

내부에 변동하는 유동을 갖는 직선 파이프의 안정성 해석

홍 성 철*

(2003년 12월 10일 접수, 2004년 2월 3일 심사완료)

Stability Analysis of a Straight Pipe with Time Dependent Flow

Sung Chul Hong

Key Words: Stability(안정성), Pipe(파이프), Flow Induced Vibration(유체유발진동), Multiple Scale Method(다중척도법)

Abstract

The stability of a simply supported straight pipe is investigated. The time dependent flow is assumed to vary harmonically about a constant mean velocity. Stability conditions and dynamic responses of a governing equation are conducted by use of multiple scale method. Parametric resonances and combination resonances are investigated. Stability boundaries are analytically determined. The resulted stability conditions show that instabilities exist when the frequency of flow fluctuation is close to two times the natural frequency or to the sum of any two natural frequencies. In case that the fluctuated flow frequency is close to zero or to the difference of two natural frequencies, however, instabilities are not found up to the first order of perturbation. Stability charts are numerically presented for the first two vibration modes.

기호설명

- v : 무차원 파이프 변위
- β : 질량비
- c : 무차원 유속
- c_0 : 무차원 평균유속
- t : 무차원 시간

1. 서론

파이프 계의 유체유발진동 연구는 Housner⁽¹⁾의 연구로 시작되어 항공분야, 발전플랜트 등, 산업분야의 필요성 증대로 계속 연구되어지고 있다. 초기의 연구들은 유체의 유속이 일정하다는 가정

하에 Benjamin,⁽²⁾ Paidoussis⁽³⁾ 등에 의하여 연구되었다.

그러나 플랜트 등에 설치된 파이프 계에서는 내부유체가 조화진동을 하며 흐르는 경우가 많다. Chen⁽⁴⁾은 처음으로 유속이 조화진동하며 흐르는 단순지지 파이프를 모델로 파라메트릭 공진(parametric resonance)이 존재함을 밝혔다. Paidoussis와 Issid⁽⁵⁾는 끝단지지 파이프 계의 파라메트릭 공진을 실험적, 이론적으로 조사하였다. 유속 및 압력변동을 고려한 연구는 Lee, Pak과 Hong⁽⁶⁻⁸⁾에 의하여 유체의 변동과 파이프의 운동이 상호 연계된 운동방정식을 유도하고 안정성 해석을 수행하여 유체의 유속과 더불어 압력의 변동이 안정성에 미치는 영향을 고찰하였다. 내부유체가 조화진동을 하며 흐르는 경우를 해석한 이 연구들은 Bolotin 방법을 이용하여 파라메트릭 불안정(parametric instability)이 나타나는 결과를 보이고 있다. Paidoussis와 Sundrajan⁽⁹⁾은 Floquet 방법을 이용하여 파라메트릭 공진 만이 아니라 조합공진(combination resonance)을 수치 해석하여

* 회원, 한라대학교 기계자동차공학부

E-mail : schong@hit.halla.ac.kr

TEL : (033)760-1214 FAX : (033)760-1211

이들의 불안정영역을 제시하였다. 이 수치해석 방법은 매우 많은 계산시간을 요하며, 특히 어떤 모드들 사이에서 조합공진이 일어나는지를 명확히 알기 어려운 단점이 있다. 파이프의 비선형성을 고려한 연구로는 Pak과 Hong 등⁽¹¹⁻¹³⁾에 의하여 이루어 졌으며, 혼돈운동의 발생조건을 제시하고 있다. 3차원 곡선 파이프에 대하여는 Lee와 Chung⁽¹⁴⁾의 비선형을 고려한 연구가 있다.

유속이 조화 진동하는 파이프 계에서는 파라메트릭 공진과 조합공진이 발생한다. 그러나 이를 해석하기 위한 방법은 많은 계산시간이 필요하며, 특히 조합공진의 경우는 어떤 모드들 사이에서 조합공진이 일어나는지를 알기 어려운 점이 있다. 따라서, 본 연구에서는 유속이 조화 진동하는 단순지지 파이프를 모델로 파라메트릭 공진 및 조합공진의 안정성을 섭동법(perturbation method)의 일종인 다중척도법⁽¹⁰⁾(multiple scale method)으로 해석하여 안정성 영역 및 진동 모드들 사이의 조합공진의 특성을 수식으로 고찰하고 수치적 예를 제시하고자 한다.

2. 운동방정식

본 연구에서는 유속이 변동하는 파이프의 파라메트릭 공진 및 조합공진 특성을 해석적으로 파악하기 위하여 Fig. 1과 같은 단순지지 파이프를 대상으로 하였다. 이 파이프 계의 운동방정식^(7,8)은 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m_f c_f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2m_f c_f \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \tau} + m_f \frac{\partial c_f}{\partial \tau} \frac{\partial w}{\partial x} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 EI 는 파이프의 굽힘강성, m_f 는 단위 길이당 유체질량, m_p 는 단위 길이당 파이프 질량, c_f 는 유체 속력, w 는 파이프의 굽힘변위, τ 는 시간이다.

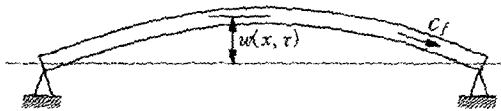


Fig. 1 A deflected pipe with internal flow

식 (1)에서 각 매개변수의 영향을 고찰하기 위하여 아래의 무차원 항을 사용하여 무차원 방정식으로 표현한다.

$$v = \frac{w}{\ell}, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad c = \sqrt{\frac{m_f}{EI}} \ell c_f, \\ t = \sqrt{\frac{EI}{m_p + m_f}} \frac{\tau}{\ell^2}, \quad \beta = \frac{m_f}{m_p + m_f}$$

여기서 ℓ 은 파이프의 길이이다. 위의 무차원 항들을 이용하여 얻어진 무차원 운동방정식은 아래와 같다.

$$\ddot{v} + \sqrt{\beta} c \dot{v}' + 2\sqrt{\beta} c v' + c^2 v'' + v'''' = 0 \quad (2)$$

여기서 $(\cdot) = \partial/\partial t$ 로 무차원 시간 미분을, $(\cdot)' = \partial/\partial \xi$ 로 무차원 위치에 대한 미분을 나타낸다. 경계조건은 다음과 같다.

$$v(0, t) = \dot{v}(0, t) = 0, \quad v(1, t) = \dot{v}(1, t) = 0 \quad (3)$$

그리고 파이프에 흐르는 유체의 유속이 평균유속을 기준으로 조화진동을 한다면, 유속은 다음과 같이 표현된다.

$$c = c_0(1 + \epsilon \sin \Omega t) \quad (4)$$

여기서 ϵ 은 $\epsilon \ll 1$ 인 작은 매개변수로 유속변동 진폭비이고, Ω 는 유속변동 주파수로 파라메트릭 가진 주파수가 된다.

식 (4)를 식 (2)에 대입하고 ϵ 의 1차항 까지를 나타내면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{v} + 2\sqrt{\beta} c_0 \dot{v}' + c_0^2 v'' + v'''' + \epsilon c_0 (\sqrt{\beta} \Omega \cos \Omega t \dot{v}' + 2\sqrt{\beta} \sin \Omega t v' + 2c_0 \sin \Omega t v'') = 0 \quad (5)$$

3. 안정성해석

유도된 운동방정식 (5)는 파라메트릭 가진 계(parametric excitation system)로 안정성 해석은 일반적으로 Floquet 방법⁽⁹⁾을 이용할 수 있으나 수치 적분시 매우 많은 시간이 소요되는 어려움이 있다. 근사적인 방법으로 Bolotin 방법이 사용되는데 이 해석법으로는 조합공진을 찾을 수 없는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 섭동법의 한 종류인 다중척도법을 적용하여 안정성 해석을 수

행한다.

식 (5)의 해를 다중척도법을 사용하여 다음과 같이 가정한다.

$$v(\xi, t, \varepsilon) = v_o(\xi, T_o, T_1) + \varepsilon v_1(\xi, T_o, T_1) + \dots \quad (6)$$

여기서 $T_o = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 이다. 식 (5)에서 사용하는 시간 미분은 다중척도를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= D_o + \varepsilon D_1 + \dots, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= D_o^2 + 2\varepsilon D_o D_1 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 $D_n = \partial/\partial T_n$ 이다.

식 (6)과 식 (7)을 식 (5)에 대입하고 ε 차수별로 분리 정리하면 다음과 같다.

$$O(\varepsilon^0) : D_o^2 v_o + 2\sqrt{\beta} c_o D_o v_o' + c_o^2 v_o'' + v_o'''' = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^1) : D_1^2 v_1 + 2\sqrt{\beta} c_o D_1 v_1' + c_o^2 v_1'' + v_1'''' \\ = -2D_o D_1 v_o - 2\sqrt{\beta} c_o D_1 v_o' \\ - \sqrt{\beta} c_o \Omega \cos \Omega t v_o' \\ - 2\sin \Omega t (\sqrt{\beta} c_o v_o' + c_o^2 v_o'') \end{aligned} \quad (9)$$

식 (8)의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} v_o = A_n(T_1) e^{i\omega_n T_o} \phi_n(\xi) \\ + \overline{A}_n(T_1) e^{-i\omega_n T_o} \overline{\phi}_n(\xi) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 ω_n 은 고유진동수, $\phi_n(\xi)$ 은 경계조건을 만족하는 정규모드이고 $A_n(T_1)$ 은 식 (9)의 고유항(secular term)을 제거하여 얻어질 값이다. 또한 $\overline{\phi}_n(\xi)$ 와 $\overline{A}_n(T_1)$ 는 $\phi_n(\xi)$ 와 $A_n(T_1)$ 의 공액 복소수이다.

식 (10)의 고유진동수와 정규모드는 다음의 과정으로 얻어진다. 정규모드는 다음과 같다.

$$\phi_n(\xi) = \sum_{k=1}^4 E_{nk} e^{i s_{nk} \xi} \quad (11)$$

여기서 s_{nk} 는 식 (10)과 식 (11)을 식 (8)에 대입하여 얻어진 다음의 특성방정식

$$s_{nk}^4 - c_o^2 s_{nk}^2 - 2\sqrt{\beta} c_o \omega_n s_{nk} - \omega_n^2 = 0 \quad (12)$$

의 근이고, 식 (11)은 경계조건 식 (3)을 만족해야 하므로 다음의 방정식을 얻게된다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{i s_{n1} \xi} & e^{i s_{n2} \xi} & e^{i s_{n3} \xi} & e^{i s_{n4} \xi} \\ -s_{n1}^2 & -s_{n2}^2 & -s_{n3}^2 & -s_{n4}^2 \\ -s_{n1}^2 e^{i s_{n1} \xi} & -s_{n2}^2 e^{i s_{n2} \xi} & -s_{n3}^2 e^{i s_{n3} \xi} & -s_{n4}^2 e^{i s_{n4} \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{n1} \\ E_{n2} \\ E_{n3} \\ E_{n4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

식 (13)이 해를 갖기 위해서는 식 (13)의 행렬식이 영(zero)이어야 한다. 따라서 식 (12)와 식 (13)의 조건을 동시에 풀면 ω_n 과 E_{nk} 를 얻을 수 있다.

식 (8)의 해인 식 (10)을 식 (9)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_o^2 v_1 + 2\sqrt{\beta} c_o D_o v_1' + c_o^2 v_1'' + v_1'''' \\ = \sum_{n=1}^{\infty} [-2D_1 A_n (i\omega_n \phi_n + \sqrt{\beta} c_o \phi_n') e^{i\omega_n T_o} \\ - c_o A_n (\frac{1}{2}\sqrt{\beta} \Omega \phi_n' + \sqrt{\beta} \omega_n \phi_n' \\ - 2i c_o \phi_n'') e^{i(\Omega + \omega_n) T_o} - c_o \overline{A}_n (\frac{1}{2}\sqrt{\beta} \Omega \overline{\phi}_n' \\ - \sqrt{\beta} \omega_n \overline{\phi}_n' - 2i c_o \overline{\phi}_n'') e^{i(\Omega - \omega_n) T_o} + CC] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 CC 는 공액 복소수이다. 식 (14)에서 Ω 의 값의 변화에 따라 여러 경우의 해가 존재하게 되며 각 경우의 안정성은 다음의 과정⁽¹⁰⁾으로 해석된다.

3.1 Ω 값이 $2\omega_n$ 또는 0과 차이가 큰 경우

이 경우에 대하여 식 (14)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} D_o^2 v_1 + 2\sqrt{\beta} c_o D_o v_1' + c_o^2 v_1'' + v_1'''' \\ = \sum_{n=1}^{\infty} [-2D_1 A_n (i\omega_n \phi_n + \sqrt{\beta} c_o \phi_n') e^{i\omega_n T_o} \\ + NST + CC] \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 NST 는 비고유항(nonsecular term)을 의미한다. 식 (14)의 고유항이 영(zero)이 되어야 하므로 그 조건은 다음과 같다.

$$D_1 A_n = 0 \quad (16)$$

이 조건은 $A_n = const$ 인 것을 의미한다. 즉, ε 의 1차수 내에서 계는 안정하다는 것을 의미한다.

3.2 Ω 값이 $2\omega_n$ 과 차이가 작은 경우

이 경우는 Ω 값이 고유진동수의 두배($\Omega \approx 2\omega_n$)되는 경우로 Ω 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = 2\omega_n + \varepsilon \sigma \quad (17)$$

여기서 σ 는 조절매개변수(detuning parameter)이다. 식 (17)을 식 (14)에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & D_o^2 v_1 + 2\sqrt{\beta} c_o D_o v_1 + c_o^2 v_1'' + v_1'''' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\{ 2(i\omega_n \phi_n + \sqrt{\beta} c_o \phi_n') D_1 A_n \\ &+ c_o (\frac{1}{2}\sqrt{\beta} \Omega \bar{\phi}_n' - \sqrt{\beta} \omega_n \bar{\phi}_n' \\ &- 2ic_o \bar{\phi}_n'') \bar{A}_n e^{i\omega_n T_1} + CC + NST] \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)의 해가 존재하기 위하여 식 (18)의 고유항이 다음과 같이 영(zero)이 되어야 한다.

$$D_1 A_n + r_o e^{i\sigma T_1} \bar{A}_n = 0 \quad (19)$$

여기서

$$r_o = \frac{c_o \sqrt{\beta} (\frac{1}{2}\Omega - \omega_n) \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n' d\xi - 2ic_o^2 \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n'' d\xi}{2i\omega_n \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n d\xi + 2\sqrt{\beta} c_o \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n' d\xi} \quad (20)$$

식 (19)의 해를 다음과 같이 가정한다.

$$A_n = (B_{nR} + iB_{nI}) e^{i\frac{\sigma}{2} T_1} \quad (21)$$

여기서 B_{nR} 과 B_{nI} 는 T_1 에 대한 실수 함수이다. 식 (21)을 식 (19)에 대입하고 정리하면

$$\begin{pmatrix} D_1 B_{nR} \\ D_1 B_{nI} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{oR} & r_{oI} - \sigma/2 \\ r_{oI} + \sigma/2 & -r_{oR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{nR} \\ B_{nI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

이 된다. 식 (22)의 해는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} B_{nR} \\ B_{nI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{nR} \\ b_{nI} \end{pmatrix} e^{\lambda_n T_1} \quad (23)$$

여기서 λ_n 은 다음의 행렬식으로 얻어진다.

$$\begin{vmatrix} \lambda_n + r_{oR} & r_{oI} - \sigma/2 \\ r_{oI} + \sigma/2 & \lambda_n - r_{oR} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

그러므로

$$\lambda_n = \pm \sqrt{r_{oR}^2 + r_{oI}^2 - (\sigma/2)^2} \quad (25)$$

여기서 λ_n 이 허수이면 해는 안정하고, 실수이면 불안정 조건은 다음 식으로 주어진다.

$$-2\sqrt{r_{oR}^2 + r_{oI}^2} < \sigma < 2\sqrt{r_{oR}^2 + r_{oI}^2} \quad (26)$$

그러므로 계의 불안정 영역은 식 (24)를 식 (17)에 대입함으로써 다음의 식으로 얻어진다.

$$2\omega_n - 2\epsilon |r_{oI}| < \Omega < 2\omega_n + 2\epsilon |r_{oI}| \quad (27)$$

3.3 Ω 값이 0과 차이가 작은 경우

이 경우는 Ω 값이 0에 가까운 경우($\Omega \approx 0$)로 Ω 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega = \epsilon \sigma \quad (28)$$

앞 경우와 같은 방법으로 식 (14)의 고유항을 정리하면

$$D_1 A_n + (r_1 \cos \sigma T_1 + r_2 \sin \sigma T_1) A_n = 0 \quad (29)$$

이다. 여기서

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{c_o \sqrt{\beta} \Omega \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n' d\xi}{2i\omega_n \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n d\xi + 2\sqrt{\beta} c_o \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n' d\xi} \\ r_2 &= \frac{2c_o \sqrt{\beta} \omega_n \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n' d\xi - 2ic_o^2 \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n'' d\xi}{2i\omega_n \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n d\xi + 2\sqrt{\beta} c_o \int_0^1 \bar{\phi}_n \phi_n' d\xi} \end{aligned} \quad (30)$$

식 (29)의 해는 다음과 같이 얻어진다.

$$A_n = A_{no} e^{(-\frac{r_1}{\sigma} \sin \sigma T_1 + \frac{r_2}{\sigma} \cos \sigma T_1)} \quad (31)$$

여기서 $|\sin \sigma T_1| \leq 1$ 이고 $|\cos \sigma T_1| \leq 1$ 를 항상 만족하므로 이 경우의 해는 ϵ 의 1차수 내에서 항상 안정하다.

3.4 Ω 와 $\omega_p + \omega_q$ 의 차이가 작은 경우

이 경우는 두 진동 모드의 고유진동수 합이 Ω 값과 비슷한 경우($\Omega \approx \omega_p + \omega_q$)로 Ω 는 다음과 같다.

$$\Omega = \omega_p + \omega_q + \epsilon \sigma \quad (32)$$

식 (32)를 식 (14)에 대입하여 고유항을 정리하면, 해가 존재할 다음과 같은 두 개의 조건식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} D_1 A_p + r_3 e^{i\sigma T_1} \bar{A}_q &= 0 \\ D_1 A_q + r_4 e^{i\sigma T_1} \bar{A}_p &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

여기서

$$\begin{aligned} r_3 &= \frac{c_o \sqrt{\beta} (\frac{1}{2}\Omega - \omega_p) \int_0^1 \bar{\phi}_p \bar{\phi}_q d\xi - 2ic_o^2 \int_0^1 \bar{\phi}_p \bar{\phi}_q'' d\xi}{2i\omega_p \int_0^1 \bar{\phi}_p \phi_p d\xi + 2\sqrt{\beta} c_o \int_0^1 \bar{\phi}_p \phi_p' d\xi} \\ r_4 &= \frac{c_o \sqrt{\beta} (\frac{1}{2}\Omega - \omega_p) \int_0^1 \bar{\phi}_q \bar{\phi}_p d\xi - 2ic_o^2 \int_0^1 \bar{\phi}_q \bar{\phi}_p'' d\xi}{2i\omega_q \int_0^1 \bar{\phi}_q \phi_q d\xi + 2\sqrt{\beta} c_o \int_0^1 \bar{\phi}_q \phi_q' d\xi} \end{aligned} \quad (34)$$

식 (33)을 다음의 식

$$A_p = B_p e^{i\frac{\sigma}{2} T_1}, \quad A_q = B_q e^{i\frac{\sigma}{2} T_1} \quad (35)$$

으로 좌표 변환하면 식 (33)은

$$D_1 B_p + i\frac{\sigma}{2} B_p + r_3 \overline{B_q} = 0 \quad (36)$$

$$D_1 B_q + i\frac{\sigma}{2} B_q + r_4 \overline{B_p} = 0$$

가 된다. 식 (36)의 해는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$B_p = b_p e^{\lambda T_1}, \quad B_q = b_q e^{\lambda T_1} \quad (37)$$

여기서 λ 는 다음의 행렬식으로 결정된다.

$$\begin{vmatrix} \lambda + i\sigma/2 & r_3 \\ \overline{r_4} & \lambda - i\sigma/2 \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

즉,

$$\lambda = \pm \sqrt{r_3 \overline{r_4} - (\sigma/2)^2} \quad (39)$$

여기서 $r_3 \overline{r_4}$ 는 식 (34)의 모드함수의 특성을 이용하면 실수임을 알 수 있다. 그러므로, $r_3 \overline{r_4} \leq 0$ 이면 해는 항상 안정하다. $r_3 \overline{r_4} > 0$ 인 경우는 $-2\sqrt{r_3 \overline{r_4}} < \sigma < 2\sqrt{r_3 \overline{r_4}}$ 일 때 불안정하다. 따라서 이 조건을 식 (32)에 대입하면 계가 불안정할 조건이 다음과 같이 얻어진다.

$$2\omega_n - 2\varepsilon\sqrt{k_3 k_4} < \Omega < 2\omega_n + 2\varepsilon\sqrt{k_3 k_4} \quad (40)$$

3.5 Ω 와 $\omega_q - \omega_p$ 의 차이가 작은 경우

이 경우는 두 진동모드의 고유진동수 차가 Ω 값과 비슷한 경우($\Omega \approx \omega_q - \omega_p$)로 $q > p$ 인 경우를 고찰한다. Ω 는 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega = \omega_q - \omega_p + \varepsilon\sigma \quad (41)$$

식 (14)의 고유항을 정리하면 다음과 같은 두 개의 조건식을 얻을 수 있다.

$$D_1 A_p + r_5 e^{-i\sigma T_1} A_q = 0 \quad (42)$$

$$D_1 A_q + r_6 e^{i\sigma T_1} A_p = 0$$

여기서

$$r_5 = \frac{c_0 \sqrt{\beta} (\frac{1}{2}\Omega - \omega_q) \int_0^1 \overline{\phi_p} \phi_q d\xi + 2ic_0^2 \int_0^1 \overline{\phi_p} \phi_q d\xi}{2i\omega_p \int_0^1 \overline{\phi_p} \phi_p d\xi + 2\sqrt{\beta} c_0 \int_0^1 \overline{\phi_p} \phi_p d\xi} \quad (43)$$

$$r_6 = \frac{c_0 \sqrt{\beta} (\frac{1}{2}\Omega + \omega_p) \int_0^1 \overline{\phi_q} \phi_p d\xi - 2ic_0^2 \int_0^1 \overline{\phi_q} \phi_p d\xi}{2i\omega_q \int_0^1 \overline{\phi_q} \phi_q d\xi + 2\sqrt{\beta} c_0 \int_0^1 \overline{\phi_q} \phi_q d\xi}$$

식 (42)를 다음의 식

$$A_p = B_p e^{-i\frac{\sigma}{2} T_1}, \quad A_q = B_q e^{i\frac{\sigma}{2} T_1} \quad (44)$$

으로 좌표 변환하면 식 (42)는

$$D_1 B_p - i\frac{\sigma}{2} B_p + r_5 B_q = 0 \quad (45)$$

$$D_1 B_q + i\frac{\sigma}{2} B_q + r_6 B_p = 0$$

가 된다. 식 (45)의 해는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$B_p = b_p e^{\lambda T_1}, \quad B_q = b_q e^{\lambda T_1} \quad (46)$$

여기서 λ 는 다음의 행렬식으로 결정된다.

$$\begin{vmatrix} \lambda - i\sigma/2 & r_5 \\ r_6 & \lambda + i\sigma/2 \end{vmatrix} = 0 \quad (47)$$

즉,

$$\lambda = \pm \sqrt{r_5 r_6 - (\sigma/2)^2} \quad (48)$$

여기서 $r_5 r_6$ 은 식 (43)의 모드함수의 특성을 이용하면 실수임을 판별할 수 있으며, 그 결과는 항상 음수이다. 따라서 $r_5 r_6 < 0$ 이므로 λ 는 항상 허수 값을 갖게 되어 해는 항상 안정하다. 이 결과를 통하여 파라메트릭 가진 주파수가 두 고유진동수의 차와 비슷한 값을 가질 때 나타나는 조합공진은 ε 의 1차수 내에서는 일어나지 않는다. 즉, 불안정은 발생하지 않는다.

4. 수치 예

앞장에서 유도한 고유진동수 및 안정성 해석 결과를 몇 가지 예를 통하여 수치해석 하고자 한다. 안정성 수치해석에서는 두 진동 모드만을 고려하기로 한다.

계의 고유진동수는 식 (12)와 식 (13)을 동시에 풀어 얻을 수 있다. 평균유속의 변화에 따라 얻어진 고유진동수들을 Fig. 2에 도시하였다. Fig. 2에서와 같이 평균유속이 증가함에 따라 고유진동수는 감소하여 고유진동수가 영(zero)이 되는 정적불안정(static instability, buckling)이 나타난다. 이때의 유속을 임계유속(critical flow speed)이라 하며, Fig. 2에 나타난 1차, 2차 그리고 3차 모드의 무차원 임계유속은 각각 3.1416, 6.2832, 9.4248이다. 또한 질량비가 큰 경우, 질량비가 작은 경우에 비하여 평균유속이 커짐에 따라 고유

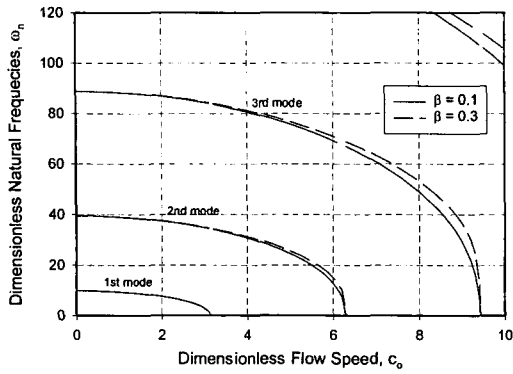


Fig. 2 Natural frequencies of pinned-pinned pipe as a function of flow speed

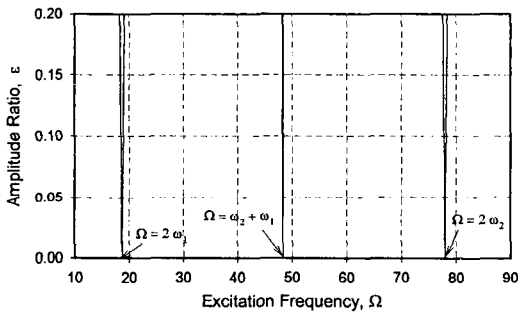


Fig. 3 Stability chart when $c_0 = 1.0$ and $\beta = 0.1$

진동수가 약간 크게 나타난다. 그러나 1차 모드의 경우는 이와 반대가 된다.⁽¹⁵⁾ Fig. 3~5는 진폭비 ϵ 과 파라메트릭 가진 주파수 Ω 의 변화에 따른 불안정영역을 도시한 안정성 도표이다. Fig. 3은 $c_0 = 0.1$, $\beta = 0.1$ 일 때 안정성 영역을 도시한 그림으로 $\omega_1 = 9.347$ 이고 $\omega_2 = 38.985$ 이다. Fig. 3에서 불안정영역은 좁은 주파수 영역에 존재하며 진폭비가 증가하면서 그 영역이 커짐을 알 수 있다. 또한 두 고유진동수의 차로 나타나는 조합공진($\Omega \approx \omega_a - \omega_b$ 인 경우)에 의한 불안정은 존재하지 않음을 알 수 있다. Fig. 4는 질량비가 다른 경우의 안정성 도표를 확대하여 도시한 그림이다. 파라메트릭 공진에 의한 불안정 영역이 조합공진에 의한 불안정 영역보다 크게 나타남을 알 수 있으며, 질량비가 안정성에 미치는 영향을 잘 보여준다. Fig. 4에서와 같이 질량비의 영향은 다음과 같다. 파라메트릭 공진의 경우 불안정 영역의 크기는 변화하지 않으며, 고유진동

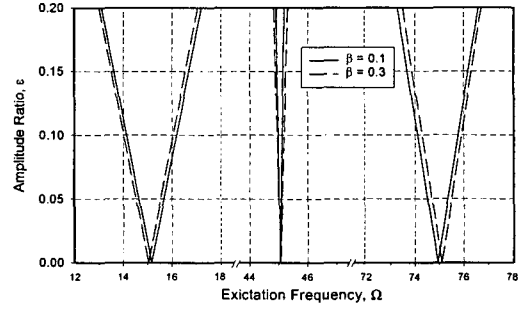


Fig 4 Stability chart for two different mass ratios when $c_0 = 2.0$

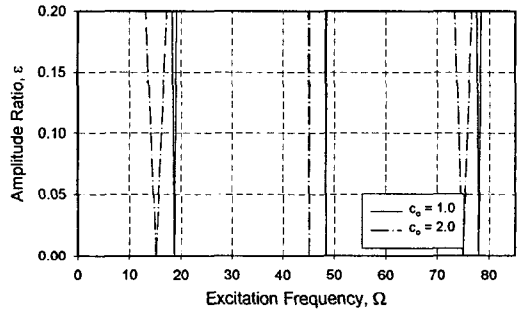


Fig. 5 Stability chart for two different flow speeds when $\beta = 0.3$

수 변화의 영향으로 불안정 영역이 수평 이동되어 나타난다. 조합공진의 경우는 질량비가 커지면서 불안정 영역이 증가됨을 알 수 있다. Fig. 5는 같은 질량비에 대하여 평균유속이 큰 경우를 비교한 그림으로, 평균유속은 그 크기가 증가할수록 불안정 영역을 크게 하는 경향을 보이며, 조합공진 보다는 파라메트릭 공진에서 그 영향이 크게 나타남을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 유속이 조화 진동하는 단순지지 파이프의 안정성을 다중척도법에 의하여 해석하여 파라메트릭 공진 및 조합공진 조건을 해석적으로 모든 모드에 대하여 제시하였으며, 해석적으로 얻어진 안정성 조건식을 수치 해석하여 그 결과를 도시하였다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

- (1) 다중척도법을 사용하여 파라메트릭 공진 및

조합공진의 해석적 조건을 모든 모드에 대하여, ε 의 1차수 내에서 제시하였다.

- (2) 유속변동 주파수가 두 고유진동수의 합이 되는 조합공진에서는 불안정이 존재하며, 반면에 유속변동 주파수가 두 고유진동수의 차와 같아지는 조합공진에서 불안정은 발생하지 않는다
- (3) 유속변동주파수가 계의 고유진동수의 2배가 될 때 불안정영역이 존재한다. 또한 평균유속이 크면 클수록 불안정 영역은 커진다.
- (4) 평균 유속이 크면 클수록 고유진동수는 감소하여 임계유속에서 고유진동수가 영(zero)이 되는 정적불안정이 존재한다.

참고문헌

- (1) Housner, G. W., 1952, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 19, pp. 205~209.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a Articulated Pipes Containing Fluid, Part I and II," *Proc. of Royal Society*, Ser. A261, pp. 475~486.
- (3) Païdoussis, M. P., 1966, "Dynamics of Flexible Slender Cylinders in Axial Flow, Part I and II," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 26, pp. 717~751.
- (4) Chen, S. S., 1971, "Dynamic Stability of a Tube Conveying Fluid," *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE*, Vol. 97, pp. 1469~1485.
- (5) Païdoussis, M. P., Issid, N. T., "Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 33, No. 3, 1974, pp. 267~294.
- (6) Pak, C. H., Lee, U., Hong, S. C., and Kim T. R., 1991, "Stability Analysis of Piping System Conveying Unsteady Flow," *Trans. of KSME*, Vol. 15, No. 5, pp. 1512~1521.
- (7) Lee, U., Pak, C. H., and Hong, S. C., 1991, "Dynamic Stability and Response Analysis of Piping System with internal Flow," *Trans. of the KSME*, Vol.15, No. 6, pp. 1861~1991.
- (8) Lee, U., Pak, C. H., and Hong, S. C., 1995, "Dynamics of Piping System with Internal Unsteady Flow," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 2, pp. 297~311.
- (9) Païdoussis, M. P. and Sundarajan C., 1975, "Parametric and Combination Resonances of a Pipe Conveying Pulsating Fluid," *Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, pp. 780~784.
- (10) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, New York: Wiley.
- (11) Pak, C. H., Hong, S. C., and Jung, W., 1996, "Chaotic Vibration of a Straight Pipe Conveying Oscillatory Flow," *Journal of KSNVE*, Vol. 6, pp. 233~244.
- (12) Pak, C. H., Hong, S. C., and Kim T. J., 1997, "Chaotic Vibration of a Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow," *Journal of KSNVE*, Vol. 7, No. 3, pp. 489~498.
- (13) Hong, S. C., 2000, "Chaotic Out-of-Plane Vibrations of Curved Pipe Conveying Oscillatory Flow," *Journal of KSNVE*, Vol. 10, No. 5, pp. 849~858.
- (14) Lee, S. I. and Chung, J., 2002, "Nonlinear Vibration Characteristics of a Curved Pipe with Fixed Ends and Steady Internal Flow," *Trans. of the KSME, A*, Vol. 26, No. 1, pp. 61~6.
- (15) Pak, C. H., Hong, S. C. and Kim T. R., 1991, "Out-of-Plane Vibrations of Angled Pipes Conveying Fluid," *Journal of the Korean Nuclear Society*, Vol. 23, No. 4, pp. 306~315.