)으로 나타내며 ■를 전후해서 모드 번호가 바뀐다.

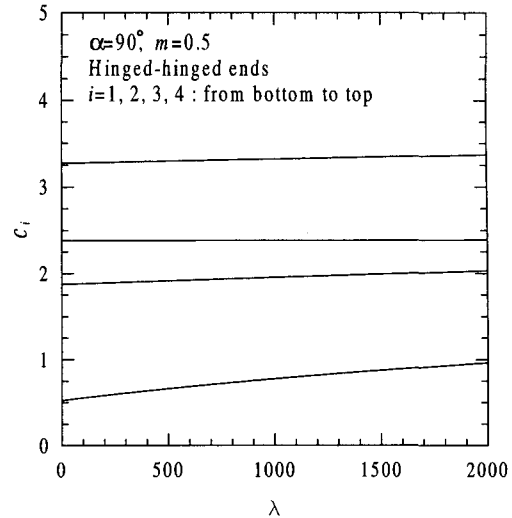


Fig. 7 c_i versus λ curves for hinged-hinged ends

Fig. 6은 단면비 m 의 변화에 따른 고정-회전 띠기초의 무차원 고유진동수 c_i 의 변화를 나타낸다. m 이 증가함에 따라 제 1 모드의 c_i 는 감소하지만 제 2, 3, 4모드는 감소하다가 다시 증가하는 것을 알 수 있다. 따라서 특정 모드에 대하여 c_i 값의 최대치가 존재하므로 이 때의 m 값을 적절히 선택하면 띠기초 상부구조 설계에 유용한 동적 설계자료를 제공할 수 있다.

Fig. 7은 무차원 지반계수 λ 의 변화에 따른 회전-회전 띠기초의 무차원 고유진동수 c_i 의 변화를 나타낸다. λ 값이 증가함에 따라 c_i 도 증가하는 것을 알 수 있다. 제 1모드에서 c_i 는 고차모드에서 보다 비교적 큰 증가율을 보이고 있는 반면에 제 2, 3, 4모드에서는 그 증가율이 매우 작다. 특히 제 3모드에서는 λ 값이 큰 쪽으로 변화하였으나 c_i 값은 거의 일정 값을 나타내고 있다.

4. 결론

이 논문은 지반 위에 놓인 구형단면을 갖고 단면폭이 변화하는 원호형 띠기초의 자유진동에 관한 연구이다. 지반을 Winkler 지반으로 모형화하여 띠기초의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 동시에 고

려하였다. 단면폭의 변화는 1차 함수로 채택하였으며, 회전-회전, 회전-고정, 고정-회전 및 고정-고정의 4가지 지점조건을 고려하였다. 이 미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였고, 무차원 고유진동수의 산출은 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 수치해석 예에서는 띠기초의 무차원 변수들인 중심각, 단면비 및 무차원 지반계수와 무차원 고유진동수 사이의 관계를 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 띠기초의 해석 및 설계에 그 유용성이 기대된다.

수치해석 결과를 분석하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 미분방정식의 수치적분에서 단계길이 $\Delta\theta$ 가 0.05 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다.
2. 띠기초의 중심각 α 가 증가하면 무차원 고유진동수 c_i 는 감소한다.
3. 띠기초의 기하적 형상이 대칭이면 중복근을 가질 수 있어 동일한 c_i 에서 두 개의 진동형이 존재한다.
4. 단면비 m 의 변화에 대하여 c_i 값이 최대가 되는 m 값이 존재한다.
5. 무차원 지반계수 λ 가 증가하면 c_i 도 증가하나 고차 모드에서 그 증가율은 매우 작다.

참 고 문 헌

(1) Voltera, E., 1953, "Deflection of Circular Beams resting on an Elastic Foundation obtained by the Method Harmonic Analysis," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 20, pp. 227~237.

(2) Wang, T. M. and Stephens, J. E., 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, pp. 149~155.

(3) Panayotounakos, D. E. and Teocaris, P. S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 47, pp. 139~144.

(4) Issa, M. S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.

127, pp. 291~301.

(5) Kukla, S., 1991, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 259~265.

(6) Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-parameter Elastic Soil," *Computer & Structures*, Vol. 47, pp. 419~426.

(7) 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석," *한국강구조학회논문집*, 제 6 권, 제 3 호, pp. 107~115.

(8) De Rosa, M. A., 1995, "Free Vibrations of Stepped Beams with Intermediate Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 19, pp. 1~4.

(9) 모정만, 1997, 변화곡률을 갖는 수평곡선보의 자유진동에 관한 연구, 박사학위논문, 원광대학교대학원.

(10) 이병구, 진태기, 최규문, 이태은, 2001, "여러 개의 스프링으로 탄성지지된 수평곡선보의 자유진동," *한국소음진동공학학회논문집*, 제 11 권, 제 5 호, pp. 101~107.

(11) Lee, B. K., Oh, S. J. and Park, K. K., 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, No. 1, pp. 77~97.

(12) Laura, P. A. A. and Maurizi, M. J., 1987, "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, pp. 6~9.

(13) Winkler, E., 1867, *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*, Domonocus.

(14) Oh, S. J., Lee, B. K. and Lee, I. W., 2000, "Free Vibrations of Non-circular Arches with Non-uniform Cross-section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, No. 6, pp. 4871~4891.

(15) Lee, B. K., Wilson, J. F., 1989, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, No. 1, pp. 75~89.